Ё. У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

4-жилд

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1998

Тақризчилар: Тошкент қишлоқ хўжалигини механизациялаш ва ирригациялаш институтининг «Ҳисоблаш математикаси ва математик моделлаштириш» кафедраси;

Тошкент электротехника алоқа институти «Олий математика» кафедраси.

Таҳрир ҳайъати: физика-математика фанлари доктори, профессор С. Абдиназаров (масъул); физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар Ё. М. Ҳусанбоев, А. Омонов; техника фанлари номзоди, доцент Р. Ж. Исомов

Дарслик олий техника ўқув юртлари талабалари учун мўлжалланган. Китобда келтирилган назарий мавзулар инженерлик ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг махсус бўлимларининг амалдаги соатлари меъёрланган «Дастур» ига тўла мос келади.

Китоб «Олий математика» дарслигининг тўртинчи жилди бўлиб, у ҳам биринчи, иккинчи ва учинчи жилдлардагига ўхшаш кўп миқдордаги назарий ва амалий мисол ҳамда масалалар билан таъминланган.

Соатов Ё. У.

Олий математика: 4-жилд: Олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик / Таҳрир ҳайъати: Ё. М.Ҳусанбоев (масъул), А. Омонов, Р. Ж. Исомов ва бошқ. /. — Т.: «Ўқитувчи», 1997. — 320 б.

ББК 22.11я73

$$C\ \frac{1602000000-13}{354\ (04)-98}$$ Ахб. хат — 97

ISBN 5—645—03229—2

Ўзбекистон Республикаси мустақиллигининг етти йиллигига бағишланади.

СЎЗ БОШИ

Азиз ва муҳтарам Китобхон эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур «Олий математика» дарслигининг тўртинчи жилдида оддий дифференциал тенгламалар ҳақидаги мавзулар баён этилган.

Дарсликнинг тўртинчи жилдини ёзишда ҳам техника олий ўқув юртларининг инженерлик ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги дастурига асосланилди. Шу дастурдаги соатлари меъёрланган оддий дифференциал тенгламалар махсус боби учун тавсия қилинган асосий ва қўшимча адабиётлардан ҳамда кейинги йилларда ўзбек тилида чоп этилган дарслик ва ўқув қўлланмалардан кенг фойдаланилди.

Дарсликда келтирилган мавзу А ва Б қисмларга бўлинган. А қисмида олий математика курси дифференциал тенгламалар бобининг асосий мавзулари атрофлича баён этилган ҳамда мисол ва масалалар ечиш асосида мустаҳкамланган. Б қисмда мавзуларга оид амалий машғулотлар берилган.

Муаллиф дарсликни тузишда, назарий ва амалий мисол ҳамда масалаларни танлашда берган маслаҳатлари ва ёрдамлари учун Тошкент архитектура-қурилиш институти «Олий ва амалий математика» кафедраси ўқитувчиларига ўз миннатдорчилигини билдиради.

Ўзбекистон ФА нинг академиги В. Қ. Қобуловга дарсликда келтирилган оддий дифференциал тенгламалар махсус бобининг мазмунини яхшилаш мақсадида берган танқидий фикр ва мулоҳазалари учун муаллиф самимий миннатдорчилик изҳор этади.

Муаллиф холис тақриз бериб, қўлёзмадаги камчиликларни кўрсатганлари учун Тошкент қишлоқ хўжалигини механизациялаш ва ирригациялаш институти «Ҳисоблаш математикаси ва математик моделлаштириш» кафедрасининг ўқитувчилари ва унинг мудири профессор Х. Эшматовга, Тошкент электротехника алоқа институти «Олий математика» кафедраси ўқитувчилари ва унинг мудири доцент Б. Эргашевга, таҳрир ҳайъатининг аъзолари физика-математика фанлари доктори, проффессор С. Абдиназаров ва доцентлар Ё. М. Ҳусанбоев, Р. Ж. Исомов, А. Омоновларга ўз ташаккурини билдиради.

Дарсликнинг амалий машғулот қисмига киритилган мисол ва масалаларни танлашда, ечимларини текширишда Р. Ж. Исомов ҳамда А. Омоновларнинг сидқидилдан берган ёрдамларини муаллиф ҳурмат билан эътироф этади.

Дарслик ҳақидаги танқидий фикр ва мулоҳазалар билдирган китобхонларга муаллиф олдиндан ўз миннатдорчилигини изҳор этади.

Муаллиф

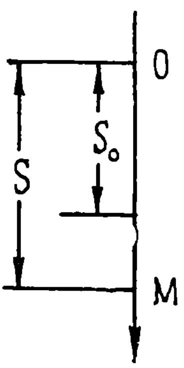
ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

А. НАЗАРИЙ МАВЗУЛАР

1-§. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган механик, физик ва геометрик масалалар

Табиатшунослик ва техниканинг кўпгина масалалари қаралаётган ҳодиса ёки жараённи тавсифлайдиган номаълум функцияни топишга келтирилади. Бир нечта мисол кўрамиз.

1-масала. Массаси m бўлган моддий нуқта оғирлик кучи таъсирида эркин тушмоқда. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, бу моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини топинг.



1- шакл

Ечиш. Моддий нуқтанинг вазияти $OM = s$ координата билан аниқланиб, у t вақтга боғлиқ равишда ўзгаради (1-шакл). Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра:

$$ma = F,$$

бу ерда m — моддий нуқтанинг массаси, a — моддий нуқтанинг тезланиши, F — таъсир этувчи куч. Шартга кўра, моддий нуқтага фақат оғирлик кучи таъсир этади, демак, $F = mg$, бу ерда g— оғирлик кучи тезланиши, a тезланиш эса йўлдан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиладан иборат, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg \text{ ёки } \frac{d^2s}{dt^2} = g. \qquad (1.1)$$

(1.1) тенглик номаълум $s = s(t)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ўз ичига олган тенгламадан иборатдир. Бу тенгламани t бўйича икки марта интеграллаб, изланаётган функцияни осонгина топамиз:

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1, \qquad (1.2)$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \qquad (1.3)$$

(1.3) тенглик биз излаётган ҳаракатнинг умумий қонунини беради, унда иккита интеграллаш доимийси: C_1 ва C_2 қатнашади. Уларни нуқтанинг бошланғич ҳолати ва бошланғич тезлигини билган ҳолда аниқлаш мумкин. Бошланғич $t = 0$ пайтда моддий нуқтанинг тезлиги v_0 га, унинг саноқ боши O дан узоқлиги эса s_0 га тенг бўлсин, дейлик. $\frac{ds}{dt}$ тезликни ифодалагани учун (1.2) дан $C_1 = v_0$ ни, (1.3) дан эса $C_2 = s_0$ ни топамиз. У ҳолда (1.3) ҳаракат қонунининг хусусий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0t + s_0.$$

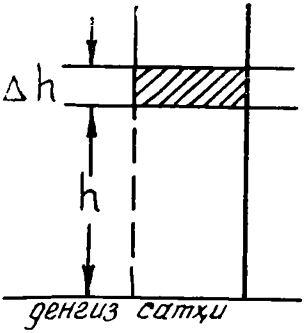
2-масала. Ҳаво босимини денгиз сатҳига нисбатан баландликка боглиқ равишда аниқланг.

Ечиш. Денгиз сатҳидан ҳисобланган баландлик h (м), ҳаво босими эса $p\,(H/м^2)$ бўлсин. Масала босимнинг баландликка боглиқлигини кўрсатувчи $p = p(h)$ функцияни топишдан иборат. Денгиз сатҳида жойлашган 1 м^2 юзга эга горизонтал квадрат майдончага таянган призматик ҳаво устунини қарайлик.

Агар h баландликда қаралаётган устуннинг кесимини ўтказсак (2-шакл), у ҳолда бу кесимдаги ҳавонинг босими устуннинг кесимдан юқоридаги қисмининг оғирлиги билан аниқланади. Иккинчи горизонтал кесимни $h + \Delta h$ баландликда ўтказайлик. Бу кесимдаги ҳаво босими иккала кесим орасидаги устунда бўлган ҳаво оғирлигига тенг Δp миқдорга кичик бўлади. Шунинг учун

$$\Delta p = -q\Delta h$$

деб ёзиш мумкин, бу ерда q катталик p босимдаги бир кубометр ҳавонинг оғирлиги. Лекин q катталикнинг ўзи босимга пропорционал. Ҳақиқатан ҳам, q_0 бир кубометр ҳавонинг $p_0 = 1\,(H/м^2)$ босимдаги оғирлиги бўлсин. Бойль—Мариотт қонуни $pV = p_0V_0$ га биноан бундай миқдордаги ҳаво p босимда $V = \frac{1}{p}$ кубометр ҳажмга эга бўлиб, аввалгича $q_0(H)$ оғирликда бўлади. У ҳолда бир кубометр ҳавонинг q оғирлиги $q = \frac{q_0}{v} = q_0p$ га ёки, умуман, $q = kp$ га тенг бўлади (k — пропорционаллик коэффициенти). Шундай қилиб, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:



2-шакл

$$\Delta p = -kp\Delta h. \tag{1.4}$$

(1.4) тенглик h ва $h + \Delta h$ орасидаги ҳамма кесимларда босим ўзгармас ва p га тенг деб ҳисобланган фаразга асосланиб чиқарилганлиги учун аниқ эмас. Аслида эса, бу кесимларда босим турлича бўлиб, h ортиши билан у камаяди. Бироқ $p = p(h)$ функцияни узлуксиз деб фараз қилиш табиий бўлганлиги учун (1.4) тенгликнинг хатоси унча катта бўлмайди ва Δh катталик қанчалик кичик бўлса, у шунчалик кичик бўлади. Энди (1.4) тенгликнинг иккала томонини Δh га бўлиб

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -kp,$$

$\Delta h \to 0$ да лимитга ўтсак, ундаги хатолик ҳам нолга интилади ва биз аниқ тенгликка эга бўламиз:

$$\frac{dp}{dh} = -kp. \qquad (1.5)$$

Бу (1.5) тенглик $p(h)$ функция ва унинг ҳосиласини боғловчи дифференциал тенгламадир. Бу тенгламанинг ечими ҳаво босими p нинг h баландликка боғлиқлигини ифодаловчи функциядан иборат. Ниҳоят (1.5) тенгламани бир марта интеграллаб ва $h = 0$ да $p = p_0$ берилган қийматини эътиборга олиб, ҳаво босими p нинг денгиз сатҳидан баландлик h га боғлиқлиги

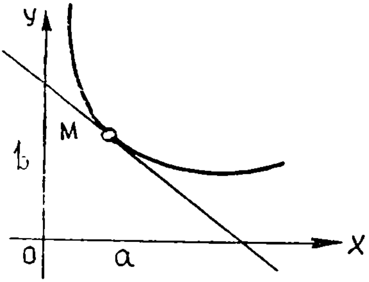
$$p = p_0 e^{-kh} \qquad (1.6)$$

формула билан ифодаланишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

3-масала. Ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан кесган кесмаси уриниш нуқтаси ординатасининг иккиланганига тенг бўлган ва $M_0(3;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.

Ечиш. Изланаётган эгри чизиқда ихтиёрий $M(x,\ y)$ нуқта оламиз (3-шакл). M нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$Y - y = y'(X - x)$$



3- шакл

кўринишда бўлади, бунда X, Y — уринма нуқталарининг ўзгарувчи координаталари, y' — изланаётган функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласи. Уринманинг Oy ўқдан ажратадиган b кесмасини топиш учун унинг тенгламасида $X = 0$ деймиз, у ҳолда $b = Y = y - xy'$ ҳосил бўлади. Иккинчи томондан, мисолнинг шартига кўра $b = 2y$. b кесма учун икки ифода ҳосил қилинди, уларни тенглаб,

$$y - xy' = 2y,$$

ёки

$$xy' + y = 0 \qquad (1.7)$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. (1.7) тенгламанинг иккала томонини dx га кўпайтириб, $\frac{dy}{dx} = y'$ эканлигини эътиборга олсак,

$$x\,dy + y\,dx = 0 \qquad (1.8)$$

ёки

$$d(xy) = 0.$$

Уни интеграллаб

$$xy = C \qquad (1.9)$$

ифодани топамиз, бунда C — ихтиёрий ўзгармас. Унинг қиймати эгри чизиқнинг M_0 нуқтадан ўтиш шартидан топилади: $C=6$. Шунинг учун изланаётган эгри чизиқнинг тенгламаси

$$xy = 6 \quad \text{ёки} \quad y = \frac{6}{x} \tag{1.10}$$

кўринишга эга бўлади. Бу эгри чизиқ асимптоталари координата ўқларидан иборат бўлган ва $M_0(3;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи гиперболадир.

2-§. Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий тушунчалари

1-таъриф. Эркли ўзгарувчи ва номаълум функция ҳамда унинг ҳосилалари ёки дифференциалларини боғловчи муносабат *дифференциал тенглама* дейилади.

Агар номаълум функция фақат битта ўзгарувчига боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенглама *оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Агар номаълум функция икки ёки ундан ортиқ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенглама *хусусий ҳосилали дифференциал тенглама* дейилади.

2-таъриф. Дифференциал тенгламага кирган ҳосилаларнинг энг юқори тартиби *тенгламанинг тартиби* дейилади.

Масалан, ушбу $y'' - y'\cos x - x^2y = 0$ дифференциал тенглама, иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама, $x(1-y)^2\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0$ дифференциал тенглама эса биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ дифференциал тенглама *биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламадир*. Юқоридаги дастлабки иккита тенгламада y — номаълум функция, x эса эркли ўзгарувчи, учинчи тенгламада эса номаълум функция z иккита x ва y ўзгарувчига боғлиқдир.

n-тартибли оддий дифференциал тенглама умумий кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\qquad ,\ y^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Бу ерда x — эркли ўзгарувчи, y — номаълум функция ва $y', \ldots, y^{(n)}$ лар номаълум функциянинг ҳосилаларидир. Хусусий ҳолларда n-тартибли тенгламада n дан паст тартибли ҳосилалар иштирок этмаслиги мумкин, шунингдек, номаълум функциянинг ўзи ёки эркли ўзгарувчи ҳам иштирок этмаслиги мумкин.

3-таъриф. Дифференциал тенгламанинг *ечими* ёки *интеграли* деб тенгламага қўйганда уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай дифференциалланувчи $y = \varphi(x)$ функцияга айтилади.

1-мисол. Ушбу $y = 3e^x$ ва $y = 4e^{-x}$ функциялар $y'' - y = 0$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини текширинг.

Ечиш. 1) $y = 3e^x$ функцияни текширамиз. y' ва y'' ларни топамиз:

$$y' = 3e^x, \quad y'' = 3e^x.$$

Буларни берилган тенгламага қўямиз:

$$3e^x - 3e^x = 0, \ 0 = 0.$$

Демак, $y = 3e^x$ функция $y'' - y = 0$ тенгламанинг ечими экан.

2) Иккинчи функция учун ҳам тегишли ҳосилаларни топиб, тенгламага қўямиз:

$$y = 4e^{-x}, \ y' = -4e^{-x}, \quad y'' = 4e^{-x}.$$

$$4e^{-x} - 4e^{-x} = 0, \ 0 = 0.$$

Демак, $y = 4e^{-x}$ функция ҳам $y'' - y = 0$ тенгламанинг ечими экан.

4-таъриф. Дифференциал тенглама ечимининг графиги *интеграл эгри чизиқ* дейилади.

Дифференциал тенгламанинг ечимини топиш жараёни кўпинча интеграллаш билан боғлиқ бўлгани учун бу жараён *дифференциал тенгламани интеграллаш* деб юритилади.

3-§. Биринчи тартибли дифференциал тенглама

Ушбу $F(x, y, y') = 0$ тенглама *умумий кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенглама* деб аталади. Агар уни y' га нисбатан ечиш мумкин бўлса, бу қуйидагича ёзилади:

$$y' = f(x, y).$$

Ҳосилага нисбатан ёзилган бу шаклдан дифференциаллар иштирок этган

$$dy - f(x, y)\,dx = 0$$

шаклга ёки, умуман,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

шаклга ўтиш осон, бу ёзув *симметрик ёзув* деб аталади, чунки бу ерда x ва y ўзгарувчилар тенг ҳуқуқлидир.

Дифференциал тенгламани, умуман айтганда, битта функция эмас, балки функцияларнинг бутун бир тўплами қаноатлантириши мумкин. Улардан бирини ажратиб кўрсатиш учун унинг аргументнинг бирорта қийматига мос қийматини кўрсатиш керак, яъни $x = x_0$ бўлганда $y = y_0$ кўринишдаги шарт берилиши керак. Бу шарт *бошланғич шарт* дейилади, у кўпинча қуйидагича ёзилади:

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

1-таъриф. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $y = \varphi(x, C)$ функцияга айтилади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон.

а) y ихтиёрий ўзгармас C нинг ҳар қандай қийматида дифференциал тенгламани қаноатлантиради;

б) бошланғич $y|_{x=x_0}=y_0$ шарт ҳар қандай бўлганда ҳам, ихтиёрий ўзгармас C нинг шундай C_0 қийматини топиш мумкинки, $y=\varphi(x, C_0)$ функция берилган бошланғич шартни қаноатлантиради, яъни

$$y_0=\varphi(x_0, C_0).$$

2-таъриф. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимидан ихтиёрий ўзгармаснинг мумкин бўлган қийматларида ҳосил қилинадиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

Умумий ечимни ошкормас ҳолда аниқлайдиган $\varphi(x, y, \overline{C})=0$ муносабат *умумий интеграл* деб аталади.

Хусусий интеграл деб, умумий интегралдан ихтиёрий ўзгармаснинг мумкин бўлган қийматида ҳосил бўладиган ечимга айтилади.

Умумий ечим (умумий интеграл) геометрик жиҳатдан битта C параметрга боғлиқ интеграл эгри чизиқлар оиласи кўринишида тасвирланади. Хусусий ечим (хусусий интеграл) бу оиланинг интеграл чизиқларидан биридир.

Дифференциал тенгламаларнинг ечимларини топишнинг ягона усули мавжуд эмас, шунинг учун дифференциал тенгламаларнинг айрим турларини қараб чиқишга ўтамиз, уларнинг умумий ечимларини топиш интегралларни ҳисоблашнинг одатдаги оддий усулларига келтирилади.

4-§. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар

Дифференциал тенгламанинг энг содда тури *ўзгарувчилари ажралган тенгламадир:*

$$M(x)\,dx+N(y)\,dy=0. \tag{4.1}$$

Унинг ўзига хос томони шундаки, dx нинг олдидаги кўпайтувчи фақат x га боғлиқ бўлиши мумкин бўлган функция, dy нинг олдидаги кўпайтувчи эса фақат y га боғлиқ бўлиши мумкин бўлган функциядир. Бу тенгламанинг умумий интеграли уни ҳадлаб интеграллаш орқали ҳосил қилинади:

$$\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy=C.$$

Ихтиёрий ўзгармасни берилган тенглама учун қулай бўлган исталган кўринишда олиш мумкин.

1-мисол. Ўзгарувчилари ажралган қуйидаги тенгламани ечинг:

$$x\,dx+y\,dy=0.$$

Ечиш. Уни интеграллаб, умумий интегрални топамиз:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\overline{C}.$$

$2\overline{C}=C^2$ деб белгилаб, $x^2+y^2=C^2$ га эга бўламиз.

Бу — маркази координата бошида, радиуси C бўлган концентрик айланалар оиласидан иборатдир.

Ушбу

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx+M_2(x)\,N_2(y)\,dy=0 \tag{4.2}$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган тенглама* дейилади.

(4.2) тенгламани $N_1(y)\cdot M_2(x)\neq 0$ ифодага бўлиб, уни ўзгарувчилари ажралган (4.1) кўринишдаги тенгламага келтириш мумкин:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Буни интеграллаб, умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C.$$

Эслатма. Ушбу

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

кўринишдаги тенглама ҳам ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир.

2-мисол. Ушбу

$$x(1+y^3)-y^2(1+x^2)dy=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламани $(1+x^2)(1+y^3)\neq 0$ га бўлиб, ўзгарувчиларни ажратамиз ($1+y^3=0$ ҳоли алоҳида қаралади):

$$\frac{x\,dx}{1+x^2}-\frac{y^2dy}{1+y^3}=0.$$

Интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2|-\frac{1}{3}\ln|1+y^3|=\frac{1}{6}\ln C.$$

Келгуси шакл алмаштиришларни осонлаштириш учун ихтиёрий ўзгармас сифатида $\frac{1}{6}\ln C$ олинди. Юқоридаги ифодани потенцирлаб, умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2}=C.$$

Энди $y^3+1=0$ ҳолни қараймиз. Бундан $y=-1$, $dy=0$. Буларни тенгламага қўйиб, $y=-1$ ҳам тенгламанинг ечими эканини кўрамиз.

3-мисол. Ушбу $y'y=\frac{e^x}{1+e^x}$ дифференциал тенгламанинг $y|_{x=0}=\sqrt{2}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламани dx га кўпайтириб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$y\,dy=\frac{e^x\,dx}{1+e^x}$$

Интеграллаб, умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1 + e^x| + \ln C$$

ёки

$$y = \sqrt{2\ln C(1+e^x)}. \tag{4.3}$$

Хусусий ечимни топиш учун бошланғич шартдан фойдаланиб, ихтиёрий ўзгармаснинг қийматини аниқлаймиз. (4.3) умумий ечимга $x=0$, $y=\sqrt{2}$ ни қўйиб, $\sqrt{2} = \sqrt{2\ln(2C)}$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $C = \frac{e}{2}$.

Демак, изланаётган хусусий ечим

$$y = \sqrt{2\ln\frac{e}{2}(1+e^x)}$$

бўлади.

5-§. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламаларнинг амалий татбиқи

Техниканинг турли соҳаларида учрайдиган қатор амалий муҳим масалалар учун ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламаларни тузиш ва таҳлил қилиш йўлларини кўрсатайлик.

5.1. Эркин моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати. Эркин моддий нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилиши учун унга таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси ўзгармас йўналишга эга бўлиши ва бошланғич тезлик эса тенг таъсир этувчи куч йўналиши бўйича йўналиши ёки нолга тенг бўлиши керак. Ҳаракат x ўқи бўйича содир бўлса, нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламасини Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан

$$m\frac{dv}{dt} = F(x, v, t)$$

ёки (5.1)

$$m\ddot{x} = F(x, v, t)$$

кўринишларда ёзиш мумкин.

Бунда $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ тезланиш ҳаракат қонунидан вақт бўйича олинган иккинчи ва v тезликдан t вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилалар, m — ҳаракатланаётган нуқта массаси, F — тенг таъсир этувчи кучнинг алгебраик қиймати.

а) *Моддий нуқтага миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлган $\vec{F}$ куч таъсир қилсин.* Нуқтанинг бошланғич тезлиги $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғида ётсин. x ўқни $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғи бўйлаб йўналтирамиз. У қолда (5.1) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{x} = F, \tag{5.2}$$

бунда F — кучнинг алгебраик қиймати. (5.2) да $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ эканлигини ҳисобга олиб, ўзгарувчиларни ажратамиз ва интеграллашдан сўнг

$$\begin{aligned} dx &= \frac{F}{m}\,dt, \\ x &= \frac{F}{m}t + C_1 \end{aligned} \tag{5.3}$$

ни ҳосил қиламиз.

(5.3) да ҳам $x = \frac{dx}{dt}$ эканлигини эътиборга олиб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dx = \left(\frac{F}{m}t + C_1\right)dt,$$

буни интеграллашдан сўнг

$$x = \frac{F}{m}t^2 + C_1 t + C_2 \tag{5.4}$$

ни топамиз.

(5.4) ифода (5.2) дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари $t = 0$ да $x = x_0$, $v = v_0$ кўринишда бўлсин. У ҳолда уларни (5.3) ва (5.4) ифодаларга қўйиб, интеграллаш доимийлари C_1 ва C_2 ларни аниқлаймиз: $C_1 = v_0$, $C_2 = x_0$. Топилган қийматларни (5.4) га қўйиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{F}{m}t^2. \tag{5.5}$$

(5.5) дан нуқта ўзгармас куч таъсири остида текис ўзгарувчан ҳаракатда бўлишини тушуниш қийин эмас.

б) *Моддий нуқтага фақат вақтга боғлиқ куч таъсир этсин.* F куч фақат t вақтнинг функцияси сифатида берилган бўлсин. У ҳолда (5.1) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{x} = F(t) \tag{5.6}$$

ёки тўғри чизиқли ҳаракатда $x = \frac{dx}{dt} = v$, $\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}$ бўлгани учун

$$m\frac{dv}{dt} = F(t). \tag{5.7}$$

(5.7) тенгламани $t = t_0$ да $v = v_0$ бошланғич шартда интеграллаб, хусусий ечимни ҳосил қиламиз:

$$v = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} F(\tau)\, d\tau + v_0.$$

Бу ечимни қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} F(\tau)\, d\tau. \qquad (5.8)$$

(5.8) дан кўринадики, нуқтанинг бирор чекли вақт оралиғидаги ҳаракат миқдорининг ўзгариши таъсир этувчи кучнинг шу вақт оралиғидаги импульсига тенг (ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги қонун). $F(t)$ маълум функция бўлгани учун охирги интегрални ҳисоблаб, вақтнинг функциясидан иборат бирор

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} F(\tau)\, d\tau \qquad (5.8)$$

функция билан алмаштирсак, натижада (5.8) ни

$$mv - mv_0 = f(t) \qquad (5.9)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (5.9) дан нуқтанинг тезлиги v ни аниқлаймиз:

$$v - v_0 + \frac{1}{m} f(t).$$

Бу тенгламада $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} f(t)$$

ёки ўзгарувчиларни ажратсак,

$$dx = \left[v_0 + \frac{1}{m} f(t)\right] dt$$

бўлади.

Бошланғич $t = t_0$ пайтда $x = x_0$ дейлик. Бу бошланғич шартларда охирги тенгламани интеграллаймиз:

$$x = \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + \frac{1}{m} f(t)\right] dt + C$$

ёки

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt.$$

Бу тенглама вақтга боғлиқ функция тарзида берилган ўзгарувчан куч таъсиридаги нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонунини ифодалайди.

в) *Моддий нуқтага фақат нуқтанинг ҳолатига боғлиқ куч таъсир қилсин.* У ҳолда (5.1) тенгламани

$$m\frac{dv}{dt} = F(x)$$

ёки

$$m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = F(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $\frac{dx}{dt} = v$ бўлгани учун

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x), \qquad (5.10)$$

ўзгарувчиларни ажратсак,

$$mv\,dv = F(x)\,dx. \qquad (5.11)$$

Бошланғич $t = t_n$ да $x = x_0$, $v = v_0$ бўлсин. (5.11) тенгламани бу бошланғич шартларда интеграллаймиз ва қуйидаги хусусий интегрални топамиз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx. \qquad (5.12)$$

(5.12) тенглик нуқтанинг $x - x_0$ масофага кўчишида унинг кинетик энергиясининг ўзгариши кучнинг шу ўтган йўлда бажарган ишига тенг эканлигини кўрсатади. Бу муносабат куч кўчиш функцияси кўринишида берилган ва нуқтанинг тезлигини ҳам кўчиш функцияси каби ифодалаш талаб қилинган ҳолларда жуда қулайдир.

Ҳақиқатан ҳам, (5.12) нинг ўнг томонидаги интегрални $f(x)$ билан белгилаймиз, у ҳолда

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = f(x),$$

бундан нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз:

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}f(x)}$$

(илдиз олдидаги ишора нуқтанинг x ўқнинг мусбат ёки манфий йўналишида ҳаракатланишига қараб мос равишда танлаб олинади) ёки $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}f(x)},$$

ўзгарувчиларни ажратсак,

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = dt$$

бўлади.

Берилган бошланғич шартларни эътиборга олиб, бу тенгламани интегралласак,

$$\pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = t - t_0$$

бўлади.

Бу тенгламанинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, x ни t вақтнинг функцияси сифатида ифодалаймиз ва нуқтанинг ҳаракат қонунини топамиз.

г) *Моддий нуқтага таъсир этувчи куч фақат нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлсин.* Бундай ҳоллар одатда қаршилик кучини ҳисобга олиш лозим бўлган масалаларни ечишда учрайди. $F = f(v)$ бўлганда нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати дифференциал тенгламасини икки усулда интеграллаш мумкин.

1-усул. Моддий нуқта ҳаракати дефференциал тенгламасини

$$m \frac{dv}{dt} = f(v) \tag{5.13}$$

кўринишда олиб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{mdv}{f(v)} = dt.$$

Бошланғич $t = t_0$ пайтда $v = v_0$ эканини эътиборга олиб, тенгламани интеграллаймиз:

$$m \int \frac{dv}{f(v)} = t - t_0. \tag{5.14}$$

(5.14) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган ифодани v га нисбатан ечсак,

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi(t) \tag{5.15}$$

бўлади. Бошлангич $t = t_0$ пайтда $x = x_0$ эканини ҳисобга олиб, бу тенгламани интеграллаб, нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, dt.$$

2-усул. Нуқта ҳаракатинннг дифференциал тенгламасини яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$mv\frac{dv}{dx}=f(v).$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{mvdv}{f(v)}=dx,$$

тенгламани юқоридаги бошланғич шартларда интегралласак,

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{f(v)}=x-x_0 \tag{5.16}$$

ҳамда (5.16) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган тенгламани v га нисбатан ечсак, тезликни масофанинг функцияси сифатида аниқлаймиз:

$$v=\frac{dx}{dt}=\psi(x),$$

бундан

$$\frac{dx}{\psi(x)}=dt. \tag{5.17}$$

Бу тенгламани берилган бошланғич шартларга интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\psi(x)}=t-t_0. \tag{5.18}$$

(5.18) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган тенгламани x га нисбатан ечсак, x ни вақтнинг функцияси кўринишида ифодалаш мумкин.

1-масала. Ўқ $v_0=400$ *м/с* тезлик билан ҳаракатланиб, $h=20$ см қалинликдаги деворни тешиб, ундан $v_1=100$ м/с тезлик билан учиб чиқсин. Деворнинг қаршилик кучи ўқнинг ҳаракат тезлиги квадратига пропорционал бўлса, ўқнинг девор ичидаги ҳаракатланиш вақти T ни топинг.

Ечиш. Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан ўқ ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\frac{dv}{dt}=-kv^2 \tag{5.19}$$

кўринишга эга (манфий ишора деворнинг қаршилик кучи ўқнинг тезлигига қарама-қарши йўналган бўлгани учун олинган).

(5.19) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратсак,

$$\frac{dv}{v^3}=-k_1t,\quad k_1=\frac{k}{m}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$-\frac{1}{v} = -k_1 t - C$$

ёки

$$\frac{1}{v} = k_1 t + C.'$$

Интеграллаш доимийси C ни $t = 0$ да $v = v_0$ бошланғич шартдан аниқлаймиз: $C = \frac{1}{v_0}$. У ҳолда

$$\frac{1}{v} = k_1 t + \frac{1}{v_0}. \qquad (5.20)$$

Агар $t = T$ да $v = v_1$ бўлса, изланаётган T вақт

$$\frac{1}{v_1} = k_1 T + \frac{1}{v_0}$$

тенгламадан топилади, яъни

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right). \qquad (5.21)$$

Энди k_1 катталикни h, v_0 ва v_1 орқали ифодалаймиз. Бунинг учун (5.20) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + k_1 v_0 t},$$

бунда v тезлик $\frac{dx}{dt}$ билан алмаштирилган, уни интеграллаб топамиз:

$$x = \frac{1}{k_1} \ln\,(1 + k_1 v_0 t) + C_1.$$

$t = 0$ да $x = 0$ (ўқ деворга киради) ва шунинг учун $C_1 = 0$; $t = T$ ва $x = h$ (ўқ девордан чиқяпти), демак,

$$h = \frac{1}{k_1} \ln\,(1 + k_1 v_0 T)$$

бўлади.

(5.21) тенгликдан

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + k_1 v_0 T},$$

бундан $\frac{v_0}{v_1} = 1 + k_1 v_0 T$, шунинг учун h нинг ифодаси қуйидагича бўлади:

$$h = \frac{1}{k_1} \ln \frac{v_0}{v_1},$$

бундан

$$\frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v_1}}.$$

$\frac{1}{k_1}$ нинг топилган қийматини (5.21) ифодага қўйиб, изланаётган T вақтни топиш учун формула ҳосил қиламиз:

$$T = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v_1}} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right). \qquad (5.22)$$

Масала шартида берилган $v_0 = 400$ м/с, $v_1 = 100$ м/с, $h = 20$ см қийматларни (5.22) га қўйиб, керакли ҳисоблашлардан сўнг $T = 0{,}00108$ с эканини топамиз.

5.2. Реактив ҳаракат. Массаси ўзгарувчи жисмлар (масалан, ракеталар) учун массаси ўзгармас жисмлар динамикасининг асосий қонунларини (Ньютоннинг иккинчи қонуни) бевосита қўллаш мумкин эмас. Бундай ҳолда кучни тезланиш билан боғловчи бошқа тенглама қўлланилади.

Массаси $m = m(t)$ бўлган моддий нуқта (ёқилғи сарф бўлиши натижасида массаси узлуксиз равишда камайиб борувчи ракета моддий нуқта деб олиняпти) вақтнинг t пайтида v тезликка эга бўлсин. Ракетанинг шу пайтдаги ҳаракат миқдори

$$\vec{Q}_0 = m\vec{v}$$

бўлади. dt вақт ичида ракетадан абсолют тезлиги $\vec{u}$ га тенг dm массали зарралар ажралсин. Ракетанинг массаси m камаювчи функциядан иборат бўлгани учун $dm < 0$ ва $|dm| = -dm$ бўлади. $t + dt$ вақтдан сўнг система (ракета ва ундан ажралган зарралар) нинг ҳаракат миқдори

$$\vec{Q} = [m - (-dm)] \; (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \; \vec{u}$$

бўлади.

dt вақт ичида ҳаракат миқдорининг ўзгаришини $d\vec{Q}$ билан белгиласак,

$$d\vec{Q} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

ёки

$$d\vec{Q} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm\vec{u} - m\vec{v} = \\ = md\vec{v} + dm(\vec{v} - \vec{u}) + dmd\vec{v}. \qquad (5.23)$$

Агар ракетага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори $\vec{F}$ билан белгиланса, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага кўра

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}. \qquad (5.24)$$

(5.23) ни (5.24) га қўйиб, $dm \cdot dv$ иккинчи тартибли кичик миқдорни эътиборга олмасак,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}(\vec{v}-\vec{u})=\vec{F} \tag{5.25}$$

ёки $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}_0$ ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги эканлигини ҳисобга олсак,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{u}_0\frac{dm}{dt} \tag{5.26}$$

тенгламага эга бўламиз.

(5. 25) ёки (5.26) тенгламалар ўзгарувчан массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди. Бу тенглама *И. В. Мешчерский тенгламаси* деб аталади.

$\frac{dm}{dt}>0$ да нуқтанинг массаси ортишини (зарралар қўшилади), $\frac{dm}{dt}<0$ да камайишини (зарралар ажралиб чиқади) эслатиб ўтамиз. $\frac{dm}{dt}=0$ да нуқта массаси ўзгармас ва бу ҳолда Мешчерский тенгламасидан Ньютоннинг иккинчи қонуни келиб чиқади.

Мешчерский тенгламасига бошқача кўриниш бериш ҳам мумкин:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{F}+\vec{u}\frac{dm}{dt}. \tag{5.27}$$

Хусусан $\vec{u}=0$ бўлганда (5.27) тенгламани

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{F}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак, $\vec{u}=0$ бўлганда (5.27) тенглама билан Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодаловчи тенгламанинг кўринишлари бир хил бўлади. Агар $\vec{u}_0=0$ бўлса, (5.26) дан яна Ньютоннинг иккинчи қонунини ҳосил қиламиз. $\frac{dm}{dt}\cdot\vec{u}_0$ ифода *реактив куч* деб аталади. Уни $\vec{R}$ орқали белгиласак, Мешчерский тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{R}. \tag{5.28}$$

(5.28) тенгламадан кўринадики, ҳар онда ўзгарувчан массали нуқта массасини унинг тезланишига кўпайтмаси мазкур нуқтага таъсир этувчи ташқи кучлар бош вектори билан реактив кучнинг геометрик йиғиндисига тенг.

Массаси ўзгарувчи нуқта ташқи кучлар бўлмаганда ҳам тезланиш билан ҳаракатлана олишини эслатамиз. $\vec{F}=0$ бўлганда

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R}.$$

Реактив куч катталиги

$$|\vec{R}| = \left|\frac{dm}{dt}\right| \, |\vec{u}_0|.$$

Массанинг вақт бирлигида ўзгариши $\left|\frac{dm}{dt}\right|$ («секунд масса») га ва ажралиб чиқадиган ёки қўшиладиган зарраларнинг нисбий тезлигига пропорционалдир.

5.3. Ракетанинг бўшлиқдаги тўғри чизиқли ҳаракати ҳақида Циолковский масаласи. Бошланғич массаси m_0 бўлган ракета ундан ажралиб чиқаётган газларнинг узлуксиз жараёни таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Газларнинг ажралиб чиқиш тезлиги $\vec{u}_0$ (ракетага нисбатан) катталиги жиҳатдан ўзгармас ва ракетанинг бошланғич $\vec{v}_0$ тезлигига қарама-қарши йўналган. Оғирлик кучи ва ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмасдан ракетанинг ҳаракат қонунини аниқлаш масаласини қараб чиқайлик.

(5.26) шаклдаги Мешчерский тенгламасидан фойдаланиб ва Ox ўқни $\vec{v}_0$ бошланғич тезлик йўналишида танлаб ҳамда $\vec{F} = 0$ эканлигини эътиборга олиб, ракета ҳаракатининг шу ўқдаги проекцияси бўйича дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$m\frac{dv}{dt} = -u_0\frac{dm}{dt}, \qquad (5.29)$$

бунда $\frac{dm}{dt} = \mu$ — «секунд масса», — ёнилғи массасининг ҳар бир секунддаги сарфи; ёнилғи барқарор ёниш жараёнида $\mu = \text{const}$, m — ракетанинг ўзгарувчи массаси. (5.29) да ўзгарувчиларни ажратиб $dv = -u_0\frac{dm}{m}$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$v = -u_0 \ln m + C$$

ни топамиз.

Ихтиёрий C ўзгармасни $t = 0$ бўлганда $v = v_0$, $m = m_0$ бошланғич шартдан топамиз. У ҳолда $C = u_0 \ln m_0 + v_0$ ва

$$v = u_0 \ln\frac{m_0}{m} + v_0 \qquad (5.30)$$

ҳосил бўлади.

Агар ракета корпусининг массасини $m_{\text{к}}$, ёнилғи массасини $m_{\text{ё}}$ билан белгиласак, ракетанинг бошланғич пайтдаги массаси $m_0 = m_{\text{к}} + m_{\text{ё}}$, ёнилғи ёниб бўлгандан кейинги массаси $m = m_{\text{к}}$ бўлади. Ёнилғи ёниб бўлган пайтда ракета энг катта тезликка эришади ва бу тезлик (5.30) га асосан

$$v_{\max} = v_0 + u_0 \ln \left(1 + \frac{m_ё}{m_к}\right) \qquad (5.31)$$

формуладан аниқланади.

Циолковский сони деб аталадиган $z = \frac{m_0}{m_к}$ катталикни киритсак, (5.31) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_{\max} = v_0 + u_0 \ln z. \qquad (5.32)$$

(5.30) ва (5.31) формулалар биринчи бўлиб Циолковский томонидан топилган ва шунинг учун унинг номи билан юритилади.

(5.32) формуладан v_0, u_0 ва z ортган сари ракета тезлигининг ортиши кўриниб турибди. u_0 ва z ларни ошириш ракета конструкцияси ва ёнилғи турига боғлиқ.

Агар $v_0 = 0$ бўлса, (5.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_{\max} = u_0 \ln z. \qquad (5.33)$$

Бу формула ҳам *Циолковский формуласи* деб аталади. (5.33) дан $z = e^{\frac{v}{u_0}}$ муносабатни ёзиш мумкин.

Ракета ҳаракати тенгламасини топиш учун Циолковский формуласида v ни $\frac{dx}{dt}$ га алмаштириб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \ln \frac{m_0}{m} + v.$$

$t = 0$ да $x = 0$ деб, уни интеграллаймиз ва ракета ҳаракати тенгламасини топамиз:

$$x = u_0 \int_0^t \ln \frac{m_0}{m} d\tau + v_0 t. \qquad (5.34)$$

(5.34) дан x йўл массанинг ёнилғи ёниш тезлиги билан аниқланувчи ўзгариш қонунига боғлиқлиги келиб чиқади.

Ракета массаси

$$m = m_0 (1 - \alpha t),$$

бу ерда $\alpha = \text{const}$, $\alpha > 0$ чизиқли қонуниятга биноан ўзгарса,

$$x = u_0 \int_0^t \ln \frac{m_0}{m_0 (1 - \alpha\tau)} d\tau + v_0 t$$

ёки

$$x = - u_0 \int_0^t \ln (1 - \alpha\tau) d\tau + v_0 t$$

бўлади.

Охирги ифодада

$$\int_0^t \ln(1-\alpha\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]$$

бўлгани учун

$$x = \frac{u_0}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]+v_0 t.$$

Агар ракета массаси

$$m = m_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \mathrm{const}, \ \lambda > 0$$

кўрсаткичли (экспоненциал) қонун бўйича ўзгарса,

$$x = u_0 \int_0^t \ln \frac{m_0}{m_0 e^{-\lambda\tau}}\, d\tau + v_0 t$$

ёки

$$x = u_0 \lambda \int_0^t \tau d\tau + v_0 t,$$

демак,

$$x = \frac{u_0 \lambda t^2}{2} + v_0 t. \qquad (5.35)$$

Механика қонунларидан фойдаланиб космик тезликларнинг қийматларини аниқлаш мумкин. *Биринчи космик тезликни*, яъни ракета Ер атрофида йўлдош бўлиб доиравий орбита бўйича айланиши учун зарур бўлган v_1 тезликни аниқлайлик. Бунинг учун ракетанинг марказдан қочма кучи Ернинг тортиш кучига тенг бўлиши керак, демак,

$$m_{\text{к}} \frac{v_1^2}{r} = m_{\text{к}} g,$$

бунда r — орбита радиуси, яъни Ер марказидан орбитада ҳаракат қилаётган йўлдошгача бўлган масофа, g — оғирлик кучи тезланиши. Агар r ни тақрибан Ер радиуси $R_{\text{ер}}$ га тенг деб олсак, у ҳолда

$$v_1 = \sqrt{gr} \approx \sqrt{gR_{\text{ер}}} \approx \sqrt{10 \cdot 6400000} = 8 \text{ км/с}.$$

Яна ҳам аниқроғи $v_1 = 7{,}93$ км/с.

Орбита бўйлаб ҳаракат қилаётган йўлдош Ер сатҳидан анча узоқлашганда, яъни $r \gg R_{\text{ер}}$ бўлганда баландлик ўзгариши билан оғирлик кучи тезланишининг ҳам ўзгаришини ҳисобга олмоқ керак. Тортишиш қонунидан келиб чиқадики, Ер марказидан r масофада бўлган m массали жисм Ерга $F = \frac{\gamma m\, m_{\text{ер}}}{r^2}$ куч билан тортишади, бунда $m_{\text{ер}}$ — Ер массаси. Бироқ, иккинчи томондан эса $F = mg_{\text{г}}$($g_{\text{г}}$ — Ер марказидан r масофада оғирлик кучи тезланиши) бўлгани учун

$\frac{\gamma m m_{ер}}{r^2} = mg_r$, бундан $g_r = \frac{\gamma m_{ер}}{r^2}$. Агар $r = R_{ер}$ бўлса, $g_r = g$, демак, $g = \frac{\gamma m_{ер}}{R^2_{ер}}$, бундан $\gamma = \frac{g R^2_{ер}}{m_{ер}}$, шунинг учун $g_r = \frac{g R^2_{ер}}{r^2}$. Бундай ҳолда марказдан қочма кучнинг ва оғирлик кучининг тенглигидан:

$$m_к \frac{v_1^2}{r} = m_к \frac{g R^2_{ер}}{r^2},$$

бундан

$$v_1 = \sqrt{\frac{g R^2_{ер}}{r}}$$

экани келиб чиқади.

Охирги формуладан, r қанча катта бўлса, яъни йўлдош Ердан қанчалик кўп узоқлашган бўлса, йўлдошнинг тегишли орбитада айланиши учун зарур бўлган биринчи космик тезлик v_1 шунчалик кичик бўлиши келиб чиқади. Масалан, 10000 км ($r \approx 16400$ км) баландликда $v_1 = 5$ км/с, 380000 км (Ердан Ойгача бўлган тақрибий масофа) баландликда эса $v_1 = 1$ км/с. Шундай қилиб, Ой Ерга қулаб тушмаслиги учун унинг тезлиги 1 км/с бўлиши етарлидир.

Ракета Ернинг тортиш доирасидан чиқиб кета олиши учун у v_1 дан катта тезликка эга бўлиши керак. Бу тезлик *иккинчи космик тезлик* (ёки *Ернинг таъсир доирасидан чиқиб кетиш тезлиги*) дейилади ва v_2 орқали белгиланади. Унинг қийматини топайлик. Бунинг учун Ер марказидан r масофада бўлган ракетанинг $E_п = m_k r g_r$ потенциал энергиясини тезлиги v_2 бўлган ракетанинг $E_п = \frac{m_k v_2^2}{2}$ кинетик энергиясига тенглаймиз, натижада

$$m_k \frac{v_2^2}{2} = m_k \cdot r \cdot g_r,$$

бундан

$$v_2 = \sqrt{2g_r \cdot r} = \sqrt{2 \frac{g R^2_{ер}}{r}} = v_1 \sqrt{2}$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, иккинчи космик тезлик биринчи космик тезликдан тахминан 1,4 марта катта экан.

5.4. Оғирлик кучи ҳисобга олинган ракета ҳаракати учун Циолковский масаласи. Бошланғич массаси m_0 бўлган ракета ажралиб чиқувчи газларнинг тепки кучи таъсирида юқорига вертикал ҳаракат қилмоқда. Ракетанинг m массаси t вақтга боғлиқ равишда $m = f(t)$ қонун (ёнилғи ёниш қонуни) бўйича ўзгаради. Газларнинг ракета ҳаракат тезлигига нисбатан ажралиб чиқиш тезлиги ўзгармас ва пастга йўналган бўлиб, u_0 га тенг. Агар ракетанинг Ер сатҳидаги бошланғич тезлиги v_0 га тенг бўлса, ракетанинг кўтарилиш баландлигини t вақтнинг функцияси сифатида аниқлаш масаласини кўриб чиқайлик.

Ҳаво қаршилиги ва оғирлик кучи тезланишининг ракета кўтарилиш баландлигига мос равишда ўзгариши ҳисобга олинмайди.

Оу ўқни юқорига йўналтирамиз. У ҳолда ракета ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$f(t)\,\frac{dv}{dt} = -u_0 f'(t) - gf(t), \qquad (5.36)$$

бунда $f'(t) = \frac{dm}{dt}$ — «секунд масса». (5.36) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dv = -g dt - u_0\,\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt,$$

бундан

$$v = -gt - u_0 \ln f(t) + C.$$

$t = 0$ да ракета массаси $m = f(0) = m_0$, тезлиги $v = v_0$ лади, шунинг учун $C = u_0 \ln m_0 + v_0$, демак,

$$v = -gt + u_0 \ln \frac{m_0}{f(t)} + v_0.$$

$v = \frac{dy}{dt}$ бўлганлигидан, охирги тенгликни ўзгарувчилари ажралган ушбу дифференциал тенглама кўринишида ёза оламиз:

$$dy = \left[-gt + u_0 \ln \frac{m_0}{f(t)} + v_0\right] dt,$$

буни интегралласак,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + u_0 \int\limits_0^t \ln \frac{m_0}{f(\tau)}\,d\tau + v_0 t + C_1.$$

$t = 0$ да кўтарилиш баландлиги $y = 0$, шунинг учун $C_1 = 0$ ва, демак,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + u_0 \int\limits_0^t \ln \frac{m_0}{f(\tau)}\,d\tau + v_0 t.$$

Агар ракета массаси $m = f(t) = m_0(1 - \alpha t)$, бунда $\alpha = \text{const}$, $\alpha > 0$, чизиқли қонунга биноан ўзгарса,

$$y = -\frac{gt^2}{2} - u_0 \int\limits_0^t \ln\,(1 - \alpha\tau)\,d\tau + v_0 t,$$

интегрални ҳисоблагандан сўнг

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{u_0}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t\right] + v_0 t$$

бўлади. Масалан, $v_0 = 0$, $u_0 = 2000$ м/с ва $\alpha = \frac{1}{100}$ с$^{-1}$ бўлса,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + 2\cdot 10^5\left[\left(1-\frac{t}{100}\right)\ln\left(1-\frac{t}{100}\right) + \frac{t}{100}\right]$$

экани келиб чиқади.

Бундай ҳолда ракета 10 с дан кейин 0,54 км баландликка, 30 с дан кейин 5,65 км га, 50 с дан кейин эса 18,4 км га кўтарилади.

Ракета массаси $m = f(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \text{const}$, $\lambda > 0$ кўрсаткичли қонунга биноан ўзгарганда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + u_0\int_0^t \ln\frac{m_0}{m_0 e^{-\lambda\tau}}\,d\tau + v_0 t = \frac{u_0\lambda - g}{2}t^2 + v_0 t,$$

$v = \frac{dy}{dt} = (u_0\lambda - g)t + v_0$ бўлганлигидан $t = t_k$, яъни бутун ёнилғи захираси ёниб тамом бўлиш пайтида

$$v = v_k = (v_0\lambda - g)\,t_k + v_0,\quad y = y_k = \frac{u_0\lambda - g}{2}t_k^2 + v_0\,t_k,$$

тезланиш эса

$$w = \frac{d^2y}{dt^2} = u_0\lambda - g = \text{const}$$

бўлади.

Демак, ракета ўзгармас тезланиш билан ҳаракат қилади. $(u_0\lambda - g) < 0$ да ҳаракат текис секинланувчан, $(u_0\lambda - g) > 0$ да текис тезланувчан, $u_0\lambda - g = 0$ да эса ҳаракат текис бўлиб, тезлиги v_0 бўлади.

$(u_0\lambda - g) < 0$ да $t = \frac{v_0}{g - u_0\lambda}$ бўлганда нуқта тезлиги нолга тенг бўлади, бу пайтда ракета максимал y_{max} баландликка кўтарилади:

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2(g - u_0\lambda)}.$$

Бутун ёнилғи ёниб тамом бўлгандан сўнг ракета ҳаракати

$$s = -\frac{gt^2}{2} + v_k t + y_k$$

қонун бўйича давом этади.

Ракетанинг $y = y_k$ баландликдан энг катта узоқлашиши S_{max} ни функциянинг $t = \frac{v_k}{g}$ стационар нуқтадаги максимуми сифатида топамиз:

$$s_{\max} = \frac{v_k^2}{2g} + y_k.$$

Ракетанинг Ер сатҳидан максимал баландликка кўтарилиши $y_{\max}$ ни

$$y_{\max} = s_{\max} + y_k = \frac{v_k^2}{2g} + 2y_k$$

формула бўйича ҳисоблаймиз.

v_k ва y_k ларни уларнинг u_0, α ва t_k орқали ифодалари билан алмаштириб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_{\max} = \frac{(u_0\lambda - g)^2 t_k^2}{2g} + (u_0\lambda - g) t_k^2 + 2v_0 t_k =$$

$$= \frac{1}{2g}(u_0^2\lambda^2 - g^2) t_k^2 + 2v_0 t_k.$$

5.5. Кўп босқичли ракета ҳаракати. Кўп босқичли ракетанинг у йўлдошни орбитага чиқариб қўйгандан кейинги v_k тезлигини аниқлаш талаб қилинсин. Бунда реактив жараённинг тезлиги ўзгармас ва унинг катталиги u_0 га, тезлик йўналишининг горизонтга нисбатан оғиш бурчаги $\theta(t)$ га, аэродинамик қаршилик $X(t)$ га тенг, деб қабул қилинади.

Агар ракетанинг вақтга боғлиқ бўлган жами массасини $G(t)$ орқали белгиласак, ракета массасининг ўзгариш тезлиги (ёнилғининг масса сарфи) $\frac{dG}{dt}$ га, реактив тортиш эса

$$P = -\frac{u_0}{g_0}\frac{dG}{dt}$$

га тенг бўлади, бунда g_0 — Ер сатҳида оғирлик кучи тезланиши (h баландликдаги тезланишни g_h орқали белгилаймиз).

Огирлик кучи ва тезлик (*атака бурчаги*) йўналишларининг бир хилда эмаслиги натижасида ракета тезлигининг камайиши жуда ҳам кичик бўлганлиги учун уни эътиборга олмаслик мумкин, натижада ракета ҳаракатининг унинг траекториясига уринмасидаги проекциясининг дифференциал тенгламасини

$$\frac{G}{g_0}\frac{dv}{dt} = P - X - \frac{G}{g_0} g_h \sin\theta$$

кўринишда ёки P ни унинг t орқали ифодаси билан алмаштириб ва тенгламанинг иккала томонини $\frac{G}{g_0}$ га бўлиб,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u_0}{G}\cdot\frac{dG}{dt} - g_0\frac{X}{G} - g_h\sin\theta \qquad (5.37)$$

кўринишда ёза оламиз.

Старт пайти $t = 0$ да ракета тезлиги $v = 0$ (бошланғич шарт), ракета йўлдошни орбитага чиқаргандан кейинги $t = t_k$ пайтида унинг тезлиги $v = v_k$. Шунинг учун t бўйича интеграллашдан сўнг изланаётган тезликнинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} u_i \ln \frac{G_{0i}}{G_{ki}} - g_0 \int_0^{t_k} \frac{X}{G}\, dt - \int_0^{t_k} g_h \sin\theta\, dt \tag{5.38}$$

бунда n — ракета босқичлари сони, u_i, G_{0i}, G_{ki} — мос равишда оқим тезлиги, ҳар қайси айрим босқич учун бошланғич ва охирги массалар.

(5.38) формулада ўнг томондаги биринчи ҳад Циолковский формуласига мос келади ва ракетанинг характеристик тезлигини, яъни ракета ташқи кучлар таъсир этмагандаги тезлигини англатади. Формуланинг ўнг томонидаги иккинчи ва учинчи ҳадлар мос равишда аэродинамик қаршилик кучларини енгишда йўқотилган тезликни билдиради.

5.6. Радиоактив емирилиш. Баъзи кимёвий элементлар атомларининг ядролари альфа-, бета- ва гамма- нурлар чиқариб бошқа элементлар ядроларига ўз-ўзидан айланиши *радиоактив емирилиш* дейилади. Радиоактив емирилиш статистик моҳиятга эга: атомлар ядроларининг ҳаммаси бирданига емирилмай, балки изотопнинг бутун мавжуд бўлиш даврида емирилади. Бунда бирлик вақт ичида емириладиган атомлар сони ҳар бир изотоп учун ўзгармас бўлиб, унинг емирилмаган атомлари миқдорининг бирор қисмини ташкил этиши аниқланган. Бу катталик (қисм) *емирилиш доимийси* дейилади ва λ ҳарфи билан белгиланади.

Шундай қилиб, dt вақт давомида емирилган dN атомлар сони $\lambda N dt$ га тенг, бу ерда N сон t вақт пайтида емирилмай қолган атомлар сонидир. Натижада ушбу дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$dN = -\lambda N\, dt. \tag{5.39}$$

Манфий ишора емирилмаган атомлар сони N вақт ўтиши билан камайишини кўрсатади.

(5.39) да ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt.$$

Буни интеграллаб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\ln N = -\lambda t + \ln C$$

ёки

$$N = Ce^{-\lambda t}.$$

Агар атомларнинг дастлабки сони N_0 ($t = 0$ да $N = N_0$) маълум бўлса, ихтиёрий ўзгармас (интеграллаш доимийси) C ни аниқлаш мумкин: $N_0 = C$ ва, демак,

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (5.40)$$

Изотоп атомлари миқдорининг ярми емирилиши учун керак бўлган T вақт шу изотопнинг *ярим емирилиш даври* дейилади. Турли изотоплар учун ярим емирилиш даври турличадир. Масалан, радий учун $T = 1590$ йил, уран учун $T = 4{,}6$ млрд. йил, радиоактив кобальт (Co^{60}) учун $T = 5{,}3$ йил, радон учун $T = 3{,}82$ сутка.

T ва λ орасида осонгина топиш мумкин бўлган богланиш бор. Вақтнинг $t = T$ пайти учун $N = \frac{N_0}{2}$, ва демак, $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$, бундан $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$ ва $T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda}$, сўнгра $\lambda = \frac{\ln 2}{T} \approx 0{,}693\ T$

Бу N ни λ орқали эмас, балки T орқали ифодалашга имкон беради, чунончи

$$N = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T}}$$

Масалан, ярим емирилиш даври $T = 1590$ йил бўлган радий учун

$$N = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{1590}} = N_0 e^{0.00044t}.$$

Бу формуладан атомнинг, айтайлик, 200 йил ичида қанча қисми емирилишини аниқлаш мумкин: $t = 200$ бўлса, 200 йилдан кейин $N|_{t=200} = N_0 e^{-0{,}088} = 0{,}915\ N_0$ атом қолишини, яъни бу вақт давомида бор бўлган атомларнинг 8,5% емирилишини кўрамиз.

Изотопнинг радиоактив емирилиш тезлиги бу изотопнинг (ёки унинг препаратининг) *активлиги* дейилади. a активлик $a = \left|\frac{dN}{dt}\right|$ га ёки (5.39) дифференциал тенглама ва унинг ечимига кўра $a = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ га тенг.

Активлик ярим емирилиш даври орқали

$$a = \frac{N \ln 2}{T} = \frac{0{,}693\ N}{T}$$

формула билан ифодаланади.

Агар $a_0 = \lambda N_0$ препаратнинг бошланғич пайтдаги активлиги бўлса, у ҳолда

$$a = a_0 e^{-\lambda t}.$$

Радиоактив модда битта атомининг ўртача яшаш даврини ҳисоблайлик. t вақт ичида сақланган ва кейинги dt вақт оралиғи ичида емирилган атомлар сони dN қуйидагига тенг:

$$-dN = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt.$$

Бу атомлар t га тенг бўлган ўртача яшаш даврига эга. Битта атомнинг ўртача яшаш даврини топиш учун dN ни t га кўпайтириб, t бўйича 0 дан ∞ гача интеграллаш ва атомларнинг бошланғич сони N_0 га бўлиш керак:

$$\nu = \frac{\int\limits_0^\infty \lambda N_0 te^{-\lambda t}\, dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}.$$

Масалан, радон ($T = 3{,}82$ сутка) учун атомнинг ўртача яшаш даври $\nu = 5{,}552$ суткага тенг.

5.7. Кимёвий реакция. Агар кимёвий реакцияда A ва B модданинг ҳар бири ўтадиган C модданинг миқдори x бўлса, у ҳолда ўзгармас температура ва бошқа баъзи шартлар бажарилганда реакция тезлиги $\frac{dx}{dt}$ қуйидагиларга пропорционал деб ҳисобланади.

1-ҳол. A модда C моддага ўтганда — A модданинг қолган миқдорига, бунда $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$ дифференциал тенглама келиб чиқади, бунда a билан A модданинг бошланғич миқдори белгиланган, k — пропорционаллик коэффициенти, $k > 0$;

2-ҳол. A ва B моддалар C моддага ўтганда тегишли массалар кўпайтмасига пропорционал бўлади, бу ҳолда

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

дифференциал тенглама келиб чиқади, бунда a ва b лар A ва B моддаларнинг бошланғич миқдори, k — пропорционаллик коэффициенти, $k > 0$.

Ҳар иккала ҳол учун x нинг t вақтга боғланишини топайлик. Тузилган дифференциал тенгламалар ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалардир. Бошланғич шартлар иккала ҳолда ҳам $t = 0$ да $x = 0$ дан иборат.

Биринчи ҳолда ўзгарувчиларни ажратгандан сўнг $\frac{dx}{x - a} = -k\, dt$ тенгламани ҳосил қиламиз, унинг умумий ечими $x = a + Ce^{-kt}$ дан иборат. Бошланғич шартдан $C = -a$ эканлигини топамиз, бинобарин, хусусий ечим $x = a(1 - e^{-kt})$ кўринишда бўлади. Бу ечимдан $t \to \infty$ да $x \to 0$ эканлиги келиб чиқади.

Иккинчи ҳолда ўзгарувчиларни ажратгандан сўнг

$$\frac{dx}{(x - a)(x - b)} = k\, dt$$

ва

$$\frac{1}{(x - a)(x - b)} = -\frac{1}{b - a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x - b}\right)$$

экғнлигини эътиборга олиб, интеграллашдан сўнг

$$\frac{1}{b - a} \ln \frac{x - a}{x - b} = -kt + \frac{1}{b - a} \ln C$$

ёки

$$\frac{x - a}{x - b} = Ce^{-k(b - a)t}$$

умумий интегрални ҳосил қиламиз. Бошланғич шартдан фойдаланиб $C = \frac{a}{b}$ эканлигини топамиз, унинг қийматини умумий ечимга қўйиб

$$\frac{x - a}{x - b} = \frac{a}{b}\, e^{-k\,(b-a)\,t}$$

ёки

$$x = ab\, \frac{1 - e^{-k\,(b-a)\,t}}{b - ae^{-k\,(b-a)\,t}}. \qquad (5.41)$$

хусусий ечимни ҳосил қиламиз.

$b > a$ бўлсин, яъни B модданинг бошланғич миқдори A модданинг бошланғич миқдоридан ортиқ бўлсин, у ҳолда бу ечимда $t \to \infty$ да $x \to a$ эканлиги келиб чиқади.

Агар $a > b$ бўлса, (5.41) тенгликни

$$\frac{x - b}{x - a} = \frac{b}{a}\, e^{-k\,(a-b)\,t}$$

кўринишда қайта ёзиб, $t \to \infty$ да $x \to b$ бўлишини кўрамиз.

Худди шу натижанинг ўзини хусусий ечимдан, уни

$$x = ab \cdot \frac{e^{-k\,(a-b)\,t} - 1}{b\, e^{-k\,(a-b)\,t} - a}$$

шаклда ёзиб олиб ҳам ҳосил қилишимиз мумкин.

5.8. Суюқликнинг идишдан оқиб чиқиши. Фараз қилайлик, кўндаланг кесим юзи S баландлик h нинг маълум $S = S(h)$ функцияси бўлган идиш H сатҳгача суюқлик билан тўлдирилган бўлсин. Идиш тубида юзи ω бўлган тешик бўлиб, ундан суюқлик оқиб чиқади. Суюқлик сатҳи дастлабки H ҳолатдан исталган h гача пасайиш вақти t ни ва идишнинг тўла бўшаш вақти T ни аниқлаймиз. Бунда идишдаги суюқлик миқдори (ҳажми) нинг ўзгариш тезлиги v идишдаги суюқлик сатҳи h нинг (босимнинг) маълум $v - v(h)$ функцияси деб фараз қиламиз.

Бирор t пайтда идишдаги суюқлик баландлиги h га тенг бўлсин. t ва $t + dt$ гача бўлган dt вақт оралиғида идишдан оқиб чиқадиган суюқлик миқдори dV ни асосининг юзи ω, баландлиги $v(h)$ бўлган цилиндр ҳажми сифатида ҳисоблаб чиқиш мумкин. Шундай қилиб,

$$dV = \omega v(h)\, dt.$$

Суюқликнинг ана шу ҳажмини бошқа усул билан ҳам ҳисоблаш мумкин. Суюқлик оқиб чиққанлиги сабабли унинг идишдаги h сатҳи dh катталикка пасаяди, демак, $dV = -S(h)\, dh$ ($dh < 0$ бўлгани учун манфий ишора олинди). dV учун иккала ифодани бир-бирига тенглаб, қуйидаги дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\omega v(h)\, dt = -\, S(h)\, dh. \qquad (5.42)$$

Ўзгарувчиларни ажратиб,

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega v(h)}\,dh$$

эканини топамиз, бундан:

$$t = -\frac{1}{\omega}\int_H^h \frac{S(h)}{v(h)}\,dh = \frac{1}{\omega}\int_h^H \frac{S(h)}{v(h)}\,dh.$$

Идиш тамоман бўшаганда $h = 0$, шу сабабли унинг тўла бўшаш вақти

$$T = \frac{1}{\omega}\int_0^H \frac{S(h)}{v(h)}\,dh$$

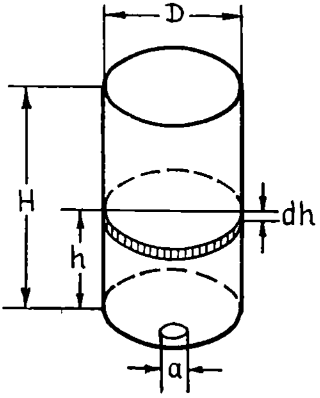
формулага асосан топилади.

Агар суюқлик кичик тешикдан ёки қисқа найчадан оқиб чиқаётган бўлса, у ҳолда Торичелли қонунига мувофиқ $v = \mu\sqrt{2gh}$, бунда g — оғирлик кучи тезланиши, μ — эмпирик коэффициент (сарф бўлиш коэффициенти). Бу ҳолда ҳосил қилинган формулалар қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

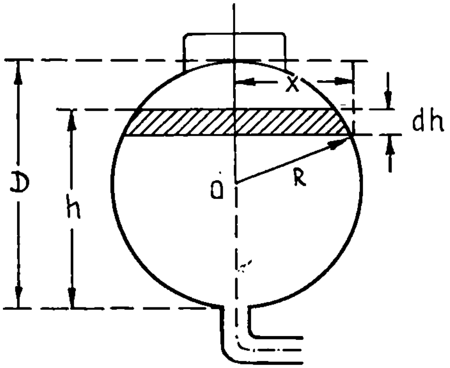
$$t = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh, \quad T = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh. \tag{5.43}$$

Бу формулаларни татбиқ қилишга доир бир нечта масалаларни қараб чиқайлик.

1-масала. **Суюқликнинг вертикал доиравий цилиндрик идишдан оқиб чиқиши.** Диаметри D, баландлиги H бўлган вертикал ўқли доиравий цилиндрик идиш сув билан тўлдирилган. Идиш тубидаги a диаметрли доиравий тешик орқали идишнинг тўла бўшаш вақтини аниқланг (4-шакл).



4- шакл



5- шакл

Ечиш. Бу ҳолда кўндаланг кесим юзи $S(h)$ ўзгармас ва $\frac{\pi D^2}{4}$ га тенг. Худди шунга ўхшаш, тешик юзи $\frac{\pi a^2}{4}$ га тенг. Демак,

$$T = \frac{D^2}{a^2\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2D^2\sqrt{H}}{a^2\mu\sqrt{2g}}.$$

Масалан, $D = 1,0$ м, $H = 1,5$ м, $a = 0,05$ м бўлганда ва сарф бўлиш коэффициенти $\mu = 0,62$ (сув учун) деб олинса,

$$T = \frac{2\cdot(1,0)^2\sqrt{1,5}}{(0,05)^2\cdot 0,62\cdot\sqrt{19,62}} = 356 \text{ с} = 5 \text{ мин } 56 \text{ с}$$

ни ҳосил қиламиз.

2-масала. **Керосиннинг цистерна остидаги жўмрак орқали оқиб чиқиши.** Узунлиги L ва диаметри D бўлган темир йўл цистернаси керосин билан тўлдирилган. Керосин цистерна остида жойлашган ва кесим юзи ω бўлган қисқа чиқиш найчаси (жўмраги) орқали оқизиб юборилганда, цистерна қанча вақтда бўшашини аниқланг (5-шакл).

Ечиш. Нефть маҳсулоти сатҳининг юзи $S(h)$ ўзгарувчан катталик бўлиб,

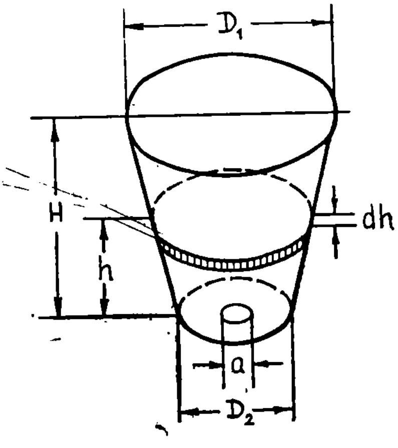
$$S(h) = 2xL = 2L\sqrt{R^2-(h-R)^2} = 2L\sqrt{(D-h)h}$$

формула орқали аниқланади, шу сабабли

$$T = \frac{2L}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_0^D \frac{\sqrt{(D-h)h}}{\sqrt{h}}\,dh = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\omega\mu\sqrt{2g}}.$$

Масалан, $L = 12$ м, $D = 2,6$ м, $\omega = 0,01$ м^2 ва сарф бўлиш коэффициенти $\mu = 0,6$ (керосин) бўлса,

$$T = \frac{4\cdot 12\cdot 2,6\sqrt{2,6}}{3\cdot 0,01\cdot 0,6\cdot\sqrt{19,62}} = 2520 \text{ с} = 42 \text{ мин}.$$



6- шакл

3-масала. **Сувнинг коник резервуар тубидан оқиб чиқиши.** Устки (катта) асосининг диаметри D_1 пастки асосининг диаметри D_2, баландлиги H бўлган коник резервуар сув билан тўлдирилган. Сув резервуар тубидаги a диаметрли тешик орқали оқизиб юборилганда унинг қанча вақтда бўшашини аниқланг (6-шакл).

Ечиш. Конуснинг горизонтал кесим юзи:

$$S(h) = \frac{\pi}{4}\left[D_2 + (D_1 - D_2)\frac{h}{H}\right]^2$$

шу сабабли

$$T = \frac{1}{a^2\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{1}{\sqrt{h}} \left[D_2 + (D_1 - D_2)\frac{h}{H}\right]^2 dh =$$

$$= \frac{2\sqrt{H}}{15a^2\mu\sqrt{2g}} (3D_1^2 + 4D_1D_2 + 8D_2^2).$$

Масалан, $D_1 = 0{,}8$ м, $D_2 = 0{,}3$ м, $H = 1$ м, $a = 0{,}03$ м ва $\mu = 0{,}62$ (сув) бўлганда

$$T = \frac{2\cdot[3\cdot(0{,}8)^2 + 4\cdot(0{,}8)(0{,}3) + 8\cdot(0{,}3)^2}{15\cdot(0{,}03)^2\cdot 0{,}62\sqrt{19{,}62}} = 194\text{с.} = 3\text{ мин}14\text{с.}$$

Агар суюқлик оқиб чиқадиган тешик юзи вақтга боғлиқ, яъни $\omega = \omega(t)$ бўлса, у ҳолда (5.42) дифференциал тенглама ўзгарувчиларни ажратгандан сўнг

$$\omega(t)\,dt = -\frac{S(h)}{v(h)}\,dh \qquad (5.44)$$

кўринишни олади, бунинг интеграли қуйидагича бўлади:

$$\int_0^t \omega(t)dt = -\int_H^h \frac{S(h)}{v(h)}\cdot dh. \qquad (5.45)$$

4-масала. **Сувнинг вертикал ўқли цилиндрик идиш тубидаги диафрагмадан оқиб чиқиши.** Сув билан тўлдирилган вертикал ўқли цилиндрик идиш тубида диафрагма билан беркитилган (фотоаппарат объективидаги каби) ω_0 (см^2) юзли кичик тешик бор. Бошланғич пайтда диафрагма очила бошлайди, бунда ҳосил бўлган тешик юзи ω (см^2) вақтга пропорционал, яъни $\omega = kt$. Диафрагма τ с дан сўнг тўла очилади. Диафрагма тўла очилганда идишдаги сув баландлиги h_1 ни аниқланг. Цилиндрнинг баландлиги H (см), асос юзи S (см^2).

Ечиш. Шартга кўра, $t = \tau$ да $\omega = \omega_0$, демак, $\omega_0 = k\tau$, бундан $k = \frac{\omega_0}{\tau}$ ва шунинг учун $\omega = \frac{\omega_0 t}{\tau}$.

ω нинг қийматини (5.45) интегралга қўйиб, топамиз:

$$\frac{\omega_0}{\tau}\int_0^t t\,dt = -\frac{S}{\mu\sqrt{2g}}\int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}},$$

бундан

$$\frac{\omega_0}{2\tau}t^2 = \frac{2S}{\mu\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H}-\sqrt{h}\right).$$

$t = \tau$ да сув сатҳи баландлиги $h = h_1$. Шунинг учун

$$\frac{\omega_0\tau\mu\sqrt{2g}}{4S} = \sqrt{H} - \sqrt{h_1},$$

$$h_1 = \left(\sqrt{H} - \frac{\omega_0\tau\mu\sqrt{2g}}{4\,S}\right)^2 \text{ (см).}$$

Айтайлик, идишдан суюқлик оқиб чиқиб кетиши билан бир пайтда вақт бирлигида q миқдорда (ҳажм бирлигида) доимий равишда суюқлик идишга келиб турсин. У ҳолда dt вақт давомида идишдаги суюқликнинг умумий камайиши dV чиқиб кетувчи суюқлик миқдори $\omega v(h)dt$ ва келиб қуюлувчи суюқлик миқдори qdt нинг айирмасига тенг, яъни:

$$dV = [\omega v(h) - q]dt.$$

Шу сабабли, дифференциал тенглама

$$[\omega v(h) - q]\, dt = - S(h)dh \tag{5.46}$$

кўринишга келади.

Суюқлик сатҳининг H дан h гача пасайиш вақти t тенгламанинг интеграли орқали

$$t = \int_h^H \frac{S(h)}{\omega v(h) - q}\, dh \tag{5.47}$$

кўринишда ифодаланади.

Агар қуйиладиган сув миқдори q ни оқиб кетадиган сувнинг ўзгармас H^* босими орқали ифодаласак: $q = \mu\omega\sqrt{2gH^*}$, у ҳолда

$$t = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h} - \sqrt{H^*}}\, dh \tag{5.48}$$

бўлади.

Призматик (ёки цилиндрик) резервуар учун $[S(h) = S_0 = \text{const}]$

$$t = \frac{2S_0}{\omega\mu\cdot\sqrt{2g}} \left(\sqrt{H^*}\ \ln\frac{\sqrt{H} - \sqrt{H^*}}{\sqrt{h} - \sqrt{H^*}} + \sqrt{H} - \sqrt{h}\right) \tag{5.49}$$

Қовушоқлиги катта бўлган суюқлик чиқиш найи орқали оқиб чиқаётганда ламинар оқим кузатилиши мумкин, бунда оқиб чиқиш тезлиги босимга пропорционал, яъни $v = kh$ бўлади. Ингичка узун найча орқали суюқлик оқиши ҳам ана шундай қонун бўйича содир бўлади, v нинг бу қийматини (5.42) га қўйиб, дифференциал тенглама

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega kh}\, dh \tag{5.50}$$

кўринишни, интеграли эса

$$t = \frac{1}{\omega k} \int_h^H \frac{S(h)}{h}\, dh$$

кўринишни олишини кўрамиз. Хусусан, $S(h) = S_0 = \text{const}$ бўлган призматик (ёки цилиндрик) идиш учун

$$t = \frac{S_0}{\omega k} \cdot \ln\frac{H}{h}$$

бўлади.

5.9. Жисмнинг совиши ҳақидаги масала. Массаси m, иссиқлик сиғими c ўзгармас бўлган жисм бошланғич пайтда T_0 температурага эга бўлсин. Атроф муҳит температураси ўзгармас ва T ($T_0 > T_м$) га тенг. Жисмнинг чексиз кичик dt вақт ичида берган иссиқлиги жисм ва унинг атрофидаги муҳит температуралари орасидаги фарққа, шунингдек, вақтга пропорционал эканлигини (Ньютон қонуни) эътиборга олган ҳолда жисмнинг совиш қонунини топиш талаб қилинсин.

Совиш давомида жисм температураси T_0 дан $T_м$ гача пасаяди. Вақтнинг t пайтида жисм температураси T га тенг бўлсин. Чексиз кичик dt вақт оралиғида жисм берган иссиқлик миқдори юқорида айтилганига кўра

$$dQ = -\alpha (T - T_м)\, dt$$

га тенг, бунда $\alpha = \text{const}$ — пропорционаллик коэффициенти.

Иккинчи томондан, жисм T температурадан $T_м$ температурагача совиганда берадиган иссиқлик миқдори $Q = mc(T - T_м)$ га тенг, демак, $dQ = mcdT$ Энди dQ учун топилган ҳар иккала ифодани таққослаб

$$mcdT = -\alpha (T - T_м)\, dt \qquad (5.51)$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Ўзгарувчиларни ажратиб

$$\frac{dT}{T - T_м} = -\frac{\alpha}{mc}\, dt,$$

интегралласак,

$$\ln(T - T_м) = -\frac{\alpha}{mc}\, t + \ln C \quad \text{ёки} \quad T - T_м = Ce^{-\frac{\alpha t}{mc}}$$

экани келиб чиқади.

$t = 0$ да $T = T_0$ бошланғич шартдан фойдаланиб $C = T_0 - T_м$ эканлигини топамиз, шунинг учун жисмнинг совиш қонуни (хусусий ечим)

$$T = T_м + (T_0 - T_м)\, e^{-\frac{\alpha t}{mc}} \qquad (5.52)$$

кўринишда бўлади.

α коэффициент ё бевосита берилиши ёки қўшимча шарт, масалан, $t = t_1$ да $T = T_1$ орқали берилиши керак

Бундай ҳолда

$$T_1 - T_м = (T_0 - T_м)\, e^{-\frac{\alpha t_1}{mc}}$$

бўлади, бундан

$$e^{-\frac{\alpha}{mc}} = \left(\frac{T_1 - T_м}{T_0 - T_м}\right)^{\frac{1}{t_1}}$$

Демак,

$$T = T_{\text{м}} + (T_0 - T_{\text{м}}) \left(\frac{T_1 - T_{\text{м}}}{T_0 - T_{\text{м}}}\right)^{\frac{t}{t_1}}.$$

Агар муҳит температураси $T_{\text{м}} = 20°\text{C}$ бўлса ва $t_1 = 10$ мин ичида жисм $T_0 = 100°\text{C}$ дан $T_1 = 60°\text{C}$ гача совиса, у ҳолда

$$T = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

бўлади.

Агар жисм температураси қанча вақт ичида 25°С гача пасайишини топиш керак бўлса, формулада $T = 25$ деб олиб, $25 = 20 + 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$ ни ёки $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ ни ҳосил қиламиз, бундан $t = 40$ мин.

5.10. Қуйманинг қизиши ҳақидаги масала. Температураси T_a бўлган пўлат қуймани прокатка қилишдан аввал температураси бир соат ичида T_a дан T_b гача бир текис ортадиган печь ичига жойланади. Агар печь ва қуйманинг температуралар фарқи T_0 бўлганда қуйма $k \cdot T_0$ град/мин тезлик билан қизиса, унинг қизиш қонунини аниқлаш талаб қилинади.

Печнинг вақтнинг t пайтидаги температурасини $\overline{T}$ орқали белгилаймиз. У ҳолда қуйманинг T температураси $T = \overline{T} - T_0$ фарққа тенг бўлади. Масала шартидаги печь температурасининг ўзгариш қонуни $\overline{T} = At + B$ ни топамиз, бунда A ва B доимийлар $\overline{T}\big|_{t=0} = T_a$, $T\big|_{t=60} = T_b$ шартлардан аниқланади, улар мос равишда $A = \frac{T_b - T_a}{60}$ ва $B = T_a$ га тенг.

Масаланинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{dT}{dt} = kT_0$$

кўринишда бўлади, сўнгра

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{T} - T_0) = \frac{d}{dt}(At + B - T_0) = A - \frac{dT_0}{dt}$$

бўлгани учун юқоридаги тенглама

$$A - \frac{dT_0}{dt} = kT_0 \text{ ёки } \frac{dT_0}{dt} + kT_0 - A = 0$$

кўринишни олади. Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб, умумий интегрални топамиз:

$$\frac{1}{k} \ln (kT_0 - A) + t = \frac{1}{k} \ln C \text{ ёки } kT_0 - A = Ce^{-kt}$$

$T_0\big|_{t=0} = 0$ бошланғич шартдан $C = -A$ ни аниқлаймиз, демак,

$$T_0 = \frac{A}{k} \left(-e^{-kt}\right).$$

$T_0 = \overline{T} - T = At + B - T$ алмаштиришни бажарсак,

$$T = At + B - \frac{A}{k} \left(1 - e^{-kt}\right)$$

ёки

$$T = T_a - \frac{T_b - T_a}{60\,k} \left(1 - e^{-kt} - kt\right)$$

ни ҳосил қиламиз.

Қуйманинг $t = 60$ мин дан кейинги температураси

$$T\Big|_{t=60} = T_a - \frac{T_b - T_a}{60k} \left(1 - e^{-60k} - 60k\right) =$$

$$= T_b - \frac{T_b - T_a}{60k} \left(1 - e^{-60k}\right)$$

бўлади.

5.11. Ёруғликнинг сув орқали ўтишида ютилиши. Ёруғлик оқимининг юпқа сув қатлами томонидан ютилиши қатлам қалинлиги ва қатлам сиртига тушаётган оқимга пропорционалдир. 2 м ли қатламдан ўтишда дастлабки ёруғлик оқимининг $\frac{1}{3}$ қисми ютилишини билган ҳолда унинг неча проценти 12 м чуқурликка етиб боришини аниқлаш ҳақидаги масалани кўриб чиқайлик.

h чуқурликдаги сиртга тушаётган ёруғлик оқимини Q орқали белгилаймиз. Қалинлиги dh бўлган сув қатламидаи ўтишда ютилган ёруғлик оқими dQ

$$dQ = -kQdh \tag{5.53}$$

га тенг, бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти, $k > 0$.

Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечими $Q = Ce^{-kh}$ бўлади. Дастлабки ёруғлик оқими Q_0 га тенг бўлсин. У ҳолда $h = 0$ да $Q = Q_0$ бўлган бошланғич шартдан $C = Q_0$ ни топамиз, шу сабабли $Q = Q_0e^{-kh}$ бўлади. Масала шартига кўра $h = 2$м да $Q = \frac{2Q_0}{3}$, шунинг учун $\frac{2}{3} Q = Q_0 (e^{-k})^2$, бундан $e^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ва $Q = Q_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{h}{2}}$

$h = 12$м чуқурликка $Q_1 = Q_0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0{,}0878\, Q_0$ га тенг бўлган Q_1 ёруғлик оқими етиб боради, бу дастлабки ёруғлик оқими Q_0 нинг 8,78% ни ташкил қилади.

5.12. Газнинг ионланиши. Ўзгармас (доимий) нурланиш таъсирида газли муҳитда ионланиш жараёни рўй беради, унда бир секунд ичида берилган ҳажмдаги газда q та мусбат ва шунча манфий ион ҳосил бўлади. Мусбат ва манфий ионлар яна ўзаро бирлашганликлари (ионларнинг *рекомбинацияси*) учун уларнинг миқдори камая боради.

n та мусбат ионнинг умумий миқдоридан ҳар секундда уларнинг миқдори квадратига пропорционал бўлган қисми бирлашишини назарда тутиб, ионлар миқдори n нинг t га боғлиқлик қонунини топиш масаласини кўриб чиқайлик (пропорционаллик коэффициенти $\alpha = \text{const}$ газнинг табиати ва ҳолатига боғлиқ).

Ионланиш жараёнининг

$$dn = q\,dt - \alpha n^2 dt \tag{5.54}$$

дифференциал тенгламаси бевосита масала шартидан чиқарилади.

(5.54) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{dn}{n^2 - \frac{q}{\alpha}} + dt = 0,$$

унинг умумий интеграли

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha q}} \ln \frac{n - \sqrt{\frac{q}{\alpha}}}{n + \sqrt{\frac{q}{\alpha}}} + t = \frac{1}{2\sqrt{\alpha q}} \ln C$$

ни топамиз, бундан

$$\frac{n - \sqrt{\frac{q}{\alpha}}}{n + \sqrt{\frac{q}{\alpha}}} = Ce^{-2\sqrt{\alpha q}\,t}$$

ёки

$$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \cdot \frac{e^{\sqrt{\alpha q}t} + Ce^{-\sqrt{\alpha q}\,t}}{e^{\sqrt{\alpha q}\,t} - Ce^{-\sqrt{\alpha q}t}}.$$

$t - 0$ да $n = 0$ бўлганлигидан $C = -1$ ва ионлар сонининг вақтга боғланишини аниқловчи хусусий

$$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}\ \text{th}(\sqrt{\alpha q}t)$$

ечимни топамиз.

5.13. Цехни вентиляциялаш. Сиғими 10800 м^3 бўлган цехдаги ҳавода 0,12 % карбонат ангидрид гази бор. Вентиляторлар таркибида 0,04 % карбонат ангидрид бўлган тоза ҳавони a м^3/мин миқдорда бериб туради. Карбонат ангидриднинг концентрацияси цехнинг ҳамма қисмида вақтнинг ҳар қайси пайтида бир хил деб ҳисоблаб (тоза ҳавонинг ифлосланган ҳаво билан қўшилиши жуда тез бўлади), 10 мин дан сўнг карбонат ангидрид 0,06 % дан ошмаслиги учун вентиляторларнинг қуввати қандай бўлишини топиш талаб қилинади.

Вақтнинг t пайтида ҳаводаги карбонат ангидрид миқдорини x (%) орқали белгилаймиз. t пайтдан бошлаб ўтган dt вақт оралиғи учун цехдаги карбонат ангидрид балансини тузамиз. Шу вақт ичида вентиляторлар $0{,}0004\,a\,dt$ м³ карбонат ангидрид олиб кирган бўлса, цехда $0{,}01\,xa\,dt$ м³ карбонат ангидрид чиқиб кетади. Бинобарин, dt мин ичида ҳаводаги карбонат ангидрид $dq = (0{,}01x - 0{,}0004)\cdot a\,dt$ м³ камайди. Ҳаводаги карбонат ангидрид миқдорининг процентларда камайишини dx орқали белгиласак, бу миқдорни бошқа йўл билан

$$dq = -10800\cdot 0{,}01dx \text{ м}^3$$

формула бўйича ҳисоблаш мумкин (манфий ишора $dx < 0$ бўлгани учун олинди). dq учун топилган иккала ифодани тенглаб,

$$(0{,}01x - 0{,}0004)\,a\,dt = -10800\cdot 0{,}01\cdot dx \tag{5.55}$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Ўзгарувчиларни ажратиб:

$$-\frac{a\cdot dt}{10800} = \frac{dx}{x - 0{,}04},$$

умумий интегрални топамиз:

$$x - 0{,}04 = Ce^{-\frac{dt}{10800}}$$

$t = 0$ да $x = 0{,}12$ бўлгани учун $C = 0{,}08$ ва хусусий ечим

$$x - 0{,}04 = 0{,}08\cdot e^{-\frac{dt}{10800}} \tag{5.56}$$

кўринишда бўлади.

Вентиляторларнинг қуввати a ни аниқлаш учун $x = 0{,}06$ ва $t = 10$ деймиз. У ҳолда

$$0{,}02 = 0{,}08\cdot e^{-\frac{a}{1080}},$$

бундан $e^{-\frac{a}{1080}} = \frac{1}{4}$ ва $a = 1080 \ln 4 \approx 1500$ м³/мин.

5.14. Газни тозалаш. Бирор газли аралашмадан газни тозалаш учун уни *скруббер* (у ёки бу ютувчи модда бўлган идиш) орқали ўтказилади. Ютқичнинг (аппаратнинг маълум тайин режимида) юпқа қатлами ютадиган газсимон аралашма миқдори аралашма концентрациясига, шунингдек, қатламнинг кўндаланг кесими қалинлиги ва юзига пропорционалдир. Скруббер асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган конус шаклига эга. Газ конус учидан киради. Агар келаётган газда аралашма концентрацияси $a\%$, чиқиб кетаётган газда эса $b\%$ бўлса, скруббердаги газли аралашма концентрациясини қатламдан конус учигача бўлган масофанинг функцияси сифатида аниқлаш талаб қилинади.

Аралашма концентрациясини $q\%$ орқали, қатламдан конус учигача бўлган масофани h орқали белгилаб

$$dq = kq\pi r^2 dh$$

дифференциал тенгламани тузамиз, бунда r — конуснинг юпқа қатлами кесимининг радиуси, у конус ўлчамлари билан $r = \frac{Rh}{H}$ муносабат орқали боғланган, демак,

$$dq = kq\pi \frac{R^2}{H^2}\cdot h^2 dh.$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$q = Ce^{\frac{k\pi R^2 h^3}{3H^2}}$$

кўринишда бўлади. $h = 0$ да $q = a$, шунинг учун $C = a$, демак,

$$q = ae^{\frac{k\pi R^2 h^3}{3H^2}}$$

$h = H$ бўлганда $q = b$ шартдан k коэффициентни аииқласак кифоя. Қуйидагига эгамиз:

$$b = a\cdot e^{\frac{k\pi R^2 H^3}{3H^2}},$$

бундан k ни эмас, балки k қатнашган ифодани аниқлаш қулайроқ

$$e^{\frac{k\pi R^2}{3H^2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{H^3}}$$

Узил-кесил қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$q = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{h^3}{H^3}}$$

Агар скруббер R радиусли шар шаклида бўлса, $dq = kq\pi r^2 dh$, бунда r — шарнинг юпқа қатлами кесимининг радиуси, у шар радиуси R ва шарнинг қуйи нуқтасидан қатламгача бўлган масофа h билан $r^2 = R^2 - (h - R)^2$ муносабат орқали боғланган. У ҳолда

$$dq = kq\pi\,[R^2 - (h - R)^2]dh,$$

бу тенгламанинг умумий интеграли

$$\ln\frac{q}{C} = k\pi\left[R^2h - \frac{(h-R)^3}{3}\right]$$

бўлади.

C ва k ни аниқлаш учун $q|_{h=0} = a$, $q|_{h=2R} = b$ шартлардан фойдаланамиз:

$$\ln\frac{a}{C} = \frac{k\pi R^3}{3},\quad \ln\frac{в}{C} = k\pi\left(2R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{5k\pi R^3}{3}.$$

Қуйидаги

$$\ln\frac{b}{C} - \ln\frac{a}{C} = \ln\frac{b}{a} = \frac{4k\pi R^3}{3}$$

айирмадан $k\pi = \frac{3}{4R^3}\ln\frac{b}{a}$ ни топамиз. Шунга ўхшаш

$$\ln\frac{q}{C} - \ln\frac{a}{C} = \ln\frac{q}{a} = k\pi\left[R^2h - \frac{(h-R)^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right] = k\pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$$

айирмани олайлик, бунга $k\pi$ нинг ифодасини қўйиб, тенгламанинг хусусий интегралини

$$\ln\frac{q}{a} = \frac{h^2(3R-h)}{4R^3}$$

кўринишда ҳосил қиламиз.

5.15. Илмий ахборот оқими ҳақидаги масала. Фанда ахборотлар оқими, яъни илмий нашрлар сонининг ўсишини текширишда нашрларнинг $\frac{dy}{dt}$ ўсиш тезлиги нашрлар сонида эришилган y даражага пропорционал деган келишувга асосланилади, яъни ўсишнинг нисбий тезлиги $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}$ ўзгармайди. Нашрлар сонининг эришилган даражасини вақтга боғлиқ ҳолда аниқлайдиган қонун

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = k \text{ ёки } \frac{dy}{dt} = ky, \quad (k>0)$$

дифференциал тенгламадан топилади, бунда k — у ёки бу фан соҳасида нашрга билдирилган фикрларни (ўртача) баҳоловчи ўзгармас.

Бу дифференциал тенгламанинг ечими

$$y = ae^{kt}$$

экспонента кўринишига эга, бу ерда a — фан ривожланишининг маълум бир бошланғич даражасини баҳоловчи ўзгармас катталик.

Ташқи шароитлар кескин ўзгарганда, тутиб турувчи факторлар туфайли ўсишнинг экспоненциал қонуни сақланмайди. Даражанинг ўсиши унинг бирорта қиймати билан чекланади ва нашрлар сонининг ўсиш механизми

$$\frac{dy}{dt} = ky(b-y); \quad (k>0,\ 0<y<b)$$

дифференциал тенглама билан тасвирланади, бунда b катталик y нинг мумкин бўлган максимал қийматини билдиради. Ўсишнинг

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = k(b-y)$$

нисбий тезлиги энди ўзгармас бўлмайди, балки y нинг чизиқли функцияси бўлади.

Бу дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратамиз ва уни интеграллаб топамиз:

$$\frac{dy}{y(b-y)} = kdt, \int \frac{dy}{y(b-y)} = kt + C.$$

Маълумки,

$$\int \frac{dy}{y(b-y)} = \frac{1}{b} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right) dy = \frac{1}{b} \ln \frac{y}{b-y}.$$

Тенглама ечими

$$\frac{1}{b} \ln \frac{y}{b-y} + \frac{1}{b} \ln a = kt$$

кўринишда бўлади, бунда $C = -\frac{1}{b} \ln a$ деб олинган.

Ҳосил қилинган ечимни потенцирлаб,

$$\frac{ay}{b-y} = e^{bkt}, \quad ay = (b-y)\, e^{bkt}.$$

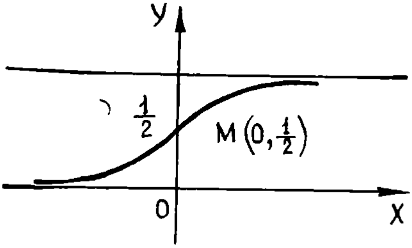
$$y(a + e^{bkt}) = be^{bkt}, \quad y = \frac{be^{bkt}}{a + e^{bkt}},$$

ва, ниҳоят,

$$y = \frac{b}{1 + ae^{-bkt}}$$

ни аниқлаймиз.

Бу тенглама билан аниқланадиган эгри чизиқ *логистик эгри чизиқ* дейилади. Вақтнинг бошланғич пайтларида y нинг қийматлари b дан анча кичик бўлганда бу эгри чизиқ $y = be^{bkt}$ экспонента билан деярли устма-уст тушади, $y = b$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлар логистик эгри чизиқнинг асимтоталари бўлади. $M\left(\frac{\ln a}{bk}; \frac{b}{2}\right)$ нуқта *букилиш нуқтасидир* (7-шаклга қаранг, унда $a = b - 1$ деб қабул қилинган).



7- шакл

5.16. Подшипниклардаги ишқаланиш коэффициентини аниқлаш. Подшипниклардаги ишқаланиш коэффициентини аниқлаш масаласини кўрайлик. Учларига оғир A ва B шкивлар ўрнатилган қисқа вал подшипникка ўрнатилган (8-шакл). Валга етарлича катта бурчак тезлик берилади ва кейин у ўз ҳолига қўйилади. Подшипникдаги ишқаланиш оқибатида валнинг айланиши секин-аста секинлашади.

Валга қўйилган ташқи кучлар унинг оғирлиги $\vec{P}$, подшипникнинг нормал реакцияси $\vec{N}$ ва ишқаланиш кучи $\vec{F}$ дан иборат бўлади. $\vec{P}$ ва $\vec{N}$ кучларнинг валнинг айланиш ўқига нисбатан моментлари нолга тенг, ишқаланиш кучи $\vec{F}$ нинг моменти эса $-\vec{F}r$ га тенг, бу ерда r — шипнинг радиуси.

Валнинг (A ва B шкивлар билан биргаликдаги) айланиш ўқига нисбатан инерция моментини I орқали белгилаб, ушбу айланиш дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

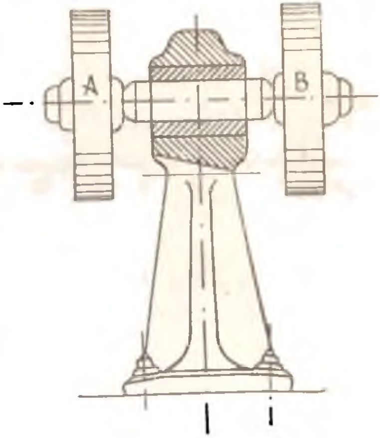
$$I\frac{d\omega}{dt} = -Fr.$$

Бу ерда $F = fP$ (f — изланаётган ишқаланиш коэффициенти) ва

$$I = \frac{P}{g} r_u^2$$

(бу ерда r_u — валнинг айланиш ўқига нисбатан инерция радиуси) деб олиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{P}{g} r_u^2 \frac{d\omega}{dt} = -fPr \text{ ёки } \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fgr}{r_u^2}.$$



8- шакл

Агар f ишқаланиш коэффициентини ўзгармас катталик деб ҳисобласак, бу тенгламани интеграллаш ҳеч бир қийинчилик туғдирмайди. Тенгламани интеграллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\omega = -\frac{fgr}{r_u^2} t + C$$

бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас. C ўзгармасни бошланғич шартлар бўйича аниқлаймиз. Валга бериладиган бошланғич бурчак тезликни ω_0 орқали белгилаймиз. Бу ҳолда $t = 0$ да $\omega = \omega_0$ га эга бўламиз. Ҳозиргина ҳосил қилинган тенгламада $t = t_0$ ва $\omega = \omega_0$ деб олиб, $C = \omega_0$ ни топамиз, ва демак, узил-кесил

$$\omega = \omega_0 - \frac{fgr}{r_u^2} t.$$

Айтайлик, вал унга бошланғич ω_0 бурчак тезлик берилганидан Tс кейин тўхтаган бўлсин. $t = T$ ва $\omega = 0$ ни сўнгги тенгламага қўйиб,

$$f = \frac{\omega_0 r_u^2}{grT}$$

ни ҳосил қиламиз.

6- §. Бир жинсли дифференциал тенгламалар

Энг аввал бир жинсли функцияга таъриф берамиз.

1-таъриф. Агар $f(x, y)$ функцияда x ва y ўзгарувчиларни мос равишда tx ва ty га алмаштирганда (бу ерда t — ихтиёрий параметр)

$$f(xt,\ yt) = t^n f(x,\ y)$$

шарт бажарилса, $f(x, y)$ функция n ўлчовли *бир жинсли функция* деб аталади.

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функция бир ўлчовли бир жинсли функциядир, чунки

$$f(tx, ty) = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = t\sqrt{x^2 + y^2} = tf(x, y).$$

Ушбу $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ функция ноль ўлчовли бир жинсли функция, чунки

$$f(tx, ty) = \frac{tx - ty}{tx + ty} = \frac{x-y}{x+y},$$

яъни

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

ёки

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y).$$

$f(tx, ty) = f(x, y)$ шартга бўйсунадиган ноль ўлчовли бир жинсли функция $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ кўринишда ёзилиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, t параметрни ихтиёрий танлаб олиш мумкин бўлгани учун $t = \frac{1}{x}$ деб оламиз. У ҳолда

$$f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Биз қуйида ноль ўлчовли бир жинсли функция билан иш кўрамиз

2-таъриф. Агар биринчи тартибли $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг ўнг томони x ва y га нисбатан ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлса, бундай тенглама *бир жинсли тенглама* дейилади.

Шундай қилиб, бир жинсли тенгламани

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.1}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бир жинсли (6.1) тенгламани $\frac{y}{x} = u(x)$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш мумкин, у ҳолда $y = u \cdot x$, бу ерда u — янги изланаётган функция. Кейинги тенгликни дифференциаллаб, $y' = u'x + u$ ни ҳосил қиламиз. y ва y' нинг қийматларини (6.1) тенгламага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$u'x = \varphi(u) - u$$

ёки

$$xdu = (\varphi(u) - u)dx$$

Ўзгарувчиларни ажратиб, интеграллаймиз:

$$\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Сўнгра u ўрнига $\frac{y}{x}$ нисбатни қўйиб, (6.1) тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Ушбу

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{6.2}$$

тенгламада $M(x; y)$, $N(x, y)$ лар бир хил ўлчовли бир жинсли функциялар бўлгандагина (6.2) тенглама бир жинсли тенглама бўлади. Бу — иккита бир хил ўлчовли бир жинсли функцияларнинг нисбати ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлишидан келиб чиқади.

(6.2) кўринишдаги тенгламани ечиш учун уни дастлаб (6.1) кўринишга келтириш керак:

$$y' = \frac{-M(x.\ y)}{N(x,\ y)}.$$

Масалан, $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2y\ xdx = 0$ тенглама бир жинслидир, чунки $y^2 - 3x^2$ ва $2xy$ функциялар икки ўлчовли бир жинслидир.

1-мисол. Ушбу

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламани ушбу $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$ кўринишга келтирамиз. Унинг ўнг томони ноль ўлчовли бир жинсли функциядан иборат.

$\frac{y}{x} = u$ алмаштиришни бажарамиз, у ҳолда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Буларни тенгламага қўйиб

$$u'x + u = u + \sqrt{1 - u^2},\ u'x = \sqrt{1 - u^2}$$

ўзгарувчилари ажраладиган

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган тенгламани интеграллаймиз:

$$\arcsin u = \ln x + \ln C.$$

Бу ердан $u = \sin(\ln C x)$. Энди $u = \frac{y}{x}$ ни ўрнига қўйсак,

$$\frac{y}{x} = \sin(\ln C x)$$

ёки

$$y = x \sin(\ln C x)$$

ифода ҳосил бўлади.

3-таъриф. (6.2) тенгламада α даража кўрсаткични $y=z^{\alpha}$ ўрнига қўйиш орқали берилган тенгламани x ва z га нисбатан бир жинсли тенгламага айлантирадиган қилиб танлаш мумкин бўлса, берилган (6.2) тенглама *умумлашган бир жинсли тенглама* дейилади.

2-мисол. Ушбу

$$(x-2y^3)\,dx+3y^2(2x-y^3)\,dy=0$$

тенгламанинг умумлашган бир жинсли тенглама эканлигини текширинг ва уни интегралланг.

Ечиш. $y=z^{\alpha}$ деб олайлик. У ҳолда :

$$dy=\alpha z^{\alpha-1}dz$$

ва тенглама ушбу кўринишга келади:

$$(x-2z^{3\alpha})\,dx+3\alpha z^{3\alpha-1}(2x-z^{3\alpha})\,dz=0.$$

dx олдидаги кўпайтувчи бир жинсли функция бўлиши учун (шу билан бирга биринчи даражали бўлиши учун, чунки биринчи қўшилувчи биринчи даражали) $3\alpha=1$ бўлиши керак, бунда $\alpha=\frac{1}{3}$. dz олдидаги кўпайтувчи ҳам биринчи даражали бир жинсли функция бўлиш-бўлмаслигини текширамиз. Агар $\alpha=\frac{1}{3}$ бўлса, жавоб ижобий бўлади. Демак, $y=z^{\frac{1}{3}}$ ўрнига қўйиш берилган тенгламани қуйидаги бир жинсли кўринишга келтиради:

$$(x-2z)\,dx+(2x-z)\,dz=0.$$

Бу тенгламада $z=ux$ деб

$$(1-u^2)\,dx+(2-u)\,x\,du=0$$

ни ҳосил қиламиз. $(u^2-1)\cdot x\neq 0$ бўлганда ўзгарувчиларни ажратсак

$$\frac{dx}{x}-\frac{u-2}{u^2-1}\,du=0.$$

Тенгламани интеграллаб,

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|u^2-1|-\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=\frac{1}{2}\ln C$$

ёки

$$x^2(u+1)^3=C(u-1)$$

ни ҳосил қиламиз. $u=\frac{z}{x}=\frac{y^3}{x}$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$(y^3+x)^3=C(y^3-x).$$

Энди $u^2-1=0$ бўлганда $u=\pm 1$, $z=\pm x$ ёки $y=\pm\sqrt[3]{x}$ ечимни ҳамда $x=0$ ечимни ҳосил қиламиз.

7-§. Бир жинсли тенгламаларга келтириладиган тенгламалар

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \tag{7.1}$$

кўринишдаги тенглама берилган бўлсин. Агар $c=c_1=0$ бўлса, (7.1) тенглама бир жинсли бўлади. Айтайлик, $c\neq 0$, $c_1\neq 0$ ёки улардан бири нолдан фарқли бўлсин. Ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x=x_1+\alpha, \\ y=y_1+\beta. \end{cases} \tag{7.2}$$

У ҳолда $dx=dx_2$, $dy=dy_1$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$. Буларни (7.1) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+a\alpha+by_1+b\beta+c}{a_1x_1+a_1\alpha+b_1y_1+b_1\beta+c_1}$$

ёки

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{(ax_1+by_1)+(a\alpha+b\beta+c)}{(a_1x_1+b_1y_1)+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}. \tag{7.3}$$

Агар

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0, \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \end{cases} \tag{7.4}$$

бўлса, (7.3) тенглама бир жинсли бўлади. Бу системани α ва β га нисбатан ечиб, (7.2) алмаштириш орқали (7.1) тенглама бир жинсли тенгламага келтирилади.

Агар $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$ бўлса, (7.4) система ечимга эга бўлмайди. Бундай ҳолда (7.1) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага

$$z=ax+by$$

ўрнига қўйиш орқали келтирилади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

(бу ерда f — ихтиёрий функция) тенглама ҳам (7.3) каби интегралланади.

1-мисол. Ушбу $y'=\frac{x+y-3}{x-y-1}$ тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Детерминант: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$

Қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{cases} x=x_1+\alpha, \\ y=y_1+\beta. \end{cases}$$

У ҳолда

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+\alpha+\beta-3}{x_1-y_1+\alpha-\beta-1}$$

Энди

$$\begin{cases}\alpha+\beta-3=0,\\ \alpha-\beta-1=0\end{cases}$$

системани ечиб, $\alpha=2$, $\beta=1$ эканини топамиз. Натижада бир жинсли

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$

тенгламага эга бўламиз.

Энди $\frac{y_1}{x_1}=u$ алмаштиришни бажарсак,

$$y_1=u\cdot x_1,$$
$$y_1'=u'x_1+u,$$
$$u'x_1+u=\frac{1+u}{1-u}$$

Соддалаштиришлардан сўнг ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}$$

ёки

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx_1}{x_1}$$

Тенгламани интеграллаймиз:

$$\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln|1+u^2|=\ln|x_1|+\ln|C|$$

ёки

$$Cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{\operatorname{arctg}u}.$$

$u=\frac{y_1}{x_1}$ ни ўрнига қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}$$

Ниҳоят, $x_1=x-a$, $y_1=y-1$ алмаштиришларни бажариб, x ва y ўзгарувчиларга ўтамиз:

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-1}}$$

2-мисол. Ушбу

$$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Детерминант $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, демак, тенгламани

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha, \\ y = y_1 + \beta \end{cases}$$

ўрнига қўйиш ёрдамида ечиш мумкин эмас. Бу тенгламани $2x + y = z$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирамиз. У ҳолда

$$y' = z' - 2, \ z' = 2 = \frac{z - 1}{2z + 5}$$

ёки

$$z' = \frac{5z + 9}{2z + 5}$$

Тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{2}{5} z + \frac{7}{25} \ln |5z + 9| = x + C.$$

Энди $z = 2x + y$ алмаштириш орқали x ва y ўзгарувчиларга ўтамиз:

$$10y - 5x = \overline{C} - 7 \ln |10x + 5y + 9|$$

8-§. Чизиқли тенгламалар

Ушбу

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{8.1}$$

кўринишдаги тенглама *биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама* дейилади, бу ерда $P(x)$, $Q(x)$ лар x нинг маълум узлуксиз функциялари ёки ўзгармасдир.

Агар $Q(x) = 0$ бўлса, (8.1) тенглама *чизиқли бир жинсли*, акс ҳолда эса бир *жинсли бўлмаган тенглама* дейилади. $Q(x) \neq 0$ деб фараз қиламиз.

(8.1) тенгламани интеграллашнинг икки усулини келтирамиз: ўрнига қўйиш усули ва ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули.

8.1. Ўрнига қўйиш усули. (8.1) тенгламанинг ечимини x нинг иккита функцияси кўпайтмаси кўринишида излаймиз:

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{8.2}$$

Бу функцияларнинг бирини ихтиёрий қилиб олиш мумкин, иккинчиси эса (8.1) тенглама асосида аниқланади. (8.2) дан y' ни ҳисоблаймиз:

$$y' = u'v + v'u.$$

y ва y' ни (8.1) тенгламага қўямиз, натижада у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u'v + (v' + P(x)v)u = Q(x). \tag{8.3}$$

Функциялардан бирини ихтиёрий танлаб олиш мумкин бўлгани учун

v функцияни қавс ичида турган ифода нолга тенг бўладиган қилиб оламиз, яъни

$$v' + P(x)v = 0. \tag{8.4}$$

У ҳолда u функцияни топиш учун (8.3) дан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$u'v = Q(x). \tag{8.5}$$

Дастлаб (8.4) тенгламадан ўзгарувчиларни ажратиб v ни топамиз:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v \text{ ёки } \frac{dv}{v} = -P(x)\,dx,$$

бу ердан

$$\ln v = -\int P(x)\,dx + \ln C,$$

бундан

$$v = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Бизга (8.4) тенгламанинг нолдан фарқли б рорта ечими зарур, шунинг учун $C = 1$ деб оламиз. У ҳолда

$$v = e^{-\int P(x)dx} \tag{8.6}$$

Бу ерда $\int P\{x\}dx$ — бирорта бошланғич функция. v нинг (8.6) дан топилган қийматини (8.5) тенгламага қўйиб, u функция учун ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Бу тенгламани ечамиз:

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C. \tag{8.7}$$

(8.6) ва (8.7) формулалар u ва v нинг x орқали ифодаларини беради.

u ва v ни (8.3) формулага қўйиб, узил-кесил умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \tag{8.8}$$

1-мисол. Ушбу

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

чизиқли тенгламани ечинг.

Ечиш. $y = u \cdot v$ деймиз, у ҳолда

$$y' = u'v + v'u$$

бўлиб, қуйидагига эгамиз:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

ёки

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} \qquad (8.9)$$

$v' + \frac{v}{x} = 0$ бўлсин, у ҳолда $u'v = \frac{\sin x}{x}$. Булардан биринчисини ечамиз:

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, демак, $\ln v = -\ln x$, яъни

$$v = \frac{1}{x}$$

$v = \frac{1}{x}$ ни (8.9) тенгламага қўямиз:

$$u' \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Бу ердан $u' = \sin x$, $du = \sin x\, dx$, демак, $u = -\cos x + C$. Шундай қилиб,

$$v = \frac{1}{x}, \quad u = -\cos x + C.$$

Узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x}(C - \cos x).$$

8.2. Ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули. Бир жинсли бўлмаган (8.1) тенгламанинг ($Q(x) \neq 0$) ечимини топиш учун даставвал унга мос бир жинсли

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = 0$$

тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг ўзгарувчилари ажралади, унинг умумий ечими

$$y = C e^{-\int P(x)\, dx}$$

бўлади.

Энди ихтиёрий ўзгармас C ни x нинг бирор $C(x)$ функцияси деб қараймиз ва уни шундай танлайликки, (8.1) тенглама қаноатлансин.

$C(x)$ функцияни топиш учун $y = C(x)\, e^{-\int P(x)\, dx}$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз, y ва $\frac{dy}{dx}$ ларнинг ифодаларини (8.1) тенгламага қўямиз ва тенгламанинг қаноатланиши, яъни унинг айниятга айланишини талаб қиламиз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)\, dx} - C(x)\, P(x)\, e^{-\int P(x)\, dx}$$

бўлганлиги учун (8.1) тенглама қуйидаги

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$$

тенгламага ўтади. Биз яна ўзгарувчилари ажраладиган ва номаълум функцияси $C(x)$ бўлган тенгламани ҳосил қилдик. Унинг ечими

$$C(x) = \int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} dx + C_1$$

кўринишда бўлади.

$C(x)$ нинг топилган ифодасини бир жинсли тенглама умумий ечимига қўйиб бир жинсли бўлмаган (8.1) тенгламанинг изланаётган ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} [\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} dx + C_1].$$

2-мисол. Ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули ёрдамида

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg} x = a\sin x$$

чизиқли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Аввало чизиқли бир жинсли

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg} x = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dy}{y} - \operatorname{ctg} x\,dx = 0,$$

бундан

$$\ln y - \ln\sin x = \ln C \text{ ва } y = C\sin x$$

экани келиб чиқади. $C = C(x)$ деб, C ни вариациялаймиз, у ҳолда

$$y = C(x)\sin x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\sin x + C(x)\cos x.$$

Энди y ва $\frac{dy}{dx}$ ларнинг ифодаларини берилган тенгламага қўямиз:

$$\frac{dC(x)}{dx}\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin x\cdot\operatorname{ctg} x = a\sin x$$

ёки соддалаштиргандан сўнг, $dC(x) = a\,dx$, бундан $C(x) = ax + C_1$. Бир жинсли тенглама ечимига $C(x)$ нинг топилган ифодасини қўйиб, берилган тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = (ax + C_1)\sin x.$$

y ни аниқлашда, унинг келтирилган ифодасига кирувчи $\int P(x)\,dx$ ва $\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} dx$ аниқмас интегралларнинг ҳар биридаги бошланғич функциялардан бирини олиш керак, чунки уларга ихтиёрий ўзгармасларни қўшиш фақат ихтиёрий ўзгармас C_1 нинг қийматини ўзгартиради, бу эса дифференциал тенгламанинг умумий ечими учун муҳим эмас.

Айрим ҳолларда, умумий ечим формуласидаги аниқмас интегралларни юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграллар билан алмаштириш қулайлик туғдиради. Бундай алмаштиришда

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\left[\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\, e^{\int\limits_{x_0}^{t} P(u)du} dt + C_1\right]$$

ни ҳосил қиламиз, бунда x_0 ихтиёрий тайин сон. Агар $x = x_0$ да $y = y_0$ бошлангич шарт берилса, C_1 нинг қийматини аниқлаш мумкин. Чегаралари бир хил бўлган аниқ интеграллар нолга тенг бўлгани учун $C_1 = y_0$ ва чизиқли тенгламанинг $y\,|_{x=x_0} = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи қуйидаги хусусий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\, e^{\int\limits_{x_0}^{t} P(u)\,du} dt\right]$$

Агар чизиқли тенгламанинг битта хусусий ечими $y = y_1(x)$ маълум бўлса, у ҳолда умумий ечимини

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

формула ёрдамида топиш мумкин.

Ҳақиқатан, (8.1) тенгламанинг ечими бўлган $y = y_1(x)$ функция уни қаноатлантиради, яъни ушбу айният ўринли:

$$y_1' + P(x)\,y_1 = Q(x).$$

Бу айниятнинг иккала қисмини (8.1) тенгламанинг мос қисмларидан айирамиз:

$$(y' - y_1') + P(x)\,(y - y_1) = 0$$

ёки

$$\frac{d\,(y - y_1)}{dx} + P(x)\,(y - y_1) = 0,$$

бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама, демак,

$$\frac{d\,(y - y_1)}{y - y_1} = -P(x)\,dx,$$

бундан

$$\ln|y - y_1| = -\int P(x)\,dx + \ln C_1,$$

бинобарин,

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

келиб чиқади.

Агар чизиқли тенгламанинг ўзаро пропорционал бўлмаган иккита $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечимлари маълум бўлса, у ҳолда умумий ечимни бевосита

$$y - y_1(x) = C\,[y_2(x) - y_1(x)]$$

формула ёрдамида топиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, агар $y_1(x)$ (8.1) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда юқоридагига кўра умумий интеграл

$$y - y_1 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

кўринишда бўлади.

Бу интегралда барча хусусий ечимлар, жумладан, умумий интегралдан ихтиёрий C ўзгармаснинг аниқ қийматидан, масалан, $C = C_2$ да ҳосил бўладиган $y = y_2(x)$ иккинчи ечим ҳам бўлади. Демак, ушбу

$$y_2(x) - y_1(x) = C_2 e^{-\int P(x)\,dx}$$

айният ўринли.

Умумий интегралнинг иккала қисмини бу айниятнинг тегишли қисмларига бўлиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{y - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{C}{C_2}$$

ёки $\frac{C}{C_2}$ ни C га алмаштирсак, $y - y_1(x) = C[y_2(x) - y_1(x)]$ келиб чиқади.

Қуйидаги масалани ечайлик.

8.3 Электр занжиридаги ўтиш жараёни ҳақидаги масала. Индуктивлик занжирида ўтиш жараёни содир бўлади. L индуктивлик ва R актив қаршилик ўзгармасдир. u кучланиш t вақтнинг функцияси сифатида берилган: $u = f(t)$. Бошланғич ток i_0 га тенг. i токнинг t вақтга боғланишини топинг. $u = u_0 = \text{const}$ бўлган ҳолни текширинг.

Ечиш. Занжирдаги i ток вақт ўтиши билан ўзгаргани ва L индуктивлик мавжудлиги туфайли ўзиндукциянинг $e_L = -L\frac{di}{dt}$ э. ю. к. ҳосил бўлади. Кирхгоф қонунига кўра занжирдаги кучланиш пасайиши Ri э. ю. к. лар йиғиндиси $u - L\frac{di}{dt}$ га тенг. Шундай қилиб,

$$u - L\frac{di}{dt} = iR$$

ёки

$$L\frac{di}{dt} + iR = u.$$

Бу биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама. u ни $f(t)$ билан алмаштириб ва тенгламанинг иккала қисмини L га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{f(t)}{L}.$$

Бу чизиқли тенгламанинг $t = 0$ да $i = i_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими

$$i = e^{-\frac{Rt}{L}}\left[i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t f(\tau)\, e^{\frac{\tau R}{L}} d\tau\right]$$

функциядан иборат бўлади. $f(t) = u_0 = \text{const}$ бўлганда

$$i = e^{-\frac{Rt}{L}}\left[i_0 + \frac{u_0}{L}\int_0^t e^{\frac{R\tau}{L}} d\tau\right]$$

ёки

$$\int_0^t e^{\frac{R\tau}{L}} d\tau = \frac{L}{R}\left(e^{\frac{Rt}{L}} - 1\right)$$

бўлганлиги учун

$$i = \frac{u_0}{R} + \left(i_0 - \frac{u_0}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

бўлади.

t нинг ўсиши билан $e^{-\frac{Rt}{L}}$ кўпайтувчи камаяди ва бирор вақт оралиғидэн сўнг жараённи амалда барқарор деб ҳисоблаш мумкин, бунда ток Ом қонуни бўйича аниқланади:

$$i = \frac{u_0}{R}$$

Агар $i_0 = 0$ десак, занжирнинг уланишидаги ток учун формула ҳосил қиламиз:

$$i = \frac{u_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Бу тенгликдан кўринадики, i ток батарея улангандан сўнг Ом қонуни билан аниқланадиган $\frac{u_0}{R}$ қийматгача ўсиб боради, чунки туташув экстратоки деб аталувчи $\frac{u_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$ ток жуда тез камаяди ва амалда тезда сезиларсиз бўлиб қолади, деб ҳисоблаш мумкин.

Агар $u_0 = 0$ десак, занжирнинг узилишидаги сўниш токи формуласини ҳосил қиламиз: $i = i_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$

Занжирда кучланиш бўлмаганда фақат ўзиндукциянинг электр юритувчи кучи таъсири натижасида занжирдан ўтадиган бу ток *узиш экстратоки* дейилади; t ўсиши билан у нолга интилади.

Ўзгармас $\frac{L}{R}$ катталиги занжирнинг *вақт доимийси* дейилади.

Кўриб чиқилган масала туташиш ва узилиш кетма-кет, жуда тез содир бўлганда, масалан, телеграф алоқасида муҳимдир.

Ток манбаининг кучланиши $u = E\sin\omega t$ синусоидал қонун бўйича ўзгарадиган ҳол (масалан, RL — занжир ўзгарувчан ток манбаига уланадиган ҳол) алоҳида аҳамиятга эга.

Бу ҳолда i ток учун

$$i = e^{-\frac{Rt}{L}}\left(i_0 + \frac{E}{L}\int\limits_0^t e^{\frac{R\tau}{L}}\sin\omega\tau\,d\tau\right)$$

формулани ҳосил қиламиз,

$$\int e^{\frac{R\tau}{L}}\sin\omega\tau\,d\tau = e^{\frac{R\tau}{L}}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega\tau - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega\tau\right)$$

бўлғани учун

$$\int\limits_0^t e^{\frac{R\tau}{L}}\sin\omega\tau\,d\tau = e^{\frac{Rt}{L}}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right) + \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}$$

ва токнинг вақтга боғланиш ифодасини ҳосил қиламиз:

$$i = \left(i_0 + \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{RE}{\omega^2L^2+R^2} + \sin\omega t -$$

$$- \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t.$$

e кўпайтувчи t ўса борган сайин тез камаяди, шу сабабли бу формуладаги биринчи қўшилувчи қисқа вақт оралиғидан сўнг i катталикни аниқлашга амалда таъсир кўрсата олмайди. Қолган иккита қўшилувчининг йиғиндиси u кучланишнинг ω частотаси каби ўша ω частотали, бироқ бошқа амплитудали ва бошқа фазали синусоидал катталикдан иборат, шу билан бирга yi_0 бошланғич токка боғлиқ бўлмайди. Бу ток *барқарор ток* дейилади.

9 §. Бернулли тенгламаси

Ушбу

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

кўринишдаги тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади. Бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар x нинг узлуксиз функциялари ҳамда $n \neq 0$ ва $n \neq 1$.

Тенгламанинг барча ҳадларини y' га бўламиз:

$$y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x). \qquad (9.1)$$

Энди $z = y^{-n+1}$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$z' = (-n+1)\,y^{-n}\cdot y'$$

Буларни (9.1) тенгламага қўйсак,

$$z' + (-n+1)\,P(x)\,z = (-n+1)\,Q(x)$$

чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Бунинг умумий интегралини топиб ҳамда z ўрнига y^{-n+1} ифодани қўйиб, Бернулли тенгламасининг умумий интегралини топамиз.

Эслатма. Бернулли тенгламасидан $n = 0$ бўлганда чизиқли тенглама, $n = 1$ бўлганда эса ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил бўлади. Бернулли тенгламасини бевосита $y = u\cdot v$ ўрнига қўйиш орқали ечиш ҳам мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = -x^2y^2$$

Бернулли тенгламасининг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини y^2 га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз ($y = 0$ бўлган ҳол алоҳида текширилади):

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}\cdot\frac{1}{y} = -x^2.$$

$\frac{1}{y} = z$ деймиз, у ҳолда

$$-\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

ва тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z = x^2.$$

Бу чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламани вариация усули билан интеграллаймиз. Бир жинсли $\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z = 0$ тенгламанинг умумий ечими $z = \frac{C}{x^3}$ бўлади. Бу ерда $C = C(x)$ деб, қуйидагини ҳисоблаймиз:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\;\frac{1}{x^3} - \frac{3\,C(x)}{x^4}$$

ва чизиқли тенгламага қўямиз:

$$\frac{dC(x)}{dx}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{3\,C(x)}{x^4} + \frac{3\,C(x)}{x^4} = x^2$$

ёки $dC(x) = x^5\,dx$, бундан $C(x) = \frac{x^6}{6} + C_1$ демак, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$z = \frac{x^3}{6} + \frac{C_1}{x^3}$$

бўлади. z ни $\frac{1}{y}$ билан алмаштирсак,

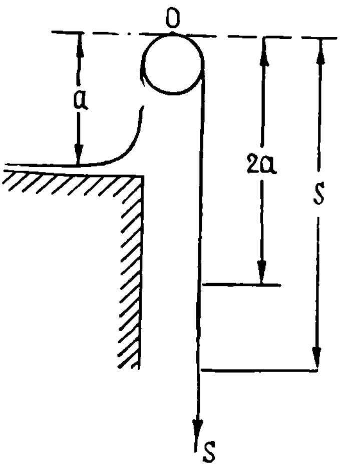
$$\frac{1}{y}=\frac{x^3}{6}+\frac{C_1}{x^3}$$

ёки

$$y\left(\frac{x^3}{6}+C_1\right)=x^3$$

ҳосил бўлади.

9.1. Арқоннинг сирпаниши ҳақидаги масала. Арқон стол устида ётибди (9-шакл), унинг учларидан бири стол устидан a масофада бўлган силлиқ блок орқали ўтказилган. Бошланғич пайтда $2a$ узунликдаги арқон бўлаги блокнинг нариги томонида эркин осилиб турибди. Арқоннинг бу учининг ҳаракат тезлиги v ни s йўлга боғлиқ равишда топинг, бундай ҳаракатда ишқаланиш қаршилиги тезлик квадратига пропорционал (пропорционаллик коэффициентини 1 га тенг деб олинсин), бошланғич тезликни эса нолга тенг деб қабул қилинг.



9- шакл

Ечиш. Агар блокни саноқ боши сифатида танлаб олсак ва Os ўқни пастга йўналтирсак, Ньютоннинг иккинчи қонуни $m\cdot\frac{dv}{dt}=F$ га биноан

$$(s+a)\frac{dv}{dt}=(s-a)g-v^2,$$

бу ерда g — оғирлик кучи тезланиши.

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot v$$

бўлгани учун тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(s+a)\,v\frac{dv}{ds}+v^2=(s-a)\,g.$$

Бу $n=-1$ бўлган Бернулли тенгламасидир. $v^2=z$ деб ва $v\frac{dv}{ds}=$ $=\frac{1}{2}\,\frac{dz}{ds}$ лигини эътиборга олиб, тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dz}{ds}+\frac{2}{s+a}\,z=\frac{2g\,(s-a)}{s+a}.$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$z = e^{-2\ln(s+a)}\left[2g\int\frac{s-a}{s+a}e^{2\ln(s+a)}ds + C\right]$$

бўлади. Лекин

$$e^{-2\ln(s+a)} = \frac{1}{(s+a)^2},\quad e^{2\ln(s+a)} = (s+a)^2.$$

Шунинг учун

$$z = v^2 = \frac{1}{(s+a)^2}\left[2g\left(\frac{s^3}{3} - a^2s\right) + C\right].$$

$s = 2a$ да $v = 0$ бошланғич шартдан $C = -\frac{4ga^3}{3}$ ни топамиз, натижада хусусий интеграл ушбу кўринишда бўлади:

$$v^2 = \frac{2g}{3(s+a)^2}(s^3 - 3a^2s - 2a^3).$$

Қавс ичидаги ифодани кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$s^3 - 3a^2s - 2a^3 = s^3 - 2as^2 + 2as^2 - 4a^2s + a^2s - 2a^3 =$$
$$= s^2(s-2a) + 2as(s-2a) + a^2(s-2a) = (s-2a)(s+a)^2,$$

шунинг учун

$$v = \sqrt{\frac{2g}{3}(s-2a)}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб, t бўйича дифференциаллаймиз, натижада:

$$2v\frac{dv}{dt} = \frac{2gds}{3dt},$$

лекин

$$\frac{ds}{dt} = v,\quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Шунинг учун

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{3} = \mathrm{const}$$

бўлади, демак, ҳаракат текис тезланувчан экан.

10-§. Якоби тенгламаси

Умумий ечими элементар функцияларда ифодаланувчи биринчи тартибли тенгламалар қаторига

$$(Ax + By + C)dx + (A'x + B'y + C')dy + (A''x + B''y +$$
$$+ C'')(xdy - ydx) = 0 \qquad (10.1)$$

кўринишга эга бўлган Якоби тенгламаси ҳам киради. Бу ерда A, B, . , C'' — ўзгармаслардир.

Агар (10.1) тенгламани

$$Mdx + Ndy = 0$$

шаклда ёзсак, M ва N лар x ва y га нисбатан иккинчи тартибли кўпҳадлар бўлиб, M нинг ифодасидаги иккинчи тартибли ҳадлар

$$-A''xy - B''y^2$$

кўринишда, N нинг ифодасида эса

$$A''x^2 + B''xy$$

шаклда бўлади.

Якоби тенгламаси тадқиқ қилинаётганда, аналитик геометриянинг бир жинсли координатларига мос келувчи

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

янги ўзгарувчилар киритилади. У ҳолда

$$dx = \frac{x_3dx_1 - x_1dx_3}{x_3^2}; \quad dy = \frac{x_3dx_2 - x_2dx_3}{x_3^2}$$

$$xdy - ydx = \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_3^2}.$$

Янги ўзгарувчилар ва дифференциаллар учун топилган ифодаларни (10.1) тенгламага қўйиб, уни

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0 \tag{10.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда

$$a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad b_x = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

$$c_x = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

лар бир жинсли координатларга нисбатан чизиқли формалардир.

Декарт координатларига ўтиш учун $x_3 = 1$ деб олиш кифоядир.

Якоби тенгламаси хусусий чизиқли интегралларга эгадир. Бир жинсли координаталарда чизиқли муносабатларни ёзамиз:

$$\sum u_i x_i \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \tag{10.3}$$

Бу муносабатлар (10.2) тенгламани қаноатлантиришини талаб қиламиз. (10.2) нинг чап томонидаги детерминантнинг биринчи ва иккинчи устунларини мос равишда u_1 ва u_2 га кўпайтириб, u_3 га кўпайтирилган учинчи устунга қўшамиз ва натижада

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \sum u_i\, dx_i \\ x_1 & x_2 & \sum u_i\, x_i \\ a_x & b_x & u_1a_x + u_2b_x + u_3c_x \end{vmatrix} = 0$$

ни ҳосил қиламиз. (10.3) тенгликка асосан $\sum u_i dx_i = 0$ эканлигини инобатга олиб

$$(u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x)(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) = 0$$

шартга эга бўламиз. Худди шундай $x_3dx_2 - x_3dx_3$, $x_1dx_3 - x_3dx_1$ кўпайтувчилар билан ҳам шунга ўхшаш тенгликларни ҳосил қилиш мумкин. Бу кўпайтувчилар бир пайтда нолга тенг бўлмаганлиги сабабли (10.3) шарт бажарилганда

$$u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x = 0$$

бўлади. У ҳолда ҳар икки чизиқли муносабат пропорционал бўлиб,

$$u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x = \lambda (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$$

ўринли бўлади (λ — пропорционаллик кўпайтувчиси). a_x, b_x, c_x ларнинг ўрнига уларни x_1, x_2, x_3 билан боғловчи ифодаларни қўйиб ва ҳосил қилинган айниятда x_1, x_2, x_3 лар олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, u_1, u_2, u_3 ларни аниқлаш учун учта ушбу

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda) u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 = 0, \\ a_2 u_1 + (b_2 - \lambda) u_2 + c_2 u_3 = 0, \\ a_3 u_1 + b_2 u_1 + (c_3 - \lambda) u_3 = 0 \end{cases} \qquad (10.4)$$

бир жинсли тенгламаларга эга бўламиз.

(10.4) система нолдан фарқли ечимларга эга бўлиши учун системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Шундай қилиб, биз λ га нисбатан куб тенгламага эга бўлдик. Агар бу тенглама учта ҳақиқий илдизга эга бўлса, у ҳолда (10.4) нинг учта ҳар хил u_1, u_2, u_3 ечими бўлади ва Якоби тенгламасининг интеграли учта тўғри чизиқдан иборат бўлади. Уларнинг тенгламалари

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$
$$v_x = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$
$$w_x = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқларни янги уч чизиқли координаталар системасининг ўқлари сифатида қабул қиламиз ва янги координаталарни яна x_1, x_2, x_3 орқали белгилаймиз. (10.2) тенглама $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ечимларга эга бўлиши мумкин. (10.2) га биринчи ечимни қўйиб ва у (10.2) тенгламани айниятга айлантиришни талаб қилсак,

$$a_2 = a_3 = 0$$

бўлишини аниқлаймиз.

Худди шундай, $x_2 = 0$ ҳам ечим эканлигидан $b_1 = b_3 = 0$ эканлигини, $x_3 = 0$ дан $c_1 = c_2 = 0$ эканлигини топамиз (бу ерда $a_1, \ldots, c_3$ лар мос равишда янги координаталардаги коэффициентлар). У ҳолда Якоби тенгламаси қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1x_1 & b_2x_2 & c_3x_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{x_1} & \frac{dx_2}{x_2} & \frac{dx_3}{x_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$(c_3 - b_2)\frac{dx_1}{x_1} + (a_1 - c_3)\frac{dx_2}{x_2} + (b_2 - a_1)\frac{dx_3}{x_2} = 0,$$

Унинг умумий интеграли

$$x_1^{c_3-b_2} x_2^{c-c_3} x_3^{b_2-c_1} = C$$

бўлади.

Дастлабки координатларга ўтсак,

$$(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^\alpha (v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)^\beta (w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3)^\gamma = C$$

бўлади. Бу ерда

$$\alpha + \beta + \gamma = (c_3 - b_2) + (a_1 - c_3) + (b_2 - a_1) = 0.$$

Шу сабабли Декарт координатларида умумий ечим

$$(u_1x + u_2y + u_3)^\alpha\ (v_1x + v_2y + v_3)^\beta\ (w_1x + w_2y + w_3)^\gamma = C$$

кўринишда бўлади.

Куб тенглама битта ҳақиқий илдиз ва иккита мавҳум илдиз ва каррали илдизларга эга бўлган ҳолларда ҳам ечим шу каби топилади.

Маълумки, λ га нисбатан куб тенглама доим битта ҳақиқий илдизга эга, шунинг учун Якоби тенгламаси ҳеч бўлмаганда битта интеграл тўғри чизиққа эга. Унинг тенгламаси

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

бўлсин. Ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3,$$

агар $u_3 \neq 0$ бўлса, бу алмаштиришнинг детерминанти нолдан фарқли бўлади (агар $u_3 = 0$ бўлиб, $u_1 \neq 0$ бўлса, $x_1' = ux$, $x_2' = x_2$ деб олган бўлардик). (10.2) тенгламада биринчи ва иккинчи устунларни u_1 ва u_2 га кўпайтириб, u_3 га кўпайтирилган учинчи устунга қўшамиз. Янги тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{vmatrix} dx_1' & dx_2' & dx_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ a_{x'}' & b_{x'}' & c_{x'}' \end{vmatrix} = 0.$$

Бу ерда $c'_{x'} = c_3 x'_3$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. $x'_1 = x'$ $x'_2 = y'$, $x'_3 = 1$ деб, Декарт координаталарига ўтамиз. Якоби тенгламаси ушбу кўринишга келади:

$$dx'\,(c'_3 y' - b'_1 x' - b'_2 y' - b'_3) - dy'\,(c'_3 x' - a'_1 x' - a'_2 y' - c'_3) = 0.$$

Бу квадратурада интегралланувчи бир жинсли тенгламага келтириладиган тенгламадир. Агар бир жинсли координатларга ўтилмаса, Якоби тенгламасини интеграллаш қоидасини қуйидагича ифодалаш мумкин: (10.2) тенгламанинг

$$u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$$

чизиқли интеграли топилади,

$$x' = \frac{x}{u_1 x + u_2 y + u_3}, \quad y' = \frac{y}{u_1 x + u_2 y + u_3}$$

янги ўзгарувчилар киритилади. x' ва y' ларга нисбатан ёзилган янги тенглама бир жинсли тенгламага келтириладиган тенглама шаклида бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$(14x + 13y + 6)\,dx + (4x + 5y + 3)\,dy + \\ + (7x + 5y)(ydx - xdy) = 0$$

тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Бир жинсли координаталарни киритамиз:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2},$$

$$dy = \frac{x_3 dx_2 - x_2 dx_3}{x_3^2}; \quad ydx - xdy = \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_3^2}.$$

Тенгламанинг детерминант шакли қуйидагича бўлади:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 & -14x_1 - 13x_2 - 6x_3 & 7x_1 + 5x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пропорционаллик кўпайтувчиси λ ушбу тенгламадан аниқланади:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -14 & 7 \\ 5 & -13 - \lambda & 5 \\ 3 & -6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = 0.$$

Бу тенгламанинг ҳамма илдизлари тенг бўлиб,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

u_1, u_2 ва u_3 ларни аниқлаш тенгламаси (10.4) қуйидагича бўлади:

$$7u_1 - 14u_2 + 7u_3 = 0,$$
$$5u_1 - 10u_2 + 5u_3 = 0,$$
$$3u_1 - 6u_2 + 3u_3 = 0.$$

Бу тенгламалар битта $u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$ тенгламага келтирилади.

Шундай қилиб, битта интеграл тўғри чизиқ ўрнига интеграл тўғри чизиқлар дастасига эга бўлдик. Чунки $\frac{u_1}{u_3}$, $\frac{u_2}{u_3}$ нисбатларни аниқлаш учун битта тенглама етарли эмас. u_3 ни u_1 ва u_2 орқали ифодалаб ва $u_x = 0$ деб, даста тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$u_1(x_1 - x_2) + u_2(x_2 + 2x_3) = 0.$$

Бу ерда u_1 ва u_2 лар дастанинг бир жинсли параметрларидир.

Бошқа шакл алмаштиришларга ҳожат йўқ, чунки даста тенгламасида битта ўзгармас $\left(-\frac{u_3}{u_1}\right)$ иштирок этаяпти, демак, у тенгламанинг умумий интеграли бўлади.

Декарт координатларида бу интеграл

$$x - 1 = C(y + 2)$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. $(7x + 8y + 5)\,dx - (7x + 8y)\,dy + 5(x - y)(ydx - xdy) = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бир жинсли координаталар киритилгандан сўнг тенглама

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -7x_1 - 8x_2 & -7x_1 - 8x_2 - 5x_3 & 5x_1 - 5x_2 \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда бўлади.

λ ушбу тенгламадан топилади:

$$\begin{vmatrix} -7 - \lambda & -7 & 5 \\ -8 & -8 - \lambda & -5 \\ 0 & -5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda - 375 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = -15$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 5$. λ_1 ни инобатга олиб, u_1, u_2 ва u_3 ларни аниқлаш тенгламаси (10.4) ни ёзамиз:

$$\begin{cases} 8u_1 - 7u_2 + 5u_3 = 0, \\ -8u_1 + 7u_2 - 5u_3 = 0, \\ \quad -5u_2 + 15u_3 = 0. \end{cases}$$

Бунинг ечими $u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 1$.

λ_2 ни инобатга олиб, v_1, v_2, v_3 лар учун ушбу системага эга бўламиз:

$$\frac{du}{dx} = P(x)u^2 + [Q(x) + 2P(x)\alpha(x)]u + R(x) + P(x)\alpha^2.$$

u олдидаги коэффициентнинг 0 га тенг бўлиши учун $\alpha(x) = -\frac{Q(x)}{2P(x)}$, $(P(x) \neq 0)$ қилиб танлаб олиш кифоядир.

Келтирилган алмаштиришларни биргаликда қўллаб, Риккати тенгламасини

$$\frac{dy}{dx} = \pm y^2 + R(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Умуман олганда Риккати тенгламасини ечиш квадратураларга келтирилмайди. Лекин ушбу теоремалар ўринлидир:

1-теорема. *Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими маълум бўлса, унинг тўлиқ ечими иккита квадратура ёрдамида олинади.*

Исбот: $y = y(x)$ (11.1) тенгламанинг хусусий ечими бўлсин. У ҳолда

$$y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) \tag{11.2}$$

бўлади. Энди $y = y_1 + z$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ерда z — янги, изланаётган функция. Тегишли ҳосилаларни топиб, (11.1) тенгламага қўямиз:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = P(x)y_1^2 + 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)y_1 + Q(x)z + R(x)$$

ёки (11.2) ни инобатга олсак,

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z^2 + (2P(x)y_1 + Q(x))z. \tag{11.3}$$

Ҳосил қилинган (11.3) тенглама Бернулли тенгламасидир. Маълумки, у иккита квадратурада интегралланади. (11.3) тенгламани чизиқли тенгламага келтириш учун

$$z = \frac{1}{u}; \quad u = \frac{1}{z} = \frac{1}{y - y_1}$$

алмаштиришдан фойдаланилади.

$$\frac{du}{dx} = (2P(x)y_1 + Q(x))u = -P(x).$$

Бу тенгламанинг умумий интеграли

$$u = C\varphi(x) + \psi(x)$$

кўринишда бўлади. Бу ердан (11.1) Риккати тенгламасининг тўлиқ ечими чиқарилади:

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{Cy_1\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Шундай қилиб, Риккати тенгламасининг умумий ечими ихтиёрий ўзгармаснинг каср-чизиқли функцияси экан.

Ушбу икки теоремани исботсиз келтириб ўтамиз.

2-теорема. *Риккати тенгламасининг иккита хусусий ечими маълум бўлса, у ҳолда унинг умумий ечими бир квадратурада топилади.*

3-теорема. *Риккати тенгламасининг учта хусусий ечими маълум бўлса, умумий ечим квадратураларсиз топилади.*

Риккатининг махсус тенгламаси (11.1) тенгламанинг хусусий ҳоли бўлиб,

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{\alpha} \tag{11.4}$$

кўринишга эга. Бу ерда a, b ва α лар ўзгармаслардир. Аниқлик учун $0<x<+\infty$ оралиқ қаралади. Бу тенглама қуйидаги икки ҳолда элементар функцияларда интегралланади.

1) $\alpha=0$, $\frac{dy}{dx}+ay^2=b$. Бу ҳолда ўзгарувчилар ажралади, яъни

$$\frac{dy}{b-ay^2}=dx;$$

2) $\alpha=-2$. Бу ҳолда тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=\frac{b}{x^2}. \tag{11.5}$$

(11.5) тенглама учун $y=\frac{1}{z}$ алмаштиришни амалга оширамиз ва тенгламани

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}+\frac{a}{z^2}=\frac{b}{x^2}$$

ёки

$$\frac{dz}{dx}=a-b\left(\frac{z}{x}\right)^2$$

шаклга келтирамиз. Ҳосил бўлган тенглама бир жинсли тенглама бўлиб, у квадратураларда интегралланади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=y^2+\frac{1}{2x^2}$$

тенгламанинг ечимини топинг.

Ечиш. $y=\frac{1}{z}$ алмаштиришни бажариб, тенгламани

$$\frac{dz}{dx}=-1-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}\right)^2$$

шаклга келтирамиз. Бу бир жинсли тенгламани ечишда

$$\frac{z}{x}=u$$

белгилашдан фойдаланамиз. У ҳолда

$$u + x\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{1}{2}u^2;$$

$$\frac{du}{u^2 + 2u + 2} = -\frac{dx}{2x}; \quad \frac{du}{1 + (u + 1)^2} = -\frac{dx}{2x},$$

$$u + 1 = \operatorname{tg}\left(c - \frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$z = x\left[-1 + \operatorname{tg}\left(c - \frac{1}{2}\ln x\right)\right].$$

Демак,

$$y = \frac{1}{x\left[-1 + \operatorname{tg}\left(c - \frac{1}{2}\ln x\right)\right]}.$$

12-§. Тўлиқ дифференциалли тенглама. Интегралловчи кўпайтувчи

Таъриф. Агар

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (12.1)$$

тенгламанинг чап қисми бирорта $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \qquad (12.2)$$

бўлса, (12.1) тенглама *тўлиқ дифференциалли тенглама* дейилади.

Функциянинг тўлиқ дифференциали

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (12.3)$$

формула бўйича ҳисобланишини эътиборга олсак,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \qquad (12.4)$$

Биринчи муносабатни y бўйича, иккинчисини эса x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Бу ердан иккинчи тартибли ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (12.5)$$

Демак, (12.1) тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиши учун (12.5) шарт бажарилиши керак.

1-мисол. Ушбу

$$(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$$

тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиш-бўлмаслигини текширинг.

Ечиш. (12.5) шартни текширамиз. $M(x, y)$, $N(x, y)$ ларни ёзамиз:

$$M(x, y) = 2x^3 - xy^2, \quad N(x, y) = 2y^3 - x^2y.$$

Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = - 2xy.$$

Кўриниб турибдики,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Демак, берилган тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама экан.

(12.1) тенглама ва (12 2) шартга қайтайлик. Уларни бирлаштириб,

$$du = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

ёки

$$du = 0$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан берилган тенгламанинг умумий интеграли $u(x, y) = C$ экани келиб чиқади (C — ихтиёрий ўзгармас).

$u(x, y)$ ни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, у ҳолда $dy = 0$ ва (12.2) қуйидагича ёзилади:

$$du = M(x, y)\,dx.$$

x бўйича интегралласак,

$$u = \int M(x, y)\,dx + \varphi(y). \tag{12.6}$$

Бу ерда $\varphi(y)$ номаълум функция. Интеграллаш доимийси y га боғлиқ бўлиши мумкин, чунки x бўйича интеграллашда y ни ўзгармас деб ҳисобладик. Энди $\varphi(y)$ ни (12.6) нинг иккинчи муносабати бажариладиган қилиб танлаймиз. Бунинг учун (12.6) ни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x, y)$ га тенглаймиз:

$$\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Бу ердан

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx.$$

Энди y бўйича интегралласак,

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right) dy + \overline{C}.$$

Шундай қилиб, $u(x, y)$ функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right) dy + \overline{C}.$$

Бу ифодани ихтиёрий ўзгармасга тенглаб, берилган тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз.

Агар $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилмаса, у ҳолда (12.1) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциаллардаги тенглама бўлмайди. Бироқ бу тенгламани тегишли $\mu(x, y)$ функцияга кўпайтириш билан уни тўлиқ дифференциаллардаги тенгламага келтириш мумкин. Бундай функция берилган дифференциал тенглама учун *интегралловчи кўпайтувчи* деб юритилади. Ҳар қандай дифференциал тенглама учун ҳам интегралловчи кўпайтувчи мавжуд, лекин уни топиш осон эмас. (12.1) тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси топилишини кўрсатамиз. Ушбу

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0$$

тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

ёки

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag*{12.7)}$$

шарт бажарилиши керак.

Бу тенглик (12.7) тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиларининг дифференциал тенгламасидир, чунки унинг ҳар бир ечими (12.7) тенгламанинг иккала томонига кўпайтирилгандан сўнг уни тўлиқ дифференциаллардаги тенгламага келтиради. $\mu(x, y)$ ни топиш учун хусусий ҳосилали (12.7) дифференциал тенгламани интеграллаш керак. Умумий ҳолда бу масала (12.1) оддий дифференциал тенгламани интеграллашдан қийинроқдир. Агар μ фақат биргина x ёки y ўзгарувчига боглиқ бўлса, масала анча соддалашади.

Биз фақат учта хусусий ҳолни қараймиз.

1-хусусий ҳол. $\mu = \mu(x)$ бўлсин. У ҳолда (12.7) тенглама

$$N\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \text{ ёки } \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx$$

кўринишга келади, бундан

$$\ln\mu(x) = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx + C,$$

яъни

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx} \tag{12.8}$$

(ихтиёрий C ўзгармас нолга тенг деб олинган, чунки қандайдир битта интегралловчи кўпайтувчига эга бўлсак, кифоя).

Бу ҳолда $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ифода y га боғлиқ бўлмаслиги равшан. Акси ҳам тўғри: агар $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ифода y га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда фақат x га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи μ мавжуд ва у (12.8) тенглик билан ифодаланади.

2-хусусий ҳол. Энди $\mu=\mu(y)$ бўлсин. У ҳолда (12.7) тенглама

$$M\frac{d\mu(y)}{dy}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \text{ ёки } \frac{d\mu(y)}{dy}=-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}dy$$

кўринишга келади, бундан

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}dy} \tag{12.9}$$

бу ерда $C=0$ деб олинган.

Бу ҳолда $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$ ифода x га боғлиқ эмас, ва аксинча, агар бу ифода x га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда фақат y га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи мавжуд ва у (12.9) тенглик билан ифодаланади.

(12.1) тенгламани тўлиқ дифференциаллардаги тенглама кўринишига келтириш учун қаралаётган хусусий ҳолларда одатда қуйидагича йўл тутилади. $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ифода тузилади ва унинг N га нисбати олинади. Агар бу ифода y га боғлиқ бўлмаса интегралловчи кўпайтувчини топиш учун (12.8) дан фойдаланиш керак; акс ҳолда $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ифоданинг N га нисбати олинади, агар бу нисбат x га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда x га боғлиқ бўлмаган μ кўпайтувчи мавжуд ва уни (12.9) формула бўйича топилади.

2-мисол. $(x^2-y)\,dx+(x^2y^2+x)\,dy=0$ дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топинг ва тенгламани интегралланг.

Ечиш. Кўриниб турибдики, $M(x,\ y)=x^2-y,\ N(x,\ y)=x^2y^2+x$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2+1,\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-2(1+xy^2).$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-2(1+xy^2)}{x^2-y}$$ нисбат x ва y га боғлиқ.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-2(1+xy^2)}{x(xy^2+1)}=-\frac{2}{x}$$ нисбат x га боғлиқ.

Демак, $\mu=\mu(x)$ интегралловчи кўпайтувчи (12.8) формула бўйича топилади:

$$\mu(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

Тенгламанинг иккала томонини $\frac{1}{x^2}$ га кўпайтирамиз:

$$\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y^2+\frac{1}{x}\right)dy=0 \text{ ёки } dx+y^2dy+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0.$$

$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$ бўлгани учун умумий интеграл

$$x+\frac{y^2}{3}+\frac{y}{x}=\frac{C}{3} \text{ ёки } 3x^2+xy^2+3y-Cx=0$$

кўринишда бўлади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

чизиқли тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топайлик. Бунинг учун тенгламани дифференциаллар қатнашган кўринишда қайта ёзиб оламиз:

$[P(x)y-Q(x)]\,dx+dy=0$, бунда $M(x,\ y)=P(x)\,y-Q(x)$, $N(x,\ y)=1$. Шу сабабли

$$\frac{\partial M}{\partial y}=P(x),\quad \frac{\partial N}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}=P(x).$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=P(x),\quad \mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}$$

Чизиқли тенгламанинг иккала томонини $e^{P(x)\,dx}$ га кўпайтириш уни тўлиқ дифференциаллардаги тенгламага келтиради. Шундай қилиб, чизиқли тенгламани интеграллашнинг яна бир усули ҳосил қилинди.

3-мисол. $\frac{dy}{dx}+ay=e^{mx}$ дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топинг ва уни интегралланг $(a+m\neq0)$.

Ечиш: $P(x)=a$, демак, $\mu=e^{ax}$. Қуйидагига эгамиз:

$$e^{ax}[(ay-e^{mx})\,dx+dy]=0,\quad ae^{ax}ydx+e^{ax}dy-e^{(a+m)x}dx=0$$

ёки

$$d(e^{ax}y)-e^{(a+m)x}dx=0.$$

Умумий интеграл $e^{ax}\cdot y - \frac{e^{(a+m)\,x}}{a+m} = C$, умумий ечим эса

$$y = C\,e^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m}.$$

3-хусусий ҳол. Энди $\mu = \mu[\omega(x, y)]$ бўлсин. Бу ҳолда интегралловчи кўпайтувчи тенгламаси (12.7) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{d\mu}{d\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega)$$

ёки (агар $N\omega'_x - M\omega'_y \neq 0$ бўлса)

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}}$$

Агар

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \psi(\omega) \qquad (12.10)$$

бўлса,

$$\mu = e^{\int\psi(\omega)\,d\omega} \equiv f(\omega) = f[\omega(x, y)]$$

бўлади.

Интегралловчи кўпайтувчининг фақат x га ёки y га боғлиқ ҳоллари кўрилган ҳол $\omega = x$ ёки $\omega = y$ лигидан келиб чиқади. (12.10) шартдан фойдаланиб, кўриниши олдиндан маълум бўлган интегралловчи кўпайтувчининг мавжудлиги шартини топишимиз мумкин. Масалан, xy кўпайтувчига боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи $[\mu = \mu(x, y)]$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \psi(xy) \ \text{(бунда } \omega = xy)$$

бўлганда мавжуд бўлади.

Кўриниши $\mu = \mu(x + y)$ интегралловчи кўпайтувчининг мавжудлик шарти

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \psi(x + y) \quad (\omega = x + y)$$

бўлади.

13-§. Коши масаласи. Махсус нуқталар

Дифференциал тенгламанинг берилган $y|_{x=x_0} = y_0$ бошланғич шарт бўйича хусусий ечимини топиш масаласи *Коши масаласи* дейилади.

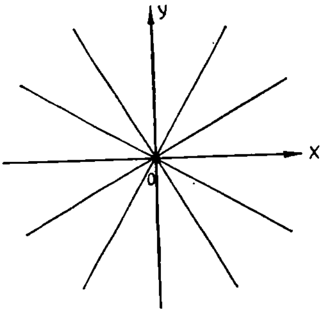
$y|_{x=x_0} = y_0$ бошлангич шартнинг берилиши изланаётган хусусий ечимга мос интеграл эгри чизиқ ўтиши керак бўлган $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг берилишини билдиради. Шундай қилиб, Коши масаласини ечиш — интеграл эгри чизиқлар оиласи орасидан берилган нуқтадан ўтадиганини танлаб олиш демакдир. Бу масала ҳар доим ҳам ечимга эгами? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради (исботни келтирмай, теорема баёни билан чекланамиз).

Теорема. (Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги). *Агар $f(x, y)$ функция ва унинг $\frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосиласи $P_0(x_0, y_0)$ нуқтани ўз ичига олган бирор D соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг $x = x_0$ да $\varphi(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирувчи $y = \varphi(x)$ ечими мавжуд ва ягонадир.*

Бу геометрик жиҳатдан қуйидагини билдиради: теореманинг шартлари бажариладиган ҳар бир нуқта орқали ягона интеграл эгри чизиқ ўтади.

Теореманинг шартлари бузиладиган нуқталар *махсус нуқталар* дейилади. Махсус нуқталар орқали, ё бирорта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмайди, ё бир нечта чизиқ ўтади. Масалан, $y' = \frac{y}{x}$ тенглама $y = Cx$ умумий ечимга эга, бу интеграл эгри чизиқ оиласи — координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасидир (10-шакл.)

$x = 0$ да (ординаталар ўқида) ва $O(0, 0)$ нуқтада теорема шарти бузилади. Текисликнинг, кўрсатилган нуқталардан ташқари, исталган нуқтаси орқали $y = Cx$ оиланинг бир тўғри чизиғи ўтади. Теорема шарти бузилган $O(0, 0)$ нуқта орқали чексиз кўп тўғри чизиқ ўтади. *Oy* ўқининг бошқа нуқталари орқали битта ҳам тўғри чизиқ ўтмайди.

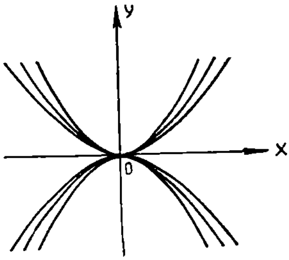


10- шакл

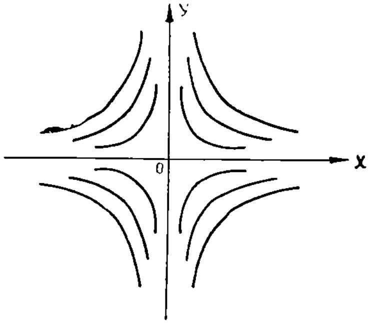
Бу мисолда $O(0, 0)$ нуқта *тугун* (*дикритик тугун*) дейилади. Бундай ҳолда ҳар бир интеграл эгри чизиқ махсус нуқтада ўз йўналишига эга бўлади.

$y' = \frac{2y}{x}$ тенгламани ҳам текширайлик. Унинг умумий ечими $y = Cx^2$ дан иборат.

Шундай қилиб, умумий ечим учи координаталар бошида бўлиб абсциссалар ўқига уринадиган параболалар оиласидан иборат экан. Махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқлар жойлашишининг умумий кўриниши 11-шаклда кўрсатилган. Интеграл эгри чизиқлари ана шундай жойлашган дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси *тугун* дейилади.



11- шакл



12- шакл

$y' = -\frac{y}{x}$ тенглама учун умумий интеграл $xy = C$дан, яъни асимптоталари координата ўқларидан иборат бўлган гиперболалар оиласидан иборат. Хусусий ҳолда, $C = 0$ да $x = 0$ ва $y = 0$ (координаталар ўқлари) ни ҳосил қиламиз. Бу интеграл эгри чизиқлар координаталар бошидан ўтади, қолган ҳамма чизиқлар эса махсус нуқта орқали ўтмайди. Бу ҳол 12-шаклда тасвирланган; бу турдаги махсус нуқта *эгар* дейилади.

$y' = \frac{x+y}{x-y}$ дифференциал тенглама эса $y = ux$ ўрнига қўйиш натижасида

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

кўринишга келади, бу ердан ўзгарувчиларни ажратиб, интегралласак:

$$\ln C + \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x$$

ёки

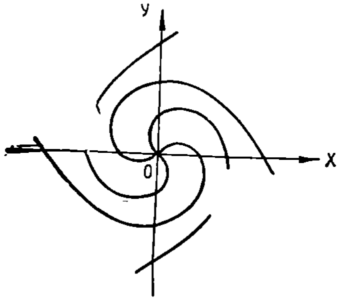
$$x\sqrt{1+u^2} = Ce^{\operatorname{arctg} u}$$

Эски ўзгарувчиларга қайтсак,

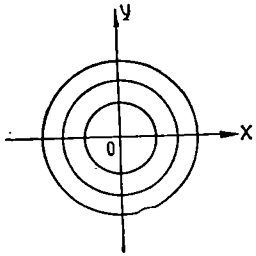
$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Қутб координаталарга ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) ўтиб, охирги ечимни $\rho = Ce^{\varphi}$ кўринишга келтирамиз. Бу координаталар боши атрофида чексиз сондаги ($\varphi \to -\infty$ да) ўрамлар ҳосил қилувчи логарифмик спираллар оиласидир. Махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқлар оиласининг кўриниши 13-шаклда келтирилган. Бундай махсус нуқта *фокус* деб аталади.

Ниҳоят $y' = -\frac{x}{y}$ тенгламани қарайлик. Бу тенгламанинг уму-



13- шакл



14- шакл

мий ечими $x^2+y^2=C^2$ ни, яъни маркази координаталар бошида бўлган айланалар оиласини беради. Махсус нуқта орқали битта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмайди (14-шакл). Бундай махсус нуқта *марказ* дейилади.

14-§. Дифференциал тенгламанинг махсус ечими тушунчаси

Таъриф. Дифференциал тенгламада унинг умумий ечимидан ихтиёрий ўзгармаснинг ҳеч бир қийматида ҳосил қилиниши мумкин бўлмаган ечими *махсус ечим* дейилади.

Махсус ечимнинг графиги умумий ечимга кирган *интеграл эгри чизиқларнинг ўрамаси* деб аталувчи чизиқдан иборатдир. Бу чизиқ ўзининг ҳар бир нуқтасида оиланинг у ёки бу интеграл эгри чизиғига уринади, шу билан бирга ўраманинг турли нуқталарида оиланинг турли интеграл эгри чизиқлари уринади.

Демак, ўраманинг (махсус ечимнинг) ҳар бир нуқтаси орқали энг камида иккитадан интеграл эгри чизиғи ўтади, яъни унинг ҳар бир нуқтасида ечимнинг ягоналиги бузилади. Бундай нуқталарни биз махсус нуқталар деб атадик. Шундай қилиб, махсус ечим махсус нуқталардан иборатдир.

Агар $F(x, y, y')=0$ дифференциал тенгламанинг умумий интеграли $\Phi(x, y, C)=0$ бўлса, ўрама қуйидаги тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{cases}\Phi(x, y, C)=0,\\ \Phi'(x, y, C)=0.\end{cases} \tag{14.1}$$

Бу ерда C ни йўқотиб, $y=\varphi(x)$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар бу функция дифференциал тенгламани қаноатлантирса ва $\Phi(x, y, C)=0$ оилага тегишли бўлмаса, у ҳолда у тенгламанинг *махсус ечими* бўлиб, унинг графиги $\Phi(x, y, C)=0$ оиланинг ўрамасидан иборат бўлади.

1-мисол. Ушбу $y^2(1+y'^2)=R^2$ тенгламанинг махсус ечимини топинг.

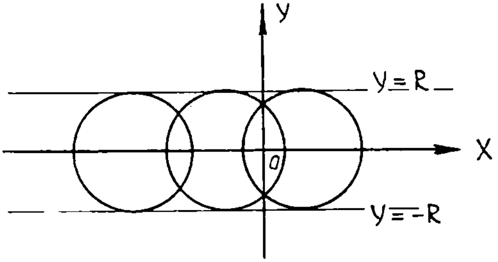
Ечиш. Тенгламанинг умумий интегралини топамиз. Бунинг учун уни y' га нисбатан ечамиз ва ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$y' = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}, \qquad \frac{y\,dy}{\pm \sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

Интеграллаб, $\pm \sqrt{R^2 - y^2} = x - C$ ни топамиз. Квадратга кўтаргандан кейин умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Интеграл эгри чизиқлар оиласи — радиуси R, маркази абсциссалар ўқида бўлган айланалар оиласидан иборат (15-шакл). Ўрамани топамиз. Бунинг учун (14.1) системани тузамиз:



15- шакл

$$\begin{cases} (x - C)^2 + y^2 = R^2, \\ -2(x - C) = 0. \end{cases}$$

Бу ердан C ни йўқотиб, $y^2 = R^2$ ёки $y = \pm R$ ни топамиз. Айланалар оиласининг ўрамаси $y = \pm R$ тўғри чизиқлар жуфти бўлади. $y = \pm R$ функция берилган тенгламани қаноатлантиради. Демак, $y = \pm R$ — махсус ечим.

15-§. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Шу пайтга қадар ҳосилага нисбатан ечилган, яъни

$$y' = f(x, y) \tag{15.1}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламаларни текширдик. Бироқ, биринчи тартибли тенглама, умуман айтганда,

$$F(x, y, y') = 0 \tag{15.2}$$

кўринишга эга бўлиши мумкин, шу билан бирга (15.2) кўринишдаги тенгламадан (15.1) тенглама кўринишига ўтиш мумкин бўлавермайди. Лекин (15.2) дифференциал тенгламани интеграллаш масаласини параметр киритиш йўли билан ҳосилага нисбатан ечилган тенгламани интеграллаш масаласига келтириш мумкин.

(15.2) тенгламанинг айрим хусусий ҳолларини қараб чиқамиз ва уларни интеграллаш йўлларини кўрсатамиз.

1. n-даражали биринчи тартибли тенглама. Тенгламанинг чап томони y' га нисбатан бутун рационал функциядан иборат:

$$(y')^n + P_1(y')^{n-1} + P_2(y')^{n-2} + \qquad + P_{n-1}y' + P_ny = 0,$$

бунда n — натурал сон, P_1, P_2, P_3 $\quad P_n$ лар x ва y нинг функциялари.

Бу тенгламани y' га нисбатан еча оламиз деб фараз қилайлик, у ҳолда y' учун, умуман айтганда, n та ҳар хил ифода ҳосил бўлади:

$$y' = f_1(x, y),\ y' = f_2(x, y),\quad .\,,\ y' = f_n(x, y). \qquad (15.3)$$

Бу ҳолда (15.2) тенгламани интеграллаш биринчи тартибли n та (15.1) тенгламани интеграллашга келтирилади. Уларнинг умумий интеграллари мос равишда қуйидагилар бўлсин:

$$\Phi_1 = (x,\ y,\ C_1) = 0,\ \Phi_2(x,\ y,\ C_2) = 0, \qquad \Phi_n(x,\ y,\ C_n) = 0 \quad (15.4)$$

(15.4) интегралларнинг чап томонларини ўзаро кўпайтириб нолга тенглаймиз:

$$\Phi_1(x,\ y,\ C_1)\cdot\Phi_2(x,\ y,\ C_2) \qquad \Phi_n(x,\ y,\ C_n) = 0. \quad (15.5)$$

Агар (15.5) тенгламани y га нисбатан ечадиган бўлсак, (15.2) тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, (15.5) тенгламанинг ҳар қандай ечими ҳам (15.4) тенгламаларнинг бирини, бинобарин, (15.1) тенгламаларнинг бирортасини ва шундай қилиб, (15.2) тенглама (15.1) тенгламаларга ёйилгани учун уни ҳам қаноатлантиради. Умумийликка асосланиб, (15.5) даги барча C_1, C_2, $\quad C_n$ ўзгармасларни битта C билан алмаштириш ва тенгламани

$$\Phi_1(x,\ y,\ C)\cdot\Phi_2(x,\ y,\ C), \qquad \Phi_n(x,\ y,\ C) = 0 \qquad (15.6)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу (15.2) тенгламанинг умумий ечими бўлади. Бунга (15.6) тенгламанинг n та тенгламага ажралиши

$$\Phi_1(x,\ y,\ C) = 0,\ \Phi_2(x,\ y,\ C) = 0, \qquad \Phi_n(x,\ y,\ C) = 0 \quad (15.7)$$

дан ишонч ҳосил қилиш мумкин, бунда C — исталган қийматларни қабул қилувчи ихтиёрий ўзгармас, шу сабабли (15.4) тенгламадан ҳосил қилинадиган барча ечимлар (15.7) тенгламадан ҳосил қилинадиган ечимлар орасида бўлади.

1-мисол. $(y')^2 - \frac{xy}{a^2} = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(y' - \frac{\sqrt{xy}}{a}\right)\left(y' + \frac{\sqrt{xy}}{a}\right) = 0,$$

бундан

$$y' - \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0 \text{ ва } y' + \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0.$$

Бу иккала тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Уларнинг умумий интеграллари

$$\sqrt{y}-\frac{x\sqrt{x}}{3a}-C=0,\quad \sqrt{y}+\frac{x\sqrt{x}}{3a}-C=0.$$

Шунинг учун берилган тенгламанинг умумий интеграли ушбу кўринишда бўлади:

$$\left(\sqrt{y}-C\right)^2-\frac{x^3}{9a^2}=0.$$

2. y **га нисбатан ечилган ва x қатнашмаган тенглама.** Тенгламанинг кўриниши

$$y=\varphi(y') \tag{15.8}$$

дан иборат.

Бу ҳолда параметр киритиш усулини қўллаш мақсадга мувофиқдир. У қаралаётган ўзгарувчиларни параметр орқали ифодалаш ва ечимни параметрик шаклда излашдан иборат. $y'=p$ деб олайлик. У ҳолда берилган тенглама

$$y=\varphi(p) \tag{15.9}$$

кўринишда ёзилади. Агар x ни p ва C орқали ифодаловчи яна битта тенглама топиш мумкин бўлса, у ҳолда бу иккита тенглама системаси (15.8) тенгламанинг параметрик шаклдаги умумий ечими бўлади. Улардан p ни йўқотиб, x, y ва C орасидаги муносабатни, яъни одатдаги шаклдаги умумий интегрални ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи тенгламани қуйидагича топамиз. $y'=p$ тенгликни $dx=\frac{dy}{p}$ кўринишда қайта ёзиб оламиз, бундан $x=\int\frac{dy}{p}+C$. Бу ердаги интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int\frac{dy}{p}=\frac{y}{p}+\int\frac{y\,dp}{p^2}=\frac{y}{p}+\int\frac{\varphi(p)\,dp}{p^2}$$

Демак,

$$x=\frac{y}{p}+\int\frac{\varphi(p)\,dp}{p^2}+C \tag{15.10}$$

(15.10) ва (15.9) тенгламалар системаси (15.8) тенгламанинг параметрик шаклдаги умумий ечими бўлади. Агар иложи бўлса, бу тенгламалардан p ни йўқотиб, $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ шаклдаги умумий интегрални ҳосил қилинади

2-**мисол.** $y=(y')^2+2(y')^3$ тенгламанинг ечимини параметрик кўринишда топинг.

Ечиш. $y'=p$ деб оламиз, у ҳолда $y=p^2+2p^3$. Буни x бўйича дифференциаллasak:

$$y'=(2p+6p^2)\frac{dp}{dx}\quad \text{ёки}\quad y'=p$$

бўлгани ва р га қисқартириш мумкин бўлгани учун

$$1=(2+6p)\frac{dp}{dx}.$$

Бу ердан

$$dx = (2 + 6p)\,dp \text{ ва } x = 2p + 3p^2 + C.$$

Умумий ечим

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C_1, \\ y = p^2 + 2p^3 \end{cases}$$

системадан иборат. Бу ерда $p \neq 0$ деб фараз қилинади. Агар $p = 0$ бўлса, $y = C$ бўлади, бу ечим эса тенгламани $C = 0$ бўлгандагина қаноатлантиришини кўриш осон.

3. x га нисбатан ечилган ва y қатнашмаган тенглама. Бу ҳолда тенглама

$$x = \varphi(y') \tag{15.11}$$

кўринишга эга.

Юқоридагидек, $y' = p$ деб оламиз, у ҳолда тенглама

$$x = \varphi(p) \tag{15.12}$$

кўринишда ёзилади. $y' = p$ тенгликни $dy = p\,dx$ кўринишда ёзиб оламиз, бундан

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp \tag{15.13}$$

ёки

$$y = p\varphi(p) - \int \varphi(p)\,dp + C_0.$$

(15.12) ва (15.13) тенгламалар системаси (15.11) тенгламанинг параметрик шаклдаги умумий ечимидир. Улардан p параметрни йўқотиб, $\Phi(x, y, C) = 0$ умумий интегрални ҳосил қиламиз.

3-мисол. $x = y' \sin y'$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = p$ деймиз, у ҳолда $x = p \sin p$. Эиди $\frac{dy}{dx} = p$ тенгликни $dy = pdx$ каби ёзиб оламиз. Сўнгра

$$\int pdx = px - \int xdp = px - \int p \sin p\, dp = px + p\cos p -$$
$$- \int \cos p\, dp = px + p \cos p - \sin p + C$$

бўлгани учун $y = px + p\cos p - \sin p + C$. Умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$x = p \sin p,$$
$$y = p^2 \sin p + p \cos p - \sin p + C.$$

4. x ёки y қатнашмаган, бироқ y ёки x га нисбатан ечилган бўлиши шарт бўлмаган тенглама. Тенглама ушбу кўринишга эга

$$F(y, y') = 0 \tag{15.14}$$

ёки

$$F(x, y') = 0.$$

Бу тенгламалардан y ни (биринчи тенгламада) ёки x ни (иккинчи тенгламада), шунингдек $p = y'$ ни t параметр орқали ифодалаш мумкин деб фараз қиламиз. (15.2) ва (15.3) ҳоллардаги каби бу ерда ҳам тенгламанинг умумий ечими параметрик шаклда ҳосил бўлади.

Масалан, $F(y, p) = 0$ тенглама бўлган ҳолни кўрайлик. $y = \varphi(t)$ деб тенгламадан $p = \psi(t)$ ни ёки, аксинча $p = \psi(t)$ деб тенгламадан $y = \varphi(t)$ ни топдик, деб фараз қилайлик. У ҳолда бир томондан, $dy = p\,dx = \psi(t)\,dx$, иккинчи томондан, $dy = \varphi'(t)\,dt$. dy учун иккала ифодани таққослаб, $\psi(t)\,dx = \varphi'(t)\,dt$ ни ҳосил қиламиз, бундан:

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt \text{ ва } x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C.$$

Умумий ечим параметрик шаклда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4-мисол. $y = a\sqrt{1 + (y')^2}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $p = y' = \operatorname{sh} t$ деймиз, у ҳолда $y = a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = a\operatorname{ch} t$ $\frac{dy}{dx} = p$ дан $dx = \frac{dy}{p}$ ни топамиз.

$dy = a\operatorname{sh} t\,dt$ бўлганлигидан $dx = a\,dt$ ва $x = at - C$. Умумий ечим параметрик шаклда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} x = at - C, \\ y = a\operatorname{ch} t. \end{cases}$$

Бундан t параметрни йўқотамиз. $t = \frac{x + C}{a}$ бўлганлигидан

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x + C}{a}$$

16-§. Клеро тенгламаси

Қуйидаги

$$y = xy' + \psi(y') \tag{16.1}$$

тенглама *Клеро тенгламаси* дейилади, бунда $\psi(y')$ y' нинг функцияси. Тенгламани ечиш учун $y' = p(x)$ белгилаш киритамиз. У ҳолда (16.1) тенглама

$$y = xp + \psi(p) \tag{16.2}$$

кўринишга келади. Бу тенгламани, $p' = \frac{dp}{dx}$ эканини ҳисобга олиб, дифференциаллаймиз:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx}.$$

Бундан

$$x\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}=0$$

ёки

$$\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p))=0. \tag{16.3}$$

Бу тенглама

$$\frac{dp}{dx}=0 \tag{16 4}$$

ёки

$$x+\psi'(p)=0 \tag{16.5}$$

бўлган ҳолда айниятга айланади. Ҳар икки ҳолни қараймиз.

а) (16.4) тенгламани интеграллаймиз; $p=C$, C — ихтиёрий ўзгармас. Энди қуйидаги

$$\begin{cases} y=xp+\psi(p) \\ p=C \end{cases}$$

тенгламалар системасидан p параметрни йўқотсак, берилган (16.4) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y=Cx+\psi(C). \tag{16.6}$$

Геометрик нуқтаи назардан бу ечим тўғри чизиқлар оиласини ташкил этади. Ҳосил қилинган ечимни (16.2) тенглама билан солиштириб, Клеро тенгламасининг умумий ечими ундаги y' ҳосилани ихтиёрий ўзгармас C га алмаштириш орқали ҳосил қилинишини кўрамиз.

б) (16.5) тенгламадан p ни x нинг функцияси, яъни $p=p(x)$ сифатида топамиз. Қуйидаги

$$\begin{cases} y=xp+\psi(p), \\ p=p(x) \end{cases}$$

тенгламалар системасидан p параметрни йўқотиб,

$$y=xp(x)+\psi(p(x)). \tag{16.7}$$

функцияни ҳосил қиламиз. Бу функция (16.1) тенгламанинг ечимидир. Ҳақиқатан ҳам, бунга ишонч ҳосил қилиш учун (16.7) дан y' ни топамиз:

$$y'=p(x)+x\frac{dp}{dx}+\psi'(p(x))\cdot\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$y'=p+(x+\psi'(p))\frac{dp}{dx}.$$

(16.5) га кўра охирги ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$y'=p. \tag{16.8}$$

Энди y ва y' нинг (16.7) ва (16.8) формуладаги қийматларини (16.1) тенгламага қўйсак,

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p) \qquad (16.9)$$

айният ҳосил бўлади. Демак, (16.7) ҳақиқатан ҳам берилган тенгламанинг ечими экан. Бу ечимни (16.6) умумий ечимдан C нинг бирорта ҳам қийматидан ҳосил қилиб бўлмайди. Маълумки, бундай ечимлар *махсус ечимлар* дейилади. Кўряпмизки бундай ечимни

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ x + \psi'(p) = 0 \end{cases}$$

системадан ёки қуйидаги

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C). \\ x + \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан C ни йўқотиб ҳосил қилиш мумкин. Бу ечим $y = Cx + \psi(C)$ умумий ечимнинг ўрамасини аниқлайди. Демак, Клеро тенгламасининг махсус ечими $y = Cx + \psi(C)$ тўғри чизиқлар оиласининг ўрамасини аниқлайди.

Шундай қилиб, Клеро тенгламасини ечиш учун аввало берилган тенгламада y' ни C га алмаштириб, унинг умумий ечимини топиш керак:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Шундан сўнг қуйидаги

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C), \\ x = \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

системадан C ни йўқотиб, махсус ечимни (унинг графиги интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси бўлади) топиш керак.

1-мисол. Ушбу

$$y = xy' + y' - y'^2$$

Клеро тенгламасининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг умумий ечими y' ни C билан алмаштириб топамиз:

$$y = Cx + C - C^2.$$

Бу тенгламани C бўйича дифференциаллаймиз:

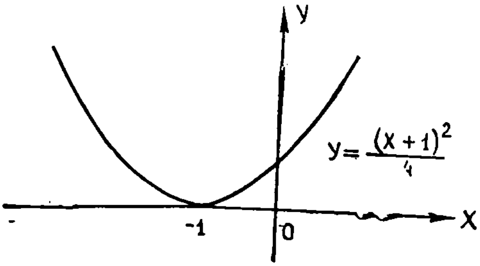
$$0 = x + 1 - 2C.$$

Қуйидаги

$$\begin{cases} y = Cx + C - C^2, \\ 0 = x + 1 - 2C \end{cases}$$

системадан C ни йўқотиб,

$$y = \frac{1}{4}(x + 1)^2$$



16- шакл

махсус ечимни ҳосил қиламиз. У парабола бўлиб, $y = Cx + C - C^2$ умумий ечимлар оиласининг ўрамасини ташкил қилади (16- шакл).

17- §. Лагранж тенгламаси

Ушбу

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{17.1}$$

тенглама *Лагранж тенгламаси* дейилади, бунда $\varphi(y')$, $\psi(y')$ лар y' нинг маълум функциялари. Бундай тенглама ҳам p параметр киритиш усули билан ечилади. $y' = p(x)$ деб белгилаймиз. У ҳолда тенглама ушбу кўринишга келади:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{17.2}$$

Охирги тенгламани x бўйича дифференциаллаб,

$$p = \varphi(p) + (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$p - \varphi(p) = (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} \tag{17.3}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $p - \varphi(p) \neq 0$ ва $p - \varphi(p) = 0$ бўлган ҳолларни қараймиз:

а) $p - \varphi(p) \neq 0$ бўлсин, (17.3) тенгламани $\frac{dx}{dp}$ га нисбатан ечиб, қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Ҳосил қилинган тенглама x ва $\frac{dx}{dp}$ га нисбатан чизиқлидир, демак,

$$x = \Phi(p, C) \tag{17.4}$$

умумий ечимга эга. (17.4) ни (17.2) га қўйиб, y ни p ва C орқали ифодалаймиз:

$$y = \Phi(p, C)\varphi(p) + \psi(p) = f(p, C). \tag{17.5}$$

(17.4) ва (17.5) бизга Лагранж тенгламасининг умумий ечимини параметрик кўринишда беради:

$$\begin{cases} x = \Phi(p, C), \\ y = f(p, C). \end{cases}$$

Бу системада p параметрни йўқотиб Лагранж тенгламасининг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$F(x, y, C) = 0.$$

Тенгламанинг умумий ечимидан ҳосил бўлмайдиган махсус ечими бўлиши мумкин.

б) $p - \varphi(p) = 0$ бўлсин, яъни бирор $p = p_0$ да $\varphi(p_0) = p_0$ бўлсин. Ушбу

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ p = p_0 \end{cases}$$

системада p ни йўқотиб,

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$$

ечимни ҳосил қиламиз. Бу эса Лагранж тенгламасининг махсус ечимидир.

Мисол. Ушбу

$$y = x + y'^3$$

Лагранж тенгламасининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

Ечиш. Бу тенгламада y' ни $p(x)$ га алмаштириб,

$$y = x + p^3 \tag{17.6}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Уни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$p = 1 + 3p^2\frac{dp}{dx}.$$

Бундан

$$p - 1 = 3p^2\frac{dp}{dx}.$$

1. Агар $p - 1 \neq 0$ бўлса, ушбу

$$dx = \frac{3p^2}{p-1}dp$$

тенгламани интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = 3\left(\ln|p - 1| + p + \frac{p^2}{2}\right) + C. \tag{17.7}$$

x нинг ҳосил қилинган ифодасини (17.6) га қўямиз:

$$y = 3\left(\ln|p - 1| + p + \frac{p^2}{2}\right) + C + p^3.$$

(17.6) ва (17.7) лар Лагранж тенгламасининг умумий ечимини параметр кўринишида беради.

2. Агар $p - 1 = 0$ бўлса, $p = 1$ қийматни (17.6) тенгламага қўйиб,

$$y = x + 1$$

махсус ечимни ҳосил қиламиз.

18-§. Изогонал траекториялар

Ҳосилага нисбатан ечилмаган тенгламаларга кўпинча турли геометрик масалалар, масалан, изогонал траекториялар тўғрисидаги масалалар олиб келади.

Агар

$$F(x, y, a) = 0 \tag{18.1}$$

(a — параметр) эгри чизиқларнинг бир параметрли оиласи бўлса, у ҳолда унинг *изогонал траекториялари* деб, оила эгри чизиқлари билан бир хил φ бурчак остида кесишадиган эгри чизиқларнинг бошқа оиласига айтилади.

Хусусий ҳолда, агар $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, траекториялар *ортогонал траекториялар* деб аталади.

Берилган эгри чизиқлар оиласи (18.1) нинг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунинг учун (18.1) тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{18.2}$$

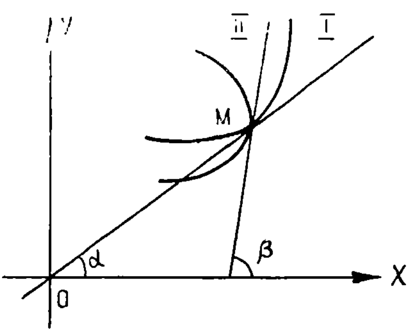
(18.1) ва (18.2) тенгламалардан a параметрни йўқотамиз ва эгри чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламаси

$$y' = f(x, y) \tag{18.3}$$

кўринишга эга бўлсин деб фараз қилайлик.

$M(x, y)$ нуқтада кесишувчи иккита эгри чизиқ орасидаги бурчак деб, маълумки, эгри чизиқларга бу нуқтада ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади (17-шакл). Агар (18.1) оиласининг I эгри чизиғига M нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқ билан ташкил қилган бурчагини α билан, шу оиланинг II эгри чизиғига ана шу нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқ билан ташкил қилган бурчагини β орқали белгиласак, у ҳолда $\varphi = \pm(\beta - \alpha)$ ёки $\beta = \alpha \pm \varphi$ бўлади. Бундан

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi}$$



17- шакл

$\operatorname{tg}\varphi$ катталик берилган, уни k орқали белгилаймиз, $\operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)$. Шунинг учун

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x, y) \pm k}{1 \pm kf(x, y)}$$

Изогонал траекториянинг исталган нуқтасининг координаталари билан бу нуқтадаги уринманииг бурчак коэффициенти орасидаги муносабатни, яъни траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини ҳосил қилдик. $\operatorname{tg}\beta$ ни y' орқали белгилаймиз, у ҳолда

$$y' = \frac{f(x, y) \pm k}{1 \pm kf(x, y)}. \tag{18.4}$$

Бу дифференциал тенгламанинг умумий интеграли (18.1) эгри чизиқлар оиласи учун изогонал траекториялар оиласи бўлади, улар (18.1) эгри чизиқларни бир хил φ бурчак остида кесиб ўтади.

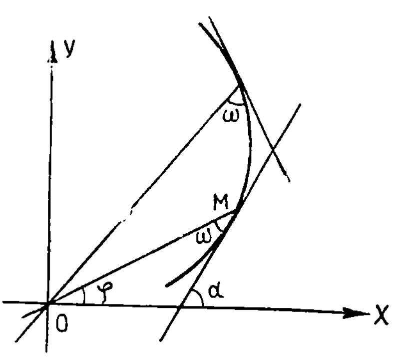
Агар траекториялар ортогонал бўлса, у ҳолда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

ва ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \quad \text{ёки} \quad -\frac{1}{y'} = f(x, y). \tag{18.5}$$

Шундай қилиб қуйидаги қоида ҳосил бўлади: берилган (18.1) эгри чизиқлар оиласи учун изогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини топиш учун бу оиланинг (18.3) дифференциал тенгламасида y' ни $\frac{y' \pm k}{1 \pm ky'}$ билан алмаштириш лозим, бу ерда k — эгри чизиқларнинг траекториялар билан кесишиш бурчагининг тангенси. Хусусан, ортогонал траекториялар учун y' ни $\left(-\frac{1}{y'}\right)$ га алмаштириш керак.



18- шакл

Мисол. Битта O нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқларни бир хил ω бурчак остида кесиб ўтувчи эгри чизиқларнинг, яъни маркази координаталар бошида бўлган тўғри чизиқлар дастасиинг изогонал траекторияларини топинг (18- шакл).

Ечиш. O нуқтани координаталар боши учун қабул қиламиз. Агар изланаётган эгри чизиқнинг исталган $M(x, y)$ нуқтасидаги уринманинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчагини α орқали, бу нуқта радиус-векторининг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини φ орқали белгиласак,

$\alpha = \varphi + \omega$ бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонидан тангенслар олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\omega}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \text{ бўлгани учун}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + k}{1 - k \cdot \frac{y}{x}} \tag{18.6}$$

кўринишдаги бир жинсли дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз, бунда $\operatorname{tg}\omega = k$ деб олинди. $y = xz$ деймиз, у ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z.$$

Натижада ўзгарувчилари ажраладиган ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{z + k}{1 - kz} \text{ ёки } x(1 - kz)\frac{dz}{dx} = k(z^2 + 1).$$

Бунда

$$\frac{1 - kz}{z^2 + 1}dz = k\frac{dx}{x}$$

Бунинг умумий интеграли қуйидагича бўлади:

$$\operatorname{arctg} z - \frac{k}{2}\ln(z^2 + 1) = k\ln x - k\ln C,$$

ёки

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

ёки қутб координаталарда умумий ечим

$$r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$$

кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, изланаётган эгри чизиқлар логарифмик спираллардан иборат экан.

19-§. Изоклинлар усули

Агар биринчи тартибли дифференциал тенгламани интеграллашнинг юқорида таҳлил қилинган усулларидан ҳеч бири мақсадга эриштирмаса ёки мураккаб ҳисоблашлар талаб қилинса, тақрибий ечишга мурожаат қилиш мумкин. Бундай усуллардан бирини, яъни график усул — *изоклинлар усулини* баён қиламиз.

Ушбу $y' = f(x,\ y)$ дифференциал тенглама Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаси ўринли бўлган D соҳанинг ҳар бир $P(x,\ y)$ нуқтасида y' ҳосиланинг қийматини, яъни бу нуқта орқали ўтувчи интеграл эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти $k = \operatorname{tg}\alpha = y'$ ни аниқлайди. Бу миқдорни график тарзда бурчак коэффициенти $y' = f(x,\ y) = k$ га тенг тўғри чизиқ кесмаси орқали тасвирлаш мумкин.

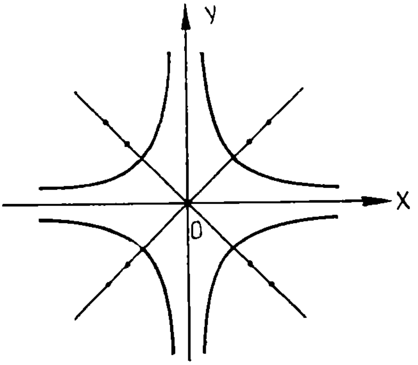
Ҳар бир нуқтасида бирорта скаляр миқдорнинг қиймати берилган соҳа бу *миқдорнинг скаляр майдони* дейилади. Бизнинг ҳолда $y' = f(x,\ y)$ дифференциал тенглама Oxy текисликда йўналишлар майдонини аниқлайди. Геометрик нуқтаи назардан дифференциал тенгламани интеграллаш шундай эгри чизиқларни топишдан иборатки, уларга ўтказилган уринмаларнинг йўналишлари тегишли нуқталардаги майдон йўналиши билан бир хилдир.

Майдон йўналишлари бир хил бўлган $y' = k$ (k-const) нуқталар тўплами тенгламанинг *изоклини* дейилади.

Равшанки, $y' = f(x,\ y)$ дифференциал тенглама учун изоклин тенгламаси $f(x,\ y) = k$ бўлади. k нинг турли қийматларида турли изоклинларни ҳосил қиламиз. Изоклинлар оиласини топиб, интеграл эгри чизиқлар оиласини тақрибий чизиш мумкин.

Мисол. Ушбу $y' = -\frac{y}{x}$ дифференциал тенглама учун изоклинлар, йўналишлар майдонини топинг. Тенгламани ечмасдан интеграл эгри чизиқларни чизинг.

Ечиш. Изоклинлар тенгламалари: $-\frac{y}{x} = k$ ёки $y = -kx$ бўлиб, улар 19-шаклда кўрсатилган тўғри чизиқлар оиласидир.



19-шакл

20-§. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар

Тенгламанинг тартиби бирдан юқори бўлса, *юқори тартибли дифференциал тенглама* дейилади. n-тартибли тенглама $y^{(n)}$ ҳосиладан ташқари эркли ўзгарувчини ҳамда қуйи тартибли ҳосилаларни ҳам ўз ичига олиши мумкин, бинобарин, бундай тенгламанинг умумий кўриниши

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\qquad ,\ y^{(n)}) = 0 \qquad (20.1)$$

ёки, агар мумкин бўлса, юқори ҳосилага нисбатан ечилган

$$y^{(n)} = f(x,\ y',\ y'',\qquad y^{(n-1)}) \qquad (20.2)$$

шаклда бўлиши мумкин.

20.1 Коши масаласи. Умуман олганда, дифференциал тенгламани функцияларнинг бутун бир системаси қаноатлантириши мумкин. Тайин ечимни ажратиб кўрсатиш учун қўшимча шартлар ҳам керак бўлади. Масалан, n-тартибли тенглама учун бирор $x = x_0$ нуқтада изланаётган y функциянинг қиймати ва унинг n — 1-тартибгача барча ҳосилаларининг қийматлари берилади, яъни

$$\left.\begin{aligned} y\big|_{x=x_0} &= y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} &= y_0', \\ &\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (20.3)$$

(20.3) n-тартибли дифференциал тенглама учун *бошланғич шартлар* дейилади. (20.1) ёки (20.2) тенгламанинг (20.3) бошланғич шартлар системасини қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш масаласи *Коши масаласи* дейилади.

Агар иккинчи тартибли

$$F(x,\ y,\ y'\ y'') = 0 \text{ ёки } y'' = f(x,\ y,\ y') \qquad (20.4)$$

тенглама қараладиган бўлса, у ҳолда $x = x_0$ да ечим учун бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} = y_0', \end{cases}$$

бу ерда x_0, y_0, y_0' — берилган сонлар. Бу шартларнинг геометрик маъноси қуйидагича: текисликнинг берилган $P_0(x_0,\ y_0)$ нуқтасида бу нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиққа ўтказилган уринма бурчак коэффициенти y_0' ҳам берилган. Шундай қилиб (20.4) дифференциал тенглама учун Коши масаласини ечиш — бу шундай $y = \varphi(x)$ интеграл эгри чизиқни топиш демакки, у $P_0(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтади ва бу нуқтада уринманинг бурчак коэффициенти берилган y_0' га тенг бўлади.

20.2. Дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар тўғрисида тушунча. (20.1) ёки (20.2) тенгламалар учун ўрганиладиган масалалар Коши масаласи билан чекланмайди. Кўпгина физика ва техника масалалари кўпинча бошлангич шартларга эмас, балки бошқа турдаги қўшимча шартларга олиб келади. Бундай шартларни *чегаравий шартлар* деб аташ қабул қилинган. Масалан, изланаётган функциянинг бир нечта нуқтадаги қиймати маълум бўлганда дифференциал тенгламанинг ечимини топиш талаб этилади. Бу шартларни қаноатлантирадиган ечимни топиш масаласи *чегаравий масала* дейилади.

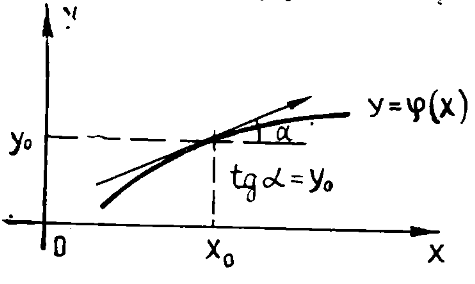
20.3. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги тўғрисидаги теорема. *Агар* $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ y_0'',\qquad y_0^{(n-1)})$ *нуқтани ўз ичига олган бирор* D *соҳада узлуксиз* $f(x,\ y,\ y',\ y'',\qquad y^{(n-1)})$ *функция узлуксиз* $\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y'},\ \frac{\partial f}{\partial y''},\qquad \frac{\partial f}{\partial y^{n-1}}$ *хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда* $y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',\qquad y^{(n-1)})$ тенгламанинг

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad y^{(n=1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n=1)}$$

шартларни қаноатлантирадиган $y = \varphi(x)$ *ечими мавжуд бўлиб, бу ечим ягона бўлади.*

Бу теорема Коши масаласи ечимга эга бўлишининг етарли шартларини тайинлайди. Агар қаралаётган тенглама иккинчи тартибли, яъни $y'' = f(x, y, y')$ кўринишда бўлса, у ҳолда маълумки, $y|_{x=x_0} = y_0$ ва $y'|_{x=x_0} = y'_0$ шартлар $P_0(x_0, y_0)$ нуқтани аниқлаб, бу нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиғига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти y'_0 бўлади. Бу ҳолда теорема шартлари бажарилганда уринмасининг бурчак коэффициенти y'_0 маълум бўлган берилган $\Phi_0(x_0, y_0)$ нуқтадан битта интеграл эгри чизиғи ўтади (20-шакл).

20.4. Умумий ва хусусий ечимлар тўғрисида тушунча



20- шакл.

Таъриф. (20.2) дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб, тенгламанинг тартиби қанча бўлса шунча ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлган шундай $y = \varphi(x, C_1, C_2, \quad , C_n)$ функцияга айтиладики, бу функция учун қуйидаги шартлар бажарилади:

а) у C_1, C_2, $\quad C_n$ ихтиёрий ўзгармасларнинг исталган қийматларида (20.2) тенгламани қаноатлантиради;

б) бошланғич (20.3) шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам, ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\quad , \overline{C}_n$ қийматларини топиш мумкинки, бу қийматларда $y = \varphi(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \quad , \overline{C}_n)$ ечим (20.3) бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Умумий ечимдан ихтиёрий ўзгармасларнинг маълум қийматларида ҳосил бўладиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

21•§. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган тенгламалар ва уларнинг амалий татбиқи

Тартибини пасайтириш мумкин бўлган тенгламаларнинг баъзи турларини кўриб чиқамиз.

1. Ушбу

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (21.1)$$

тенгламанинг тартиби бевосита кетма-кет [интеграллаш йўли билан пасайтирилади.

(21.1) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y^{(n=1)} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Шу тарзда талаб қилинган марта интеграллаб (21.1) тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

1-мисол. Ушбу $y''' = \sin x - \cos x$ тенгламанинг

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = -1, \quad y''|_{x=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Кетма-кет уч марта интеграллаб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y'' = -\cos x - \sin x + C_1,$$
$$y' = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2,$$
$$y = \cos x + \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

C_1, C_2, C_3 ларни бошланғич шартлардан топамиз:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -1 - 0 + C_1, \\ -1 &= -0 + 1 + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 1 &= 1 + 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3. \end{aligned}\right\}$$

Бу ердан $C_1 = 1$, $C_2 = -2$, $C_3 = 0$. Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y = \cos x + \sin x + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

2. Ушбу

$$y^{(n)} = f(x, \; y^{(k)}, \; y^{(k+1)}, \qquad , y^{(n-1)}) \tag{21.2}$$

кўринишдаги ўнг томонида изланаётган y функция ва унинг $(k-1)$ тартибгача ҳосилалари иштирок этмайдиган тенгламанинг тартиби қуйидаги алмаштириш орқали k бирликка пасайтирилади: $y^{(k)} = p(x)$, бу ерда $p = p(x)$ — янги изланаётган функция. (21.1) тенглама бундай алмаштиришдан сўнг қуйидаги кўринишга келади:

$$p^{(n-k)} = f(x, \; p, \; p', \; p'', \qquad p^{(n-k-1)}).$$

$(n-k)$-тартибли тенгламани ҳосил қилдик. Бу тенгламани интеграллаб, изланаётган функцияни аниқлаймиз:

$$p = \varphi(x, \; C_1, \; C_2, \qquad C_{n-k}),$$

сўнгра $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \quad , C_{n-k})$ тенгламани k марта интеграллаб, умумий ечимни топамиз.

2-мисол. Ушбу

$$y^{\mathrm{IV}} = \sqrt{y'''}$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y''' = p(x)$ деймиз, у ҳолда $y^{\mathrm{IV}} = p'$ ва берилган тенглама $p' = \sqrt{p}$ кўринишга келади. Ўзгарувчилари ажраладиган функцияга нисбатан биринчи тартибли тенгламани ҳосил қилдик:

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{p} \text{ ёки } \frac{dp}{\sqrt{p}} = dx.$$

Интеграллаб, топамиз:

$$2\sqrt{p} = x + C_1 \text{ ёки } p = \frac{1}{4}(x + C_1)^2.$$

Демак,

$$y''' = \frac{1}{4}(x + C_1)^2,$$

бу ердан

$$y'' = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2,$$

$$y' = \frac{1}{48}(x + C_1)^4 + C_2x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{240}(x + C_1)^5 + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Эслатма. Бундай кўринишдаги тенгламаларнинг хусусий ҳоли изланаётган функция ошкор қатнашмаган иккинчи тартибли $y'' = f(x, y')$ тенгламадир. Бу ерда $y' = p(x)$ ўрнига қўйиш ёрдамида тартиб бир бирликка пасайтирилади.

3-мисол. Ушбу $y'' = \frac{2xy'}{1 + x^2}$ тенгламанинг $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Умумий ечимни топамиз: $y' = p(x)$ алмаштириш бажарамиз, бу ердан $y'' = p'(x)$. Натижада ўзгарувчилари ажраладиган қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$p' = \frac{2xp}{1 + x^2} \text{ ёки } \frac{dp}{p} = \frac{2x\,dx}{1 + x^2};$$

бу ердан:

$$\ln p = \ln|1 + x^2| + \ln C_1 \text{ ёки } p = C_1(1 + x^2).$$

Ўз навбатида бу ердан:

$$y' = C_1(1 + x^2) \text{ ва } y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

C_1 ва C_2 ларни топиш учун бошланғич шартлардан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} 3 = C_1 \cdot 1 \\ 1 = C_1 \cdot 0 + C_2. \end{cases}$$

Булардан $C_1 = 3$, $C_2 = 1$.
Демак,

$$y = 3\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + 1$$

хусусий ечим бўлади.

3. Ушбу

$$y^{(n)} = f(y,\ y',\ y'',\qquad ,\ y^{(n-1)}) \qquad (21.3)$$

кўринишдаги тенгламанинг ўзига хос томони шундаки, унинг ўнг томонида эркли ўзгарувчи x ошкор қатнашмайди. $y' = p(y)$ ўрнига қўйиш (21.3) тенгламанинг тартибини бир бирликка пасайтиришга имкон беради. Бунда янги эркли ўзгарувчи сифатида y қабул қилинади. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\ \frac{dy}{dx} = p'\cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p'p) = \frac{d}{dy}(p'p)\,\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dp'}{dy}\ p + p'\,\frac{dp}{dy}\right)\ p =$$

$$= (p''p + p'p')\,p = p''p^2 + (p')^2\,p \text{ ва ҳоказо.}$$

$y',\ y'',\quad .,\ y^{(n)}$ ларни (21.3) тенгламага қўйиб, $(n = 1)$-тартибли тенгламага эга бўламиз.

4-мисол. Ушбу $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = p(y)$, $y'' = p'p$ деб, Бернулли тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$pp' + p^2 = 2e^{-y} \text{ ёки } p' + p = \frac{2e^{-y}}{p}.$$

$p = u\cdot v$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз, бу ердан $p' = u'v + uv'$. Кейинги тенглама қуйидагича ёзилади:

$$u'v + uv' + uv = \frac{2e^{-y}}{uv} \text{ ёки } u'v + (v' + v)\,u = \frac{2e^{-y}}{uv}.$$

v функцияни шундай танлаймизки, қавс ичида турган ифода нолга тенг бўлсин:

$$v' + v = 0. \qquad (21.4)$$

У ҳолда

$$u'v = \frac{2e^{-y}}{uv}. \qquad (21.5)$$

(21.4) тенгламани интеграллаймиз.

$\frac{dv}{v} = -dy$ ёки $\ln v = -y$, бу ердан

$$v = e^{-y}. \qquad (21.6)$$

(21.6) ни (21.5) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$uu' = \frac{2e^{-y}}{e^{-2y}} \text{ ёки } u\,du = 2e^{y}\,dy.$$

Интегралласак,

$$\frac{u^2}{2} = 2e^y + C_1$$

ёки

$$u = \pm \sqrt{4e^y + 2C_1} \qquad (21.7)$$

бўлади. Топилган u ва v функциялардан фойдаланиб, изланаётган p оралиқ функцияни тузамиз:

$$p = uv = \pm e^{-y} \sqrt{4e^y + 2C_1}$$

ёки

$$p = \pm \sqrt{4e^{-y} + 2C_2 e^{-2y}}$$

$p = \frac{dy}{dx}$ алмаштириш бажариб, ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{4e^{-y} + 2C_1 e^{-2y}}$$

Буни интеграллаб, умумий интегрални топамиз:

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{4e^y + 2C_1} = x + C_2$$

ёки $(x + C_2)^2 = e^y + \overline{C}_1$, бу ерда $\overline{C}_1 = \frac{C_1}{2}$ Тартиби пасаядиган дифференциал тенгламаларнинг амалий татбиқига доир бир нечта мисоллар кўрайлик.

21.1. Метеорнинг тўғри чизиқли ҳаракати. Дастлаб тинч ҳолатда бўлган, Ердан чексиз катта масофадаги метеор тўғри чизиқли ҳаракат қилиб Ерга тушмоқда. Метеорнинг тезланиши ундан Ер марказигача бўлган масофанинг квадратига тескари пропорционал бўлсин. Метеор Ерга қандай тезлик билан урилишини аниқланг.

Ечиш. Метеордан Ер марказигача бўлган масофани r орқали белгилаймиз ва

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}$$

дифференциал тенгламани тузамиз. Тезланиш $w = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ (бу ерда v — метеорнинг ҳаракат тезлиги) бўлгани учун тенглама ушбу кўринишга келади:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{r^2} \text{ ва } v\frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^2},$$

чунки

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}.$$

Кейинги тенгламанинг умумий интеграли

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{k}{r} + C$$

кўринишга эга, бунда C ни $r \to \infty$ да $v = 0$ эканлигидан фойдаланиб аниқлаймиз, яъни $C = 0$, демак $v^2 = -\frac{2k}{r}$.

Ерга тушишдаги тезликни r ўрнига Ер радиуси $R \approx 6{,}377 \cdot 10^6$ м ни қўйиб топамиз, пропорционаллик коэффициенти k ни Ердаги оғирлик кучи тезланиши $g = 9{,}8$ м/с^2 ва R орқали ифодалаш мумкин: $\frac{k}{R^2} = -g$, бундан $k = -gR^2$. [Масофа $r = 0$ (саноқ боши) дан бошлаб ҳисобланганлиги ва тезланиш марказга томон йўналганлиги учун манфий ишора олинди.]

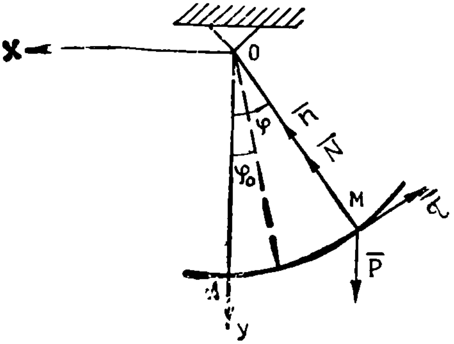
Шундай қилиб, изланаётган тезликнинг қиймати

$$v = \sqrt{2gR^2/R} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}377 \cdot 10^6} =$$
$$= 11180 \text{ м/с} \approx 11 \text{ км/с}$$

бўлади.

21.2. Математик тебрангич. Вертикал текисликда жойлашган силлиқ айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсирида ҳаракатланувчи моддий нуқта *математик тебрангич* дейилади. Масалан, бир учи маҳкамланган, чўзилмайдиган ва оғирлиги ҳисобга олинмайдиган ипга осилган M моддий нуқтани математик тебрангич деб қараш мумкин. M нуқтанинг ҳолатини ипнинг вертикал билан ташкил қилган φ бурчаги орқали аниқлаймиз.

Айтайлик, нуқтанинг массаси m, ипнинг узунлиги l га тенг бўлсин. M нуқтага унинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ва ипнинг реакцияси $\vec{N}$ таъсир этади (21- шакл).



21- шакл

M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун

$$v_\tau = \dot{s} = l\dot{\varphi},\ \rho = l,\ F_\tau = P_\tau = -mg\sin\varphi,\ F_n = P_n = mg\cos\varphi$$

бўлишини эътиборга олиб, ёза оламиз:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi,$$

$$ml\dot{\varphi}^2 = -mg\cos\varphi + N_n.$$

Бу тенгламаларни

$$\ddot{\varphi} + \frac{y}{l}\sin\varphi = 0, \qquad (21.8)$$

$$N_n = ml\mathring{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \qquad (21.9)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. (21.8) тенглама воситасида математик тебрангичнинг ҳаракат қонуни, (21.9) ёрдамида эса ипнинг реакция кучини аниқлаш мумкин.

(21.9) дан кўрамизки, ипнинг реакциясини аниқлаш учун $\mathring{\varphi}^2$ катталикни φ бурчакнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. Бунинг учун

$$\overset{\circ\circ}{\varphi} = \frac{d\mathring{\varphi}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \mathring{\varphi}\,\frac{d\mathring{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{d\mathring{\varphi}^2}{d\varphi}$$

муносабат ўринли бўлишини назарда тутиб, (21.8) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{1}{2}\,ld\mathring{\varphi}^2 = -g\sin\varphi\,d\varphi.$$

Бу тенгламани $t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$, $\mathring{\varphi} = \mathring{\varphi}_0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2}\,l\int_{\mathring{\varphi}_0}^{\mathring{\varphi}} d\mathring{\varphi}^2 = -g\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi$$

ёки

$$l\mathring{\varphi}^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + l\mathring{\varphi}_0^2. \qquad (21.10)$$

(21.10) ни (21.9) га қўйиб, N_n ни аниқлаймиз:

$$N_n = ml\mathring{\varphi}_0^2 + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Агар нуқтанинг бошланғич тезлиги $v_0 = l\mathring{\varphi}_0$ бўлса, ипнинг реакцияси

$$N_n = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) \qquad (21.11)$$

формуладан аниқланади.

Шундай қилиб, ипнинг реакцияси тебрангичнинг бошланғич оғиш бурчаги φ_0 ва бошланғич тезлиги v_0 га боғлиқ бўлади.

(21.11) дан фойдаланиб, нуқта доимо боғланишни қаноатлантириши учун, яъни ипнинг эгилмаслик шартидан бошланғич тезлик қандай қийматга эга бўлишини аниқлаш мумкин. Бунинг учун $\varphi = \pi$ бўлганда N_n минимум қийматга эришишини ва φ_0 нинг ҳар қандай қийматида $(N_n)_{\min} \geqslant 0$ бўлиши учун

$$\cdot(N_n)_{\min} = \left[\frac{mv_0^2}{l} - mg(3 + 2\cos\varphi_0)\right] > 0$$

ёки

$$v_0^2 > (3 + 2\cos\varphi_0)\,gl$$

шарт бажарилишини назарда тутамиз.

Хусусан, $\varphi_0 = 0$ бўлса,

$$v_0 > \sqrt{5gl} \qquad (21.12)$$

шарт бажарилганда ип доимо таранг ҳолда бўлади.

Дастлаб тебрангичнинг $\sin\varphi \approx \varphi$ шартни қаноатлантирувчи кичик тебранма ҳаракатини текширамиз. Бу ҳолда тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\varphi + \frac{g}{l}\varphi = 0. \qquad (21.13)$$

(21.13) нинг умумий ечимини

$$\varphi = a\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right) \qquad (21.14)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бунда a бурчак амплитудасини, α бошланғич фазани ифодалайди, улар масаланинг бошланғич шартларидан аниқланади.

Шундай қилиб, математик тебрангичнинг кичик тебранишлари гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

Тебрангичнинг кичик тебранишлар даври

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (21.15)$$

формуладан аниқланади. (21.15) дан кўрамизки, тебрангичнинг кичик тебранишлар даври бошланғич оғиш бурчаги φ_0 га боғлиқ бўлмайди.

φ бурчак ихтиёрий қийматни қабул қилиши мумкин бўлган ҳолда тебрангичнинг ҳаракатини текшириш учун (21.10) ни $t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$, $\overset{\circ}{\varphi} = \overset{\circ}{\varphi}_0 = 0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз. У ҳолда (21.10) ни

$$\varphi^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шу сабабли

$$\pm\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} \qquad (21.16)$$

муносабат ўринли бўлади. Агар тебрангич φ бурчак ортадиган йўналишда ҳаракатланса, (21.16) да мусбат ишора, акс ҳолда манфий ишора олинади.

(21.10) да ўзгарувчиларни ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt.$$

Бу тенгламада косинусларнн ярим бурчак синуслари

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

билан алмаштирсак, тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt. \qquad (21.17)$$

(21.17) ни интеграллаш учун $\sin\frac{\varphi_0}{2}$ ни k билан белгилаб, φ нинг ўрнига

$$\sin\frac{\varphi}{2}=k\sin\alpha \qquad (21.18)$$

тенглик ёрдамида аниқланадиган α бурчакни киритамиз. У ҳолда

$$\frac{d\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=k\cos\alpha\,d\alpha,$$

бундан

$$d\varphi=\frac{2k\cos\alpha\,d\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{2k\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

Натижада (21.17) ни

$$\frac{\pm d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt \qquad (21.19)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $t=0$ да $\varphi=\varphi_0$ бошланғич шартларни ҳисобга олиб, (21.18) дан $\alpha=\alpha_0$ бошланғич қиймат учун

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}=k\sin\alpha_0$$

ёки

$$\alpha_0=\frac{\pi}{2},\quad \sin\alpha_0=1$$

ифодани оламиз.

Шундай қилиб, (21.19) ни 0 дан t гача интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$t=\pm\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}. \qquad (21.20)$$

Бинобарин, t вақт билан α орасидаги боғланиш биринчи турдаги эллиптик интеграл орқали ифодаланади.

(21.15) га асосан $\overset{\circ}{\varphi}{}^2$ манфий қийматга эга бўлмагани учун $\cos\varphi\geqslant\cos\varphi_0$ ёки $|\varphi|\leqslant\varphi_0$, яъни φ бурчак $-\varphi_0$ дан $+\varphi_0$ гача ўзгаради. Шунингдек, OA вертикалга нисбатан симметрик бўлган нуқталарда $\overset{\circ}{\varphi}{}^2$ бир хил қийматга эга бўлади ҳамда $\varphi=\pm\varphi_0$ да $\overset{\circ}{\varphi}{}^2$ нолга тенг бўлади. Бинобарин, худди кичик тебранишлар каби φ бурчак ихтиёрий қийматни қабул қилганда ҳам тебрангич φ_0 бурчак билан аниқланадиган чекка ҳолатлар орасида тебранма ҳаракатда бўлади.

Мазкур тебранишлар даври T_1 ни аниқлаш учун (21.20) даги интегралнинг қуйи чегараси тебрангич $\varphi = \varphi_0$ га оғгандаги чекка ҳолатига мос келишини эътиборга оламиз. Бу ҳолатдан тебрангич $\varphi = -\varphi_0$ чекка ҳолатгача ҳаракатланганда (21.20) да манфий ишора олинади. Тебрангич чекка ҳолатдан энг пастки ҳолатигача кўчишида ўтган вақт тебранишнинг чорак даврига тенг бўлишини эътиборга олсак,

$$\frac{1}{4}T_1 = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \qquad (21.21)$$

ёки

$$T_1 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K.$$

Бунда $K = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$ биринчи турдаги эллиптик интегрални ифодалайди. K нинг қиймати махсус жадвалдан аниқланади.

(21. 21) даги интеграл остидаги ифодани қаторга ёйиб,

$$\frac{d\alpha'}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\alpha+\quad .\right)d\alpha$$

ифодани оламиз. Бундан ташқари

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\alpha\, d\alpha = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб, тебраниш даври учун

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\ldots\right] \qquad (21.22)$$

формулани оламиз.

(21.22) дан кўрамизки, бошланғич оғиш бурчаги φ_0 катталашган сари тебраниш даври T_1 ҳам орта боради.

φ_0 кичик қиймати учун $\sin\frac{\varphi_0}{2} \approx \varphi_0/2$ деб, (21.22) да фақат биринчи иккита ҳадни эътиборга олсак, тебраниш даврининг тақрибий қиймати қуйидагича ёзилади:

$$T_1 \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\varphi_0^2}{16}\right) \qquad (21.23)$$

(21.15) ва (21.23) формуладаги тебраниш даври бир-биридан $\left(1+\frac{\varphi_0^2}{16}\right)$ га фарқ қилади. Бу фарқнинг қиймати φ_0 га боғлиқ бўлиб, қуйидаги жадвалдан аниқланади:

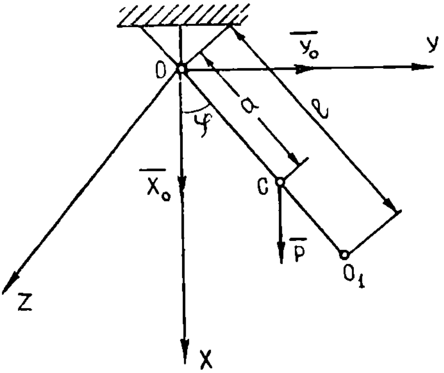
1-жадвал

φ_0	10°	20°	40°	60°	90°
$1+\frac{\varphi_0^2}{16}$	1,0019	1,0076	1,0304	1,0684	1,1539

21.3. Физик тебрангич. Массалар маркази орқали ўтмайдиган горизонтал ўқ атрофида ўзининг оғирлик кучи $\vec{P} = M\vec{g}$ таъсирида ҳаракатланувчи жисм *физик тебрангич* дейилади.

Физик тебрангичнинг айланиш ўқи тебрангичнинг *осилиш ўқи* дейилади. *OC* масофани *a* билан белгиласак, тебрангичнинг ҳолати *OC* чизиқнинг вертикалдан оғиш бурчаги φ билан аниқланади.

Горизонтал *Z* ўқни тебрангичнинг айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамиз (22-шакл). *Oxy* текисликни тебрангичнинг оғирлик маркази *C* орқали ўтказиб, бу текислик учун шакл текислигини оламиз. Тинч ҳолатдан φ бурчакка оғдирилган тебрангичга унинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ва *O* нуқтадаги цилиндрик шарнир реакция кучининг $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ ташкил этувчилари таъсир этади. Ишқаланиш кучини ҳисобга олмаймиз.



22-шакл

Тебрангичга таъсир этувчи кучларнинг *Z* ўққа нисбатан бош моменти

$$M_z^e = M_z(\vec{P}) + M_z(\vec{X}_0) + M_z(\vec{Y}_0) = Pa\sin\varphi$$

бўлгани учун

$$I_z \overset{\circ}{\varphi} = -Pa\sin\varphi$$

ёки

$$\varphi + \frac{Pa}{I_z}\sin\varphi = 0 \qquad (21.24)$$

тенгламани оламиз. Бунда I_z тебрангичнинг осилиш ўқига нисбатан инерция моментини ифодалайди.

(21.24) тенглама *физик тебрангич* ҳаракатининг *дифференциал тенгламаси* дейилади. $\sin\varphi \approx \varphi$ муносабат ўринли бўладиган физик тебрангич кичик тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламасини

$$\overset{\circ\circ}{\varphi} + \frac{Mga}{I_z}\varphi = 0 \qquad (21.25)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$\varphi = A\sin\left(\sqrt{\frac{Mga}{I_z}}t + \varepsilon\right) \cdot \qquad (21.26)$$

(21.26) дан кўрамизки, φ бурчак тебраниш даври

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mga}} \qquad (21.27)$$

бўлган гармоник тебранма ҳаракат қонуни асосида ўзгаради.

(21.24) тенглама математик тебрангич ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (21.8) дан фақат $\sin\varphi$ олдидаги ўзгармас коэффициентлари билан фарқ қилади.

Тебраниш даври физик тебрангичнинг тебраниш даврига тенг бўлган математик тебрангичнинг узунлигини аниқлаймиз. Бунинг учун (21.24) ва (21.8) тенгламаларда $\sin\varphi$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаймиз:

$$\frac{Pa}{I_z} = \frac{g}{l},$$

бундан

$$l = \frac{I_z g}{Pa} = \frac{I_z}{Ma}. \qquad (21.28)$$

(21.28) формула ёрдамида аниқланадиган l катталикка *физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги* дейилади.

Гюйгенс — Штейнер теоремасига биноан

$$I_z = I_c + Ma^2 \qquad (21.29)$$

ни ёзамиз, бунда I_c — тебрангичнинг огирлик маркази орқали Z ўққа параллел равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти.

(21.29) ни (21.28) га қўйиб, физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги учун

$$l = \frac{I_c}{Ma} + a \qquad (21.30)$$

ифодани оламиз.

О нуқтадан оғирлик маркази йўналишида бу катталикни қўйиб, O_1 нуқтани оламиз (22-шакл). O_1 нуқта *физик тебрангичнинг силкиниш маркази* дейилади. Оғирлик марказидан силкиниш марказигача бўлган масофа учун

$$a_1 = \frac{I_c}{Ma} \qquad (21.31)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар физик тебрангичнинг осилиш ўқи учун силкиниш маркази орқали ўтувчи ўқни олсак, (21.28) га кўра келтирилган узунлик учун

$$l_1 = \frac{I_c}{Ma_1} + a_1$$

формулани оламиз. (21.31) га асосан

$$a = \frac{I_c}{Ma_1}.$$

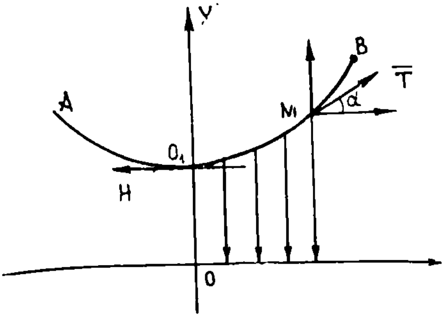
Бинобарин

$$l_1 = a + a_1 = l$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, *О* ва O_1 нуқталардан ўтувчи ўқлар учун l_1 ва l келтирилган узунликлар ўзаро тенг бўлади. Бошқача айтганда, силкиниш маркази орқали ўтувчи ўқни осилиш ўқи учун олсак, у ҳолда аввалги осилиш ўқи янги силкиниш марказини ифодалайди, яъни ўқлар ўрнини ўзаро алмаштириш мумкин.

21.4. Ипнинг мувозанати. Иккита учи билан *А* ва *В* нуқталарга осиб қўйилган оғир эгилувчан бир жинсли чўзилмайдиган ипни қарайлик (23-шакл).



23-шакл

Координата системасини шундай танлаб олайликки, Ox ўқ горизонтал жойлашсин, Oy ўқ эса ипнинг энг пастки O_1 нуқтасидан ўтсин (O_1 нуқта A ва B нуқталардан пастда жойлашган).

Ипнинг O_1 нуқта ва ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтаси орасидаги қисми O_1M ни ажратамиз. Ипнинг бу қисмига қуйидаги кучлар таъсир қилади:

1) O_1 нуқтага қўйилган $\vec{H}$ таранглик кучи, у ипнинг AO_1 қисми томонидан ҳосил қилинган ва O_1 нуқтадаги уринма (горизонтал) бўйлаб йўналган;

2) M нуқтага қўйилган $\vec{T}$ таранглик кучи, у ипнинг MB қисми томонидан ҳосил қилинган ва M нуқтадаги уринма бўйлаб йўналган;

3) ипнинг O_1M қисмига тушган $\vec{W}$ юк, у пастга йўналган.

Ип мувозанатда бўлгани учун статика қонунларига биноан бу барча кучларнинг координата ўқларига проекциялари йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак, демак

$$T\cos\alpha - H = 0, \ T\sin\alpha - W = 0,$$

бунда α — таранглик кучи $\vec{T}$ ва Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак, H, T, W — тегишли кучларнинг катталиклари.

Бу икки тенгламадан маълум амалларни бажаргандан сўнг

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W}{H}$$

ни ҳосил қиламиз. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ бўлгани учун биринчи тартибли

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H} \qquad (21.32)$$

дифференциал тенгламага келамиз, унинг интеграли ипнинг мувозанатда бўлгандаги шаклини тасвирловчи эгри чизиқдан иборат.

Горизонтал таранглик H — ўзгармас. Агар $W = F(x)$ бўлса, (21.32) тенгламани интеграллаш мумкин:

$$y = \frac{1}{H}\int F(x)\,dx + C,$$

бунда C — бошланғич шартлардан топилади.

Бироқ, W функциянинг қиймати эмас, балки унинг x бўйича ҳосиласи маълум бўлган ҳоллар учрайди. Бундай ҳолда (21.32) тенгламанинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаб, иккинчи тартибли

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\,\frac{dW}{dx} \qquad (21.33)$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз. Агар $\frac{dW}{dx} = f(x)$ ($f(x)$ — маълум бўлганда) бўлса, бу тенгламанинг ечими (ипнинг мувозанат ҳолатдаги шакли тенгламаси) ушбу кўринишда бўлади:

$$y = \frac{1}{H}\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2,$$

бунда C_1 ва C_2 лар бошланғич шартлардан топилади.

Умумийроқ ҳолларда (21.32) ва (21.33) тенгламаларнинг ўнг томонлари фақат x гагина боғлиқ бўлмай, балки y ва y' га ҳам боғлиқ бўлиб, бу ҳолларда ечимни топиш учун турли усуллардан фойдаланишга тўғри келади, чунки бевосита интеграллаш мумкин эмас.

Масалан, $W = qx$ бўлиб, ип учлари маҳкамланган бўлсин. У ҳолда (21.32) тенглама $\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H}$ кўринишида бўлади, шунинг учун умумий ечим

$$y = \frac{qx^2}{2H} + C$$

бўлади. $x = 0$ да $y = \frac{q}{H}$ шартдан $C = \frac{q}{H}$ қийматни топамиз, демак изланаётган хусусий ечим

$$y = \frac{q}{H}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$$

параболадан иборат бўлади.

21.5. Занжир чизиқ. Эгилувчан бир жинсли чўзилмайдиган арқон икки учидан маҳкамланган бўлиб, ўзининг оғирлиги остида осилиб туради. Агар арқоннинг бир бирлик узунлигининг оғирлиги q га тенг бўлса, арқоннинг мувозанат ҳолатдаги шаклини аниқланг.

Ечиш. Бу ҳолда $W = qS$, бунда S — арқон $\overset{\frown}{O_1M}$ ёйининг узунлиги (23-шакл). Маълумки, $S = \int\limits_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Шунинг учун

$$W = q\int\limits_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \text{ демак } \frac{dW}{dx} = q\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\ \frac{dW}{dx}$$

ҳосиланинг ифодасини (21.33) тенгламага қўйиб, x аргумент ва изланаётган y функция қатнашмаган ушбу иккинчи тартибли дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (21.34)$$

$\frac{dy}{dx} = u$ ўрнига қўйиш орқали бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган ушбу биринчи тартибли тенгламага келтирилади:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + u^2}$$

бу ерда $H/g = a$ деб белгиланган. Ўзгарувчиларни ажратиб, интегралласак,

$$\ln(u+\sqrt{u^2+1})=\frac{x}{a}+\ln C_1,$$

бу ердан

$$u+\sqrt{u^2+1}=C_1e^{x/a}$$

$\sqrt{u^2+1}$ илдизни яккалаб ва ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмини квадратга кўтариб, соддалаштирсак,

$$1=C_1^2e^{2x/a}-2C_1ue^{x/a}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{2}e^{x/a}-\frac{1}{2C_1}e^{-x/a} \tag{21.35}$$

чунки $u=\frac{dy}{dx}$.

Унинг умумий ечими:

$$y=\frac{aC_1}{2}e^{x/a}+\frac{a}{2C_1}e^{-x/a}+C_2. \tag{21.36}$$

C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун O_1 нуқтанинг $y=a$ ординатасини оламиз. O_1 нуқтада уринма Ox ўққа параллел эканлигини эътиборга олиб, бошланғич шартни қуйидагича ёзамиз: $x=0$ да $y=a$, $y'=0$. x ва y' нинг қийматларини (21.35) тенгликка қўйиб, C_1 ни аниқлаш учун ушбу алгебраик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$0=\frac{C_1}{2}-\frac{1}{2C_1},$$

бу ердан

$$C_1=1.$$

Иккинчи илдиз (манфий илдиз) ярамайди, бу дифференциал тенгламадан бевосита келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, $C_1<0$ тенгсизликдан $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ келиб чиқади, бу эса тенгламага зид, чунки унинг ўнг томони бутунлай мусбат катталик. x ва y нинг қийматларини (21.36) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+C_2,$$

бу ердан $C_2=0$.

Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a}) \text{ ёки } y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

функциядан иборат экан.

Бу масаланинг ечими икки учидан осилган эгилувчан чўзилмайдиган арқон ўз оғирлиги таъсирида гиперболик косинуснинг графиги шаклини олишини кўрсатади. Гиперболик косинуснинг занжир чизиқ деб аталиши ҳам шу билан тушунтирилади.

$a = H/q$ катталикка геометрик талқин берадиган бўлсак, у занжир чизиқнинг қуйи O_1 нуқтадаги эгрилик радиусидан (R) иборат бўлишини қайд қилиб ўтамиз. Бунга қуйидаги ҳисоблашлар билан ишонч ҳосил қилиш мумкин:

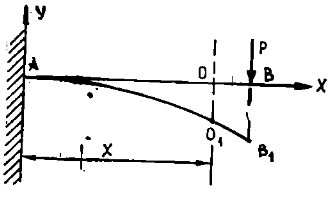
$$y'\big|_{x=0} = 0, \quad y''\big|_{x=0} = \frac{1}{a}, \quad R\big|_{x=0} = \frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Bigg|_{x=0} = a.$$

Шундай қилиб, a катталик занжир чизиқнинг шаклини характерлайди: a қанчалик кичик бўлса, чизиқ шунчалик тор ва тикроқ бўлади.

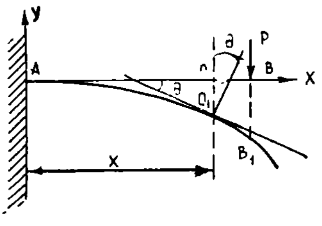
21.6. Тўсин кесимининг эгилиши ва бурилиши. Қаралаётган тўсиннинг ҳар бир кўндаланг кесими вертикал симметрия ўқига эга деб ҳисобланади. Ўзаро тенг кўндаланг кесимлар оғирлик марказларининг геометрик ўрни тўсиннинг *ўқи* (ёки *нейтрал ўқ*) деб аталувчи тўғри чизиқдан иборат. Таъсир этувчи кучлар тўсин ўқига тик йўналган бўлсин. 24-шаклда бир учи маҳкамланган, иккинчи учига куч таъсир қилаётган тўсин ўқининг эгилиши кўрсатилган. Куч таъсирида x абсциссали бирор кесимнинг оғирлик маркази O ордината ўқига параллел равишда O_1 нуқтага кўчади. Кесим оғирлик марказининг тўсин ўқига перпендикуляр йўналишдаги OO_1 кўчиши *тўсиннинг шу кесимдаги эгилиши* ёки *тўсин кесимининг эгилиши* дейилади. Эгилишни y билан белгилаймиз. Деформацияланиш жараёнида кесим яссилигича қолиб, ўзининг дастлабки ҳолатига нисбатан бирор кичик бурчакка бурилади. 25-шаклда қаралаётган кесимнинг деформацияланишдан олдинги ва кейинги ҳолатлари тасвирланган. Ҳар бир кесим ўзининг дастлабки ҳолатига нисбатан буриладиган θ бурчак кесимнинг *бурилиш бурчаги* дейилади.

Тўсиннинг деформациясини тўлиқ билиш учун ҳар бир кесимида унинг эгилиши y ва бурилиш бурчаги θ ни ҳисоблай билиш зарур. Уларнинг ҳар иккиси ҳам x нинг (координата бошидан кесимгача бўлган масофа) функцияси бўлиб, ҳар бир кесим учун y ва θ орасида аниқ боғланиш мавжуд бўлади.

Фойдаланиладиган декарт координаталарида координата боши тў-



24- шакл



25- шакл

син ўқининг дастлабки ҳолатидаги бирор нуқтада олиниб, бу ўқ абсциссалар ўқи сифатида қаралади, ординаталар ўқи юқорига йўналган. Тўсиннинг эгилган ўқи

$$y = f(x) \tag{21.37}$$

эгри чизиқ тенгламаси билан аниқланади. Бу эгри чизиққа O_1 нуқтадан ўтказилган уринма абсциссалар ўқи билан θ бурчак ташкил қилади. Маълумки

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}.$$

Амалиётда тўсиннииг эгилиши унинг узунлигига нисбатан кичик бўлганлиги сабабли θ бурчак 1^0 дан катта бўлмайди. Шу сабабли

$$\theta \approx \frac{dy}{dx},$$

яъни кесимнинг бурилиш бурчаги (радианларда) шу кесим эгилишидан олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг.

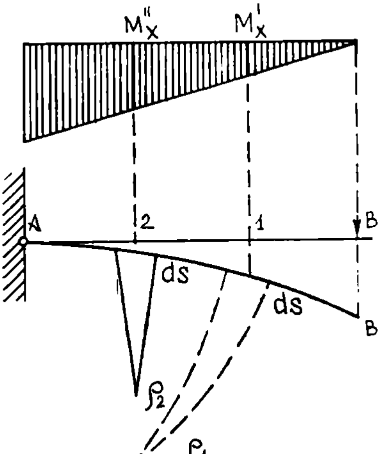
Шундай қилиб, тўсин деформациясини ўрганиш масаласи унинг эгилган ўқи тенгламаси $y = f(x)$ ни аниқлаш масаласига келтирилар экан. Бунинг учун тўсин деформациясини уни эгувчи ташқи кучлар, унинг ўлчамлари ва материалининг физик-механик хусусиятлари билан боғланишини билиш зарур. Бундай боғланиш материаллар қаршилиги курсидаи маълум бўлиб, у

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \tag{21.38}$$

кўринишдадир. Бу ерда $\rho(x)$ — эгилган ўқнинг берилган нуқтадаги эгрилик радиуси, $M(x)$ — букувчи моментнинг тегишли кесимдаги аналитик ифодаси, E — эластиклик (Юнг) модули, I — кўндаланг кесимнинг тўсиннинг нейтрал ўқи билан устма-уст тушадиган ўққа нисбатан инерция моменти. 26-шаклда эгрилик радиусини букувчи моментнинг ўзгаришига боғлиқ равишда ўзгариши тасвирланган. Эгилган ўқ тенгламасини олиш учун ўқнинг эгрилик радиуси билан унинг нуқталари координаталари x ва y орасидаги боғланишдан фойдаланиш лозим:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} \tag{21.39}$$

(21.39) муносабатни (21.38) га қўйиб, y, x, $M(x)$ ва EI ларни



26- шакл

боғловчи дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\pm \frac{\frac{d^2y}{dx}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} = \frac{M(x)}{EI}. \qquad (21.40)$$

Ҳосил қилинган тенглама *эгилган ўқ тенгламаси ёки эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси* дейилади.

Амалиётда учрайдиган кўпгина масалалар учун тўсин кесимининг бурилиш бурчагини аниқловчи $\frac{dy}{dx}$ миқдор бирга нисбатан жуда кичик миқдор бўлиб, унинг квадратини ҳисобга олмаслик мумкин. У ҳолда (21.40) тенглама соддалашади:

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \text{ ёки } \pm EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x). \qquad (21.41)$$

(21.41) тенглама тўсин эгилган ўқининг тақрибий дифференциал тенгламаси дейилади. Бу ерда иккинчи тартибли ҳосила ишораси эгилган ўқни ифодаловчи эгри чизиқ ботиқ бўлса мусбат, қабариқ бўлса манфий олинади. Бундан буён дифференциал тенгламани

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \qquad (21.42)$$

шаклда ёзамиз.

Эгилган ўқ тенгламаси (21.42) дан эгилишлар тенгламаси $y = f(x)$ ни олиш учун (21.42) тенглама интегралланади:

$$EI\frac{dy}{dx} = \int M(x)\,dx + C,$$

иккинчи маротаба интегралласак,

$$EIy = \int dx \int M(x)dx + Cx + D.$$

Кесим бурилишининг тенгламаси:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\int M(x)\,dx + C\right],$$

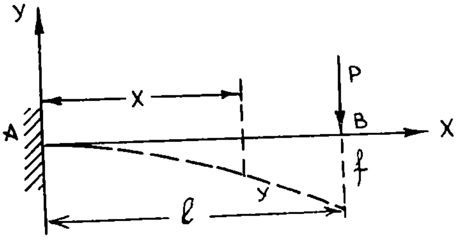
кесим эгилишининг тенгламаси:

$$y = \frac{1}{EI}\left[\int dx \int M(x)\,dx + Cx + D\right].$$

Интеграллаш доимийлари C ва D кўрилаётган масала учун чегаравий шартлардан аниқланади.

1-масала. Бир томондан маҳкамланган тўсиннинг (консол тўсиннинг) эгилиши. l узунликдаги тўсин чап томондан маҳкамланган. Ўнг учига P куч таъсир этади. Тўсиннинг эгилган ўқи шаклини ва кесимларнинг бурилишини аниқланг (27-шакл).

Ечиш. Координата бошини A нуқтада деб, y ўқининг



27- шакл

мусбат йўналишини юқорига, x ўқини ўнгга йўналтирамиз.

Эгилган ўқ тенгламаси (21.42), ушбу

$$x = 0 \text{ да } y = 0, \ \theta = \frac{dy}{dx} = y' = 0 \qquad (21.43)$$

чегаравий шартларда ечилади. (21.42) тенгламанинг ўнг томони букувчи момент $M(x)$ ни аниқлаш учун координата бошидан x масофада ихтиёрий кесим оламиз. Бу кесимдаги букиш моменти

$$M(x) = -P(l - x)$$

га тенг бўлади. У ҳолда

$$EIy'' = -P(l - x).$$

Бу тенгламани икки марта интеграллаймиз:

$$EIy' = -P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C. \qquad (21.44)$$

$$EIy = -P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Cx + D. \qquad (21.45)$$

Интеграллаш доимийлари C ва D ни аниқлашда (21.43) чегаравий шартлардан фойдаланамиз:

$$C = 0. \ D = 0.$$

Шундай қилиб,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{Plx}{2EI}\left(2 - \frac{x}{l}\right), \qquad (21.46)$$

$$y = -\frac{Plx^2}{6EI}\left(3 - \frac{x}{l}\right). \qquad (21.47)$$

Мустаҳкамлик масаласи қаралаётганда эгилиш ва бурилишнинг энг катта қийматларини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга. Улар (21.46) (21.47) функцияларнинг максимумлари ва чегара нуқталаридаги энг катта қийматлари каби аниқланади. Одатда, ҳар бир нуқтада ҳисобланадиган эгилиш индекси кесимни белгиловчи f ҳарфи билан белгиланади. Қаралаётган масалада B нуқта учун $x = l$ да

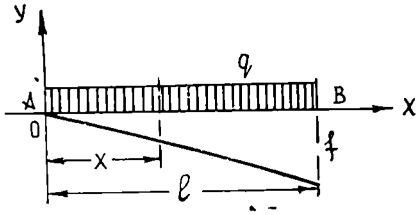
$$f_B = -\frac{Pl^3}{3EI}.$$

Минус ишораси эгилиш пастга йўналишини англатади. Энг катта бурилиш ҳам шу кесимда бўлиб, у

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

га тенг. Бу ерда минус ишораси бурилиш соат мили йўналишида эканлигини англатади.

2-масала. **Текис тақсимланган куч таъсирида бир томондан маҳкамланган тўсиннинг эгилиши.**



28-шалк

Узунлиги l га тенг, чап томондан маҳкамланган тўсинга интенсивлиги q га тенг текис тақсимланган куч таъсир этмоқда. Тўсиннинг эгилиши ва бурилишини аниқланг (28-шакл).

Ечиш. Координата бошидан x масофадаги кесимда букувчи момент $M(x) = -q\frac{(l-x)^2}{2}$ бўлади. Демак, эгилган ўқ тенгламаси

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -q\,\frac{(l-x)^2}{2} \tag{21.48}$$

кўринишда ёзилади. Бу масала учун ҳам чегаравий шартлар

$$x = 0 \text{ да } y = 0,\ \theta = \frac{dy}{dx} = 0 \tag{21.49}$$

дан иборат. Эгилиш тенгламаси (21.48) ни кетма-кет икки марта интеграллаймиз:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2}\int (l-x)^2\, d(l-x) + C = \frac{q}{6}\,(l-x)^3 + C, \tag{21.50}$$

$$EIy = -\frac{q}{24}\,(l-x)^4 + Cx + D, \tag{21.51}$$

Интеграллаш доимийлари C ва D (21.49) шартдан аниқланади:

$$C = -\frac{ql^3}{6};\quad D = \frac{ql^4}{24}.$$

Шундай қилиб, бурилиш ва эгилиш тенгламалари мос равишда $\frac{dy}{dx} = -\frac{ql^2x}{6EI}\left(3 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$, $y = -\frac{ql^2x^2}{24EI}\left(6 - 4\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$ бўлади.

Тўсиннинг $x = l$ ўнг томонидаги энг катта деформациялари

$$\theta_{\max} = -\frac{ql^3}{6EI},$$

$$f_{\max} = -\frac{ql^4}{8EI}$$

га тенг.

22-§. Юқори тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар. Чизиқли дифференциал оператор.

1. **Таъриф.** Агар n-тартибли дифференциал тенгламада изланаётган функция ва унинг ҳосилалари биринчи даражада қатнашса, бундай тенглама *чизиқли тенглама* дейилади. n-тартибли чизиқли дифференциал тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \qquad + a_n(x)\,y = f(x),$$

бу ерда $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\qquad$, $a_n(x)$ лар x нинг маълум узлуксиз функциялари (хусусий ҳолда улар ўзгармас сонлар бўлиши мумкин). Бу функциялар тенгламанинг *коэффициентлари* дейилади, шу билан бирга $a_0(x)=1$ (агар у 1 га тенг бўлмаса, тенгламанинг ҳамма ҳадларини унга бўлишимиз мумкин).

$f(x)$ функция *озод ҳад* ёки тенгламанинг *ўнг томони* дейилади. Агар $f(x) \not\equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \qquad + a_n(x) y = f(x) \tag{22.1}$$

тенглама *чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади.

Агар $f(x) \equiv 0$ бўлса, (22.1) тенглама

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \qquad + a_n(x) y = 0 \tag{22.2}$$

кўринишга эга бўлиб, *чизиқли бир жинсли тенглама* дейилади. (22.2) тенгламанинг чап томони y, y', y'', $\qquad y^{(n)}$ га нисбатан бир жинслидир.

Чизиқли дифференциал тенгламалар учун ечимнинг мавжудлик ва ягоналик теоремасини исботсиз келтирамиз.

Теорема. (22.1) *чизиқли дифференциал тенгламанинг* $a_1(x)$, $a_2(x)$, . , $a_n(x)$ *коэффициентлари бирорта* $[a, b]$ *кесмада узлуксиз бўлсин. Агар* x_0 *қиймат* $[a, b]$ *оралиққа тегишли бўлса, у ҳолда* (22.1) *тенгламани ва унинг исталган бошланғич шартлари системасини қаноатлантирувчи, бутун* (a, b) *оралиқда аниқланган ҳамда узлуксиз бўлган битта ва фақат битта* $y = \varphi(x)$ *ечими мавжуд бўлади.*

2. (22.2) тенгламанинг чап томонини

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \qquad + a_n(x) y \tag{22.3}$$

орқали белгилаймиз. Шу билан бирга $a_i(x)$ функцияларда x аргументни қисқалик учун ёзмаймиз. Бу ифода y функциянинг *чизиқли дифференциал оператори* деб аталади.

L оператор y функцияга янги $L[y]$ функцияни мос қўяди.

1-мисол, Агар $L[y] = y'' - xy' + 2y$ ва $L[y] = y'' + xy$ бўлса, $L[x^3]$ ва $L[\sin x]$ ларни топинг.

Ечиш. $y = x^3$ учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L[x^3] = (x^3)'' - x(x^3)' + 2x^3 = 6x - 3x^2 \cdot x + 2x^3 = 6x - x^3,$$

яъни $y = x^3$ функцияга $L[y] = 6x - x^3$ функция мос қўйилади. $y = \sin x$ функция учун эса қуйидагига эгамиз:

$$L[\sin x] = (\sin x)'' - x(\sin x)' + 2\sin x = -\sin x - x\cos x + 2\sin x = \\ = \sin x - x\cos x.$$

$L[y] = y'' + xy$ бўлсин. У ҳолда $y = x^3$ учун қуйидагига эгамиз:

$$L[x^3] = (x^3)'' + x(x^3) = 6x + x^4.$$

$y = \sin x$ функция учун эса:

$$L[\sin x] = -\sin x + x\sin x.$$

$L[y[$ чизиқли дифференциал оператор қуйидаги иккита асосий хоссага эга:

а) Ўзгармас кўпайтувчини оператор белгиси ташқарисига чиқариш мумкин, яъни

$$L[Cy] = CL[y], \tag{22.4}$$

бу ерда y — исталган, n марта дифференциалланувчи функция; C — — ўзгармас. Ҳақиқатан ҳам, (22.4) операторнинг таърифига кўра

$$L\ [Cy] = (Cy)^n + a_1(Cy)^{(n-1)} + a_2(Cy)^{(n-2)} + \qquad + a_nCy = Cy^{(n)} +$$
$$+ a_1Cy^{(n-1)} + a_2 \cdot Cy^{(n-2)} + \qquad + a_nCy = C\,(y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +$$
$$+ a_2y^{(n-2)} + \qquad + a_ny) = CL\,[y].$$

Бу хосса операторнинг *бир жинслилик хоссаси* дейилади.

б) Иккита функция йиғиндисининг оператори ҳар қайси қўшилувчининг операторлари йиғиндисига тенг, яъни

$$L\ [y_1 + y_2] = L\ [y_1] + L\ [y_2],$$

бу ерда y_1, y_2 — исталган, n марта дифференциалланувчи функциялар. Ҳақиқатан ҳам,

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \qquad +$$
$$+ a_{n-1}(y_1 + y_2)' + a_n(y_1 + y_2).$$

Йиғиндининг ҳосиласи ҳосилалар йиғиндисига тенг бўлгани учун

$$L[y_1 + y_2] = (y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) \quad a_1(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \qquad +$$
$$+ a_n(y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + a_1y_1^{(n-1)} + \qquad + a_ny_1) +$$
$$+ (y_2^{(n)} + a_1y_2^{(n-1)} + \qquad + a_ny_2) = L\,[y_1] + L[y_2].$$

Бу хосса операторнинг *аддитивлик хоссаси* дейилади. Равшанки, у фақат иккита эмас, балки исталган чекли сондаги қўшилувчилар учун ҳам ўринлидир.

23-§. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли функциялар системалари

(22.3) чизиқли дифференциал оператордан фойдаланиб, (22.2) чизиқли тенгламани

$$L\,[y] = 0 \tag{23.1}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, бу тенгламанинг ечими шундай y функциядан иборатки, унга $L\,[y]$ оператор ноль сонини мос қўяди. Энди, чизиқли бир жинсли (22.2) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари ҳақидаги теоремаларни қараймиз. Бунда операторнинг олдинги параграфда кўриб чиқилган хоссаларидан фойдаланамиз.

1-теорема. *Агар y_1 функция (22.2) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда Cy_1 функция ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади*

Исботи. Агар y_1 функция (22.2) тенгламанинг ечими бўлса, (23.1) тенгликка кўра; $L[y_1]=0$. Бироқ, чизиқли операторнинг бир жинслилигига кўра, $L[Cy_1]=CL[y_1]$, яъни $L[Cy_1]=0$. Кейинги тенглик Cy_1 функция ҳам (22.2) тенгламани қаноатлантиришини, яъни унинг ечими бўлишини билдиради.

2-теорема. *Агар y_1 ва y_2 (22.2) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда y_1+y_2 функция ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исботи. Агар y_1 ва y_2 (22.2) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда (23.1) тенгликка кўра қуйидагига эгамиз:

$$L[y_1]=0 \text{ ва } L[y_2]=0.$$

Бироқ, операторнинг аддитивлик хоссасига кўра: $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$, яъни $L[y_1+y_2]=0$. Бу y_1+y_2 (22.2) тенгламани қаноатлантиришини, яъни унинг ечими бўлишини билдиради.

Натижа. *Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — (22.2) чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлса, у ҳолда уларнинг чизиқли комбинацияси*

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$$

ҳам берилган тенгламанинг ечими бўлади.

$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ ифода n та ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олади ва n-тартибли дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Ихтиёрий ўзгармаслар қатнашган бу ечим умумий ечим бўлиши учун ихтиёрий ўзгармасларни улар бошланғич шартларнинг исталган берилган системасини қаноатлантирадиган ягона усул билан танлаш имконияти мавжуд бўлиши керак. Бундай имконият мавжудми ёки йўқми эканини аниқлаш учун функцияларнинг чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли (боғлиқ эмаслик) тушунчаларини киритиш керак бўлади.

1-таъриф. Агар бир вақтда нолга тенг бўлмаган n та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар мавжуд бўлиб, барча $x\in[a, b]$ лар учун

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n=0 \tag{23.2}$$

муносабат бажарилса, $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар системаси $[a, b]$ кесмада *чизиқли боғлиқ* дейилади.

Агар $\alpha_n\neq0$ деб фараз қилсак, (23.2) муносабатни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y_n=\beta_1y_1+\beta_2y_2+\ldots+\beta_{n-1}y_{n-1},$$

бу ерда

$$\beta_1=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n},\ \beta_2=-\frac{\alpha_2}{\alpha_n},\ \ldots,\ \beta_{n-1}=-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

Шунинг учун функциялар системасининг чизиқли боғлиқлиги системанинг функцияларидан ҳеч бўлмаганда биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлишини билдиради.

Хусусан, иккита y_1 ва y_2 функция $y_2 = \beta y_1$ ёки $\frac{y_2}{y_1} = \beta$, яъни уларнинг нисбати ўзгармас сон бўлганда чизиқли боғлиқ бўлади.

2-таъриф. Агар $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \qquad + \alpha_n y_n = 0$ муносабат фақат

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \qquad = \alpha_n = 0$$

шартда бажарилса, $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз y_1, y_2, , y_n функциялар системаси *чизиқли эркли* дейилади.

Хусусан, иккита: y_1 ва y_2 функция $\frac{y_2}{y_1} \neq \alpha$, яъни уларнинг нисбати ўзгармас сонга тенг бўлмаганда чизиқли эркли бўлади.

1-мисол. Ушбу $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = a$ функциялар системаси барча $x \in (-\infty, +\infty)$ лар учун чизиқли боғлиқ. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -\frac{1}{a}$ да исталган x учун қуйидагига эгамиз:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0.$$

2-мисол. Ушбу

$y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = e^x$, $y_4 = \sin 2x$, $y_5 = \cos 2x$, $y_6 = \ln x$

функциялар системаси чизиқли боғлиқ.

Ҳақиқатан ҳам, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$. $\alpha_5 = -1$ да исталган x учун қуйидагига эгамиз:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 + \alpha_5 y_5 + \alpha_6 y_6 = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos 2x = 0.$$

3-мисол. Ушбу

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2, \qquad ,\ y_{n+1} = x^n$$

функциялар системаси чизиқли эркли.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \qquad + \alpha_{n+1} y_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \qquad + \\ + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

тенглик x нинг n дан катта бўлмаган қийматлари (n-даражали тенглама илдизлари) учун ўринли. Қолган ҳолларда тенглик $\alpha_1 = \alpha_2 = \qquad = \alpha_{n+1} = 0$ бўлганда ўринли.

4-мисол. Ушбу $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ функциялар системаси чизиқли эркли. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0$ тенглик $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлганда ўринли. Функциялар сони иккита бўлганда уларнинг чизиқли эрклилигини бу функцияларнинг нисбатидан фойдаланиб аниқлаш мумкин. $\frac{y_1}{y_2} = \operatorname{tg} x$ бўлиб, барча x лар учун ўзгармас сон бўлмагани сабабли $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ лар чизиқли эркли.

24-§. Вронский детерминанти. Функциялар системасининг чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли бўлиш шартлари

Таъриф. $n-1$ марта дифференциалланувчи $y_1, y_2, \quad , y_n$ функциялар системасининг *Вронский детерминанти* деб қуйидаги детерминантга айтилади:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ . & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Бу детерминант x нинг функцияси бўлиб, $W=W(x)=W[y_1, y_2 \ldots$ $y_n]$ каби белгиланади. У функцияларнинг чизиқли боглиқ ёки эркли эканини ўрганиш воситаси бўлиб хизмат қилади.

1-теорема. *Агар $y_1, y_2, \quad y_n$ функциялар системаси чизиқли боғлиқ бўлса, бу системанинг Вронский детерминанти $W(x)$ функция аниқланган барча нуқталарда айнан нолга тенг бўлади.*

Исбот. $y_1, y_2 \quad y_n$ функциялар системаси чизиқли боғлиқ бўлгани учун

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+ \quad +\alpha_n y_n=0$$

тенглик ўринли, бунда ҳамма коэффициентлар бараварига нолга тенг эмас. $\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n$ лар ичида нолдан фарқлилари мавжуд. Тенглик функция аниқланган ҳамма нуқталарда ўринли. Бу тенгликни $n-1$ марта дифференциаллаб, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_n$ ларга нисбатан n та алгебраик тенгламаларнинг чизиқли бир жинсли системасини ҳосил қиламиз. У қуйидагидан иборат:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \quad + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \quad + \alpha_n y_n' = 0, \\ \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \quad + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Бу системанинг коэффициентлари бараварига нолга тенг бўлмагани учун (шартга кўра) унинг детерминанти нолға тенг бўлиши керак, яъни;

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_u' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=0.$$

Бу $y_1, y_2, \ldots y_n$ функциялар системасининг Вронский детерминантидан иборатдир. Демак, функция аниқланган исталган нуқта учун $W[y_1, y_2, \quad , y_n]=0$. Теорема исботланди.

1-изоҳ. Теоремадан функция аниқланган нуқталарнинг ҳеч бўлмаганда биттасида $W \neq 0$ бўлса, $y_1, y_2, \quad . , y_n$ функциялар системаси бу соҳада чизиқли эркли бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. $e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x}$ функциялар системаси k_1, k_2, k_3 лар турлича бўлганда барча x лар учун чизиқли эркли эканини кўрсатинг.

Ечиш. Вронский детерминантини тузамиз ва уни ҳисоблаймиз:

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1 e^{k_1x} & k_2 e^{k_2x} & k_3 e^{k_3x} \\ k_1^2\ e^{k_1x} & k_2^2\ e^{k_2x} & k_3^2\ e^{k_3x} \end{vmatrix} = e^{k_1x} \cdot e^{k_2x} \cdot e^{k_2x} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1, & k_2 & k_3 \\ k_1^2, & k_2^2, & k_3^2 \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_3+k_2)x} \begin{vmatrix} k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ k_2^2 - k_1^2 & k_3^2 - k_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x} \times \begin{vmatrix} k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ (k_2 - k_1)(k_2 + k_1) & (k_3 - k_1)(k_3 + k_1) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x} (k_2 - k_1)(k_3 - k_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_2 + k_1 & k_3 + k_1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x} (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_1) \neq 0 \text{ (барча } x \text{ лар учун).}$$

Демак, k_1, k_2, k_3 лар турлича бўлганда $e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x}$ функциялар системаси барча x лар учун чизиқли эрклидир.

2-изоҳ. Агар $k_1, k_2, \qquad k_n$ лар турлича сонлар бўлса,

$$e^{k_1x}, e^{k_2x}, \qquad e^{k_n x}$$

функциялар системаси ҳам чизиқли эркли эканини худди юқоридагига ўхшаш исботлаш мумкин.

Маълумки, n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \qquad + a_n(x) y = 0 \qquad 24.1)$$

ни чизиқли дифференциал оператор ёрдамида $L[y] = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Айтайлик, $y_1(x), y_2(x), \ . \quad , y_n(x)$ лар бу тенгламанинг ечимлари бўлиб, бу функциялар бирор соҳада дифференциалланувчи бўлсин. Бу ечимларнинг чизиқли эркли бўлиши шартини топамиз.

2-теорема. *Агар $y_1(x), y_2(x), \qquad , y_n(x)$ функциялар чизиқли эркли ва (24.1) чизиқли бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг Вронский детерминанти тенгламанинг коэффициентлари аниқланган соҳанинг ҳеч бир нуқтасида нолга тенг бўлмайди.*

Исбот. Дастлаб, $y = 0$ функция (24.1) тенгламанинг ечими бўлишини ва қуйидаги бошлангич шартларни қаноатлантиришини қайд қилиб ўтамиз:

$$y\,|_{x=x_0}=0,\ y'\,|_{x=x_0}=0,\qquad y^{(n-1)}\,|_{x=x_0}=0, \qquad (24.2)$$

бу ерда x_0 — тенгламанинг коэффициентлари аниқланган соҳанинг нуқтаси. Фараз қиламиз, бирорта x_0 нуқтада Вронский детерминанти нолга тенг бўлсин

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & & y_n(x_0) \\ y_0'(x_0) & y_2'(x_0) & & y_n'(x_0) \\ & & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}=0.$$

Детерминанти $W(x_0)$ бўлган алгебраик бир жинсли тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \quad + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \quad + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \qquad\qquad . \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \quad + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \qquad (24\ 3)$$

Бу системанинг детерминанти $W(x_0)=0$ бўлгани учун у ноль бўлмаган ечимга эга, яъни $\alpha_i\,(i=\overline{1,n})$ ларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. α_1, α_2, α_n лар ёрдамида ечимларнинг чизиқли комбинациясини тузамиз. Ушбу функцияни ҳосил қиламиз:

$$\bar{y}(x)=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\qquad+\alpha_n y_n(x),$$

бу ерда α_1, α_2, α_n ларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. (21.1) тенглама ечимларининг чизиқли комбинацияси бўлган $\bar{y}(x)$ функциянинг ўзи ҳам унинг ечими бўлади. Бундан ташқари α_1, α_2, α_3, , α_n (24.3) системанинг ечими бўлгани учун $\bar{y}(x)$ (24.2) бошлангич шартларни қаноатлантиради:

$$\bar{y}(x_0)=0,\ \bar{y}'(x_0)=0,\qquad ,\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Бироқ, бу бошланғич шартларни (21.1) тенгламанинг ечими бўлган $y=0$ (айнан нолга тенг) функция ҳам қаноатлантиради. У ҳолда берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимнинг ягоналигига кўра:

$$\bar{y}(x)\equiv 0$$

ёки

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\qquad+\alpha_n y_n(x)\equiv 0.$$

Биз $y_1(x)$, $y_2(x)$, . , $y_n(x)$ функциялар чизиқли эркли деган хулосага келдик, бу эса шартга зиддир. Бу зиддият теоремани исботлайди.

Натижа. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлган $y_1(x)$, $y_2(x)$, , $y_n(x)$ функциялар системасининг Вронский детерминанти ё айнан нолга тенг, ё ҳеч бир нуқтада нолга тенг бўлмайди. Бу $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . , $y_n(x)$ ечимлар системаси ё чизиқли боғлиқ, ё чизиқли эркли бўлишидан келиб чиқади.

25-§. Ечимларнинг фундаментал системаси

Таъриф. n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг n та чизиқли эркли ечимлари системаси *унинг фундаментал системаси* дейилади.

1-теорема. *n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг n та чизиқли эркли ечимлари унинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этиши учун уларнинг Вронский детерминанти нолдан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир.*

Ҳар қандай чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама чексиз кўп фундаментал ечимлар системасига эга бўлишини кўрсатиш мумкин.

Ечимларнинг фундаментал системаси тушунчаси ва Вронский детерминанти тўғрисидаги қараб чиқилган теоремалардан фойдаланиб, қандай ҳолда чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини хусусий ечимлардан тузиш мумкин, деган саволга жавоб бериш мумкин.

Бу саволга чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама умумий ечимининг таркиби тўғрисидаги қуйидаги теорема жавоб беради.

2-теорема. *Агар y_1, y_2, y_3, , y_n чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама ечимларининг фундаментал системаси бўлса, у ҳолда бу тенгламанинг умумий ечими бу ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади, яъни*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \qquad + C_n y_n, \tag{25.1}$$

бу ерда C_1, C_2, C_n — ихтиёрий ўзгармаслар.

Исбот. 23-§ даги 1 ва 2-теоремалардан келиб чиқадиган натижаларга асосан (25.1) функция чизиқли бир жинсли тенгламанинг ечими бўлади. y ечим умумий бўлишини исботлаш учун ушбу

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{25.2}$$

бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам C_1, C_2, , C_n ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай қийматларини топиш мумкинки, уларга мос хусусий ечим берилган бошланғич шартларни қаноатлантиришини кўрсатиш етарлидир. (25.1) функция (25.2) бошланғич шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \qquad + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \qquad + C_n y_{n0}' = y_0', \\ \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \qquad + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{25.3}$$

Бу ерда $y_{10}, y'_{10}, \qquad y^{(n-1)}_{10}$ лар y_1 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қийматлари, $y_{20}, y'_{20}, \qquad , y^{(n-1)}_{20}$ лар y_2 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қийматлари ва ҳоказо $y_{n0}, y'_{n0}, \qquad , y^{(n-1)}_{n0}$ лар y_n функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қийматлари. $C_1, C_2, \qquad , C_n$ номаълумларга нисбатан алгебраик чизиқли тенгламаларнинг (25. 3) системасини ҳосил қилдик. Бу системанинг детерминанти $y_1, y_2, \qquad , y_n$ фундаментал ечимлар системасининг x_0 нуқтадаги Вронский детерминантидан, яъни $W(x_0)$ дан иборат бўлади. 24-§ даги теоремага кўра бу детерминант нолга тенг эмас. Демак, (25.3) система ягона ечимга эга, яъни шундай $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \qquad , \overline{C}_n$ сонлар тўпламига эгаки, буларда $y = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2 + \qquad + \overline{C}_n y_n$ ечим (25.2) бошланғич шартларни қаноатлантиради. Шундай қилиб, агар $y_1, y_2, y_3, \qquad y_n$ — чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлса, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \qquad + C_n y_n$ функция бу тенгламанинг умумий ечими бўлиши исбот қилинди.

26-§. Остроградский — Лиувилл формуласи

Остроградский — Лиувилл формуласи чизиқли бир жинсли тенглама ечимлари системасининг Вронский детерминанти билан бу тенгламанинг коэффициентларини боғлайди. Бу формулани келтириб чиқаришни иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенглама учун кўрсатамиз. Тенгламанинг кўриниши:

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0.$$

Агар y_1 ва y_2 — фундаментал система бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 = 0. \end{cases}$$

Биринчи тенгликнинг ҳадларини y_2 га, иккинчи тенгликнинг ҳадларини y_1 га кўпайтириб ва иккинчисидан биринчисини айириб, топамиз:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \qquad (26.1)$$

Бу ерда $y_1 y_2' - y_1' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(x)$ — y_1, y_2 фундаментал ечимлар системасининг Вронский детерминанти. $y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = W'(x)$ — бу детерминантнинг ҳосиласи. Демак, (26.1) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$W'(x) + a_1(x) W(x) = 0. \qquad (26.2)$$

(26.2) тенгламанинг умумий ечимини ўзгарувчиларни ажратиб топамиз:

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -a_1(x)\,dx, \quad W(x) \neq 0,$$

чунки y_1, y_2 ечимлар системаси фундаменталдир. Интеграллаймиз:

$$W(x) = C e^{-\int a_1(x)\,dx}. \tag{26.3}$$

Энди (26.2) тенгламанинг

$$W(x_0) = W_0$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топамиз. Уларни (26.3) умумий ечимга қўйсак:

$$W_0 = C e^{\left(-\int a_1(x)\,dx\right)}\Big|_{x=x_0}. \tag{26.4}$$

(26.3) ва (26.4) дан

$$\frac{W(x)}{W_0} = \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{e^{-\int a_1(x)\,dx}\Big|_{x=x_0}}$$

ёки

$$W(x) = W_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx} \tag{26.5}$$

экани равшан.

(26.5) формула *Остроградский — Лиувилл формуласидир*, у иккинчи тартибли тенглама учун келтириб чиқарилди, бироқ у исталган тартибли тенгламалар учун ҳам ўринлидир. Бу формуладан, масалан, $W(x)$ ё айнан нолга тенг экани, ё ҳеч бир нуқтада нолга тенг бўлмаслиги келиб чиқади. (26.5) формула иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламанинг битта хусусий ечими маълум бўлганда унинг умумий ечимини топишга имкон беради.

Мисол. Ушбу $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ тенгламанинг $y_1 = e^x$ ечими маълум бўлса, унинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламани x га бўлиб, қайта ёзамиз:

$$y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{y}{x} = 0.$$

(26.3) формулада Вронский детерминантини унинг қиймати билан алмаштирамиз, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = C e^{-\int a_1(x)\,dx}$$

Бу ердан

$$y_2' e^x - y_2 e^x = C e^{-\int\left(-\frac{1+x}{x}\right)dx}$$

$$\left(\text{чунки } y_1 = e^x,\ y_1' = e^x,\ a_1(x) = -\frac{1+x}{x}\right) \text{ ёки}$$

$$e^x(y_2' - y_2) = C e^{\ln x + x}.$$

$e^{\ln x} = x$ бўлгани учун e^x га қисқартирсак, охирги тенгламадан:

$$y_2' - y_2 = C x.$$

Бу тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топамиз. У биринчи тартибли, чизиқлидир. Қуйидагича алмаштирамиз: $y_2 = u \cdot v$, $y_2' = u'v + v'u$, натижада $u'v + uv' - uv = Cx$, бу ердан $u'v + u(v' - v) = Cx$, энди $v' - v = 0$ деймиз, у ҳолда $u'v = Cx$. Биринчи тенгламани ечиб, $v = e^x$ ни, иккинчи тенгламани ечиб,

$$u = C_1 - C e^{-x}(x + 1)$$

ни топамиз. u, v функцияларни y_2 га қўямиз:

$$y_2 = uv = e^x (C_1 - C e^{-x}(x + 1)).$$

Хусусий ечимни излаётганимиз учун $C_1 = 0$, $C = -1$ деб, $y_2 = x + 1$ ни ҳосил қиламиз. Иккита: $y_1 = e^x$ $y_2 = x + 1$ хусусий ечимлар $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{x + 1} \neq \mathrm{const}$ бўлгани учун чизиқли эркли. Улар фундаментал система ташкил этади, шунинг учун берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^x + C_2 (x + 1)$$

функциядан иборат бўлади.

27-§. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар

Чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг коэффициентлари ўзгармас бўлган хусусий ҳолни қараймиз. Бундай тенгламалардан кўп фойдаланилади. Соддалик учун аввал иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламани муфассал кўриб чиқамиз, унинг натижаларини n-тартибли тенгламалар учун умумлаштирамиз.

27.1. Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламалар. Ушбу ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламани қараймиз:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (27.1)$$

бу ерда p, q — ўзгармас ҳақиқий сонлар. Чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг умумий назариясидан бундай тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг хусусий ечимлари фундаментал системасини топиш етарли экани келиб чиқади. Иккинчи тартибли тенгламанинг фундаментал системаси иккита чизиқли эркли хусусий ечимдан иборат бўлади. (27.1) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини қандай топиш мумкинлигини кўрсатамиз. Бу тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = e^{kx} \qquad (27.2)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда k – ўзгармас сон. Бу функцияни икки марта дифференциаллаймиз:

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}.$$

y, y', y'' ларни (27.1) тенгламага қўйиб, топамиз:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0. \tag{27.3}$$

Бу ерда e^{kx} кўпайтувчи x нинг ҳеч қандай қийматида нолга тенг бўлмаганлиги сабабли

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{27.4}$$

Шундай қилиб, k сони (27.4) тенгламанинг илдизи бўлганда ва фақат шундагина y функция ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли (27.1) дифференциал тенгламани қаноатлантиради.

(27.4) алгебраик тенглама берилган дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. Характеристик тенгламанинг илдизлари k_1 ва k_2 сонлари бўлади:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ ва } k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Бунда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

а) k_1 ва k_2 — ҳақиқий ва ҳар хил сонлар, яъни $k_1 \neq k_2$;

б) k_1 ва k_2 — ҳақиқий ва тенг сонлар, яъни $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$;

в) k_1 ва k_2 — комплекс сонлар, яъни $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$,

бу ерда $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Ҳар қайси ҳолни алоҳида-алоҳида қараймиз.

а) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил: $k_1 \neq k_2$. Бу ҳолда хусусий ечимлар (27.2) формулага кўра $y_1 = e^{k_1x}$ ва $y_2 = e^{k_2x}$ функциялар бўлади.

Маълумки, y_1 ва y_2 функцияларининг нисбати x нинг барча қийматлари учун ўзгармас сон бўлса, у ҳолда бу функциялар чизиқл боғлиқ, акс ҳолда улар чизиқли эркли. Демак, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{x(k_1-k_2)} \neq$ $\neq \text{const}$, чунки k_1 ва k_2 лар шартга кўра ҳар хил. Шундай қилиб, $y_1 = e^{k_1x}$ ва $y_2 = e^{k_2x}$ ечимлар чизиқли эркли, демак, улар (27.1) тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этади. Шундай қилиб, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

берилган тенгламанинг умумий ечимини беради.

1-мисол. Ушбу $y'' - 3y' + 2y = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $k^2 - 3k + 2 = 0$ берилган тенгламанинг характеристик тенгламаси. Унинг илдизлари: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Фундаментал ечимлар системаси: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими эса

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

бўлади.

б) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва тенг: $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Битта хусусий ечим: $y_1 = e^{k_1x}$ юқоридаги мулоҳазалар асосида ҳосил қилинади. e^{k_2x} функция иккинчи хусусий ечим сифатида қаралиши мумкин эмас, чунки $e^{k_2x} = e^{k_1x}$. Шундай хусусий ечим топиш керакки, у биринчи ечим $y_1 = e^{k_1x}$ билан чизиқли эркли бўлсин. Иккинчи ечим $y_2 = xe^{k_1x}$ функция бўлиши мумкинлигини кўрсатайлик. У y_1 билан чизиқли эркли, чунки

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x\,e^{k_1x}}{e^{k_1x}} = x \neq \text{const}.$$

Бу $y_2 = xe^{k_1x}$ функция (27.1) тенгламани қаноатлантиришини текшириш қолди. Уни икки марта дифференциаллаймиз:

$$y_2' = e^{k_1x}(1 + k_1x),$$
$$y_2'' = e^{k_1x}(k_1^2x + 2k_1).$$

y_2, y_2', y_2'' ларни берилган (27.1) тенгламага қўямиз:

$$e^{k_1x}[(k_1^2x + 2k_1) + p(1 + k_1x) + qx] = 0.$$

Қўшилувчиларни қайта гуруҳлаймиз ва $e^{k_1x} \neq 0$ га қисқартирамиз:

$$x(k_1^2 + pk_1 + q) + (2k_1 + p) = 0. \qquad (27.5)$$

k_1 (27.4) характеристик тенгламанинг илдизи бўлгани учун (27.5) даги биринчи қавс айнан нолга тенг, яъни $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. k_1 — каррали илдиз, яъни $k_1 = k_2 = \frac{-p}{2}$ ёки $2k_1 = -p$ бўлгани учун (27.5) даги иккинчи қавс ҳам айиан нолга тенг, яъни $2k_1 + p = 0$. Демак, $y_2 = xe^{k_1x}$ функция (27.1) тенгламанинг ечими бўлади ва $y_1 = e^{k_1x}$ билан чизиқли эркли. Шундай қилиб, $y_1 = e^{k_1x}$ ва $y_2 = xe^{k_1x}$ ечимлар (27.1) тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этади. Демак, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{k_1x}(C_1 + C_2x),$$

бу тенгламанинг умумий ечимини беради.

2-мисол. $y'' + 4y' + 4 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенглама учун характеристик тенглама $k^2 + 4k + 4 = 0$ кўринишда бўлади. Унинг илдизлари: $k_1 = k_2 = -2$. Фундаментал ечимлар системаси $y_1 = e^{-2x}$ ва $y_2 = xe^{-2x}$. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x).$$

в) Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс қўшма: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Бу ерда $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Хусусий ечимларни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x},$$
$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}. \qquad (27.6)$$

(27.6) ифодага ушбу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi.$$

Эйлер формуласини татбиқ қилиб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Маълумки, бир жинсли тенглама ечимларининг чизиқли комбинацияси ҳам тенгламанинг ечими бўлади. Шунинг учун қуйидаги

$$\overline{y_1} = \frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\overline{y_2} = \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

функциялар ҳам (27.1) тенгламанинг ечимлари бўлади. Улар чизиқли эркли, чунки $\frac{\overline{y_1}}{\overline{y_2}} = \operatorname{ctg}\beta x \neq \text{const}$. Демак, $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$ функциялар (27.1) тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этади. Шундай қилиб, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

берилган тенгламанинг умумий ечимини беради.

3-мисол: $y'' - 4y' + 13y = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенглама учун характеристик тенглама $k^2 - 4k + 13 = 0$ бўлади. Унинг илдизлари:

$$k_1 = 2 + 3i,\ k_2 = 2 - 3i,\ \alpha = 2,\ \beta = 3.$$

Ечимларнинг фундаментал системаси: $y_1 = e^{2x}\cos 3x$, $y_2 = e^{2x}\sin 3x$. Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y - e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

27.2. Ўзгармас коэффициентли n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Ушбу ўзгармас коэффициентли n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани қараймиз:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \qquad + a_ny = 0, \qquad (27.7)$$

бу ерда a_1, a_2, $\quad$, a_n ўзгармас сонлар. Бу тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг фундаментал ечимлари системасини топиш етарлидир. n-тартибли дифференциал тенглама бўлган ҳолда фундаментал система n та чизиқли эркли ечимлардан иборат бўлади. Хусусий ечимни $y = e^{kx}$ кўринишда излаймиз. Бу функцияни n марта дифференциаллаб ва унинг y', y'', $\quad$, $y^{(n)}$ ҳосилаларини (27.7) тенгламага қўйиб, қуйидаги алгебраик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$k^n + a_1k^{n-1} + \qquad + a_n = 0.$$

Бу тенглама (27.7) дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. Характеристик тенглама n та илдизга эга: k_1, k_2, k_n. Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламага ўхшаш бу ҳолда ҳам характеристик тенглама илдизларининг характерига кўра уларга мос хусусий ечимлар қандай боғланишга эга эканини кўрсатамиз.

а) характеристик тенгламанинг ҳар бир ҳақиқий содда k илдизига e^{kx} хусусий ечим мос келади:

б) ҳар бир s каррали ҳақиқий k илдизига s та чизиқли эркли e^{kx}, xe^{kx}, $x^{s-1}e^{kx}$ ечимлар мос келади;

в) комплекс қўшма илдизларнинг ҳар бир $k_1 = \alpha + i\beta$ ва $k_2 = \alpha - i\beta$ жуфтига $2r$ та чизиқли эркли хусусий ечимлар мос келади:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\qquad x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\qquad x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Характеристик тенгламанинг даражаси ёки чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг тартиби қандай бўлса, хусусий ечимлар шунча бўлади. Ечимларнинг чизиқли эрклилигини Вронский детерминанти ёрдамида исботлаш мумкин. Фундаментал ечимлар системасидан фойдаланиб ечимнинг чизиқли комбинациясини тузамиз:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \qquad + C_n y_n,$$

бу (27.7) чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади. Бу ерда C_1, C_2, C_3, C_n ихтиёрий ўзгармаслар.

4-мисол. $y^{IV} - y = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенглама учун характеристик тенглама $k^4 - 1 = 0$ кўринишга эгадир. Унинг илдизлари $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Фундаментал ечимлар системаси $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$. Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

5-мисол. $y^V - 2y^{IV} + 2y^{III} = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенглама учун характеристик тенглама $k^5 - 2k^4 + 2k^3 = 0$ кўринишга эга. Унинг илдизлари: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 1 + i$, $k_5 = 1 - i$. Демак, тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x\cos x + C_5e^x\sin x.$$

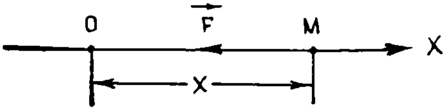
6-мисол. $y^V + 8y^{III} + 16y^I = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^5 + 8k^3 + 16k = 0$ кўринишда бўлиб, унинг илдизлари $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 2i$, $k_{4,5} = -2i$ бўлади. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + C_4x\cos 2x + C_5x\sin 2x.$$

Энди амалиётда учрайдиган баъзи муҳим масалаларни қараб чиқайлик.

27.3. Моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати. Маълумки, моддий нуқтани мувозанат ҳолатига қайтаришга интилувчи куч *қайтарувчи куч* дейилади. Нуқтага унинг мувозанат ҳолатидан оғишига пропорционал бўлган чизиқли қайтарувчи куч таъсир этсин. x ўқни M нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати траекторияси бўйлаб йўналтирамиз. Координаталар боши O ни M нуқтанинг мувозанатда бўлиши мумкин бўлган ҳолатда оламиз (29-шакл).



29-шакл

Агар нуқта мувозанат ҳолатидан x масофага оғдирилса, унга x ўқи бўйлаб ҳамиша O нуқтага йўналган қайтарувчи F куч таъсир этади. Бу кучнинг x ўқдаги проекцияси қуйидагича аниқланади:

$$F = -cx, \tag{27.8}$$

бунда c — пропорционаллик коэффициенти.

M нуқтанинг қайтарувчи F куч таъсиридаги тўғри чизиқли ҳаракати дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -cx$$

ёки $\frac{c}{m} = k^2$ белгилашни киритсак,

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \tag{27.9}$$

27.9) тенглама нуқтанинг эркин *тебранма ҳаракати дифференциал тенгламаси* дейилади.

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг қайтарувчи куч таъсиридаги ҳаракати иккинчи тартибли бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама билан ифодаланади.

Бу дифференциал тенгламани интеграллаш учун унинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Бу тенглама $\lambda_1 = ik$, $\lambda_2 = -ik$ илдизларга эга бўлгани учун (27.9) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{27.10}$$

бунда C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари. (27.10) дан вақт бўйича ҳосила олиб, нуқтанинг тезлигини ифодаловчи

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \tag{27.11}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун бошланғич шартлар берилган бўлиши керак. Масалан, бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \tag{27.12}$$

27.12) ни (27.10) ва (27.11) га қўйиб,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

эканлигини келтириб чиқарамиз.

C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (27.10) га қўйиб, M нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \tag{27.13}$$

Нуқтанинг ҳаракатини яққолроқ тасаввур қилиш учун C_1 ва C_2 ўрнига

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

тенгликлар воситасида аниқланадиган a ва α янги доимийларни киритамиз. У ҳолда (27.10) ни

$$x = a \sin (kt + \alpha) \tag{27.14}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракатини ифодалайди.

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг чизиқли қайтарувчи куч таъсиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

Нуқтанинг ҳаракат тезлигини аниқлаш учун (27.14) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$x = ak \cos (kt + \alpha). \tag{27.15}$$

a ва α ни ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланиб аниқлаш мумкин. Айтайлик, ҳаракатнинг бошланғич шартлари (27.12) кўринишида берилган бўлсин. (27.12) ни (27.14) ва (27.15) га қўйсак,

$x_0 = a \sin \alpha, \quad \dot{x}_0 = ak \cos \alpha$ ҳосил бўлади.

Бунда a ва α лар аниқланадиган

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{h^2}}, \tag{27.16}$$

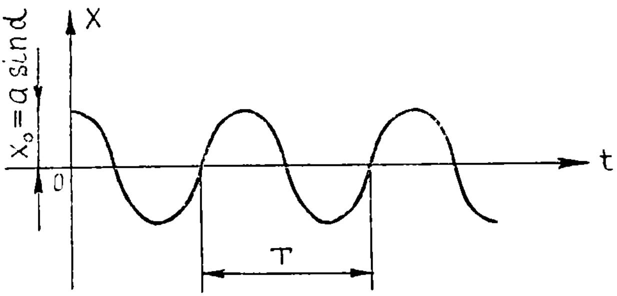
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}, \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}_0}{k\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}}. \tag{27.17}$$

муносабатларни оламиз.

M нуқтанинг *O* тебраниш марказидан энг катта оғишига тенг бўлган *a* масофа *тебраниш амплитудаси* дейилади. *M* нуқтанинг берилган ондаги ҳолати ва ундан кейинги ҳаракат йўналишини ифодаловчи $kt+\alpha$ аргумент *тебраниш фазаси* дейилади. Бошланғич $t=0$ пайтидаги фазанинг қиймати α тебранишларнинг *бошланғич фазаси* дейилади.

Нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат графиги 30- шаклда тасвирланган, бунда $x_0=a\sin\alpha$ нуқтанинг бошланғич пайтдаги оғишини ифодалайди. Нуқта бир марта тўлиқ тебраниши учун кетган T вақт *тебраниш даври* дейилади. Синус функциясининг даври 2π га тенг бўлгани учун



30- шакл

$$k(t+T)+\alpha-(kt+\alpha)=2\pi$$

ифодадан тебраниш даврининг қийматини топамиз:

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (27.18)$$

Тебраниш даврининг тескари қийматига тенг бўлган ва нуқтанинг бир секунддаги тебранишлар сонини ифодаловчи

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{k}{2\pi} \qquad (27.19)$$

катталик *тебранишлар частотаси* дейилади. (27.19) дан кўрамизки,

$$k=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$$

катталик 2π секунд вақт ичида нуқтанинг тўлиқ тебранишлар сонини ифодалайди. Бу катталик тебранишларнинг *доиравий частотаси* дейилади.

Бу формулалардан кўрамизки, эркин тебранишлар частотаси ва тебраниш даври бошланғич шартларга боғлиқ бўлмай, фақат нуқтанинг массаси ва *c* коэффициентга боғлиқ бўлади.

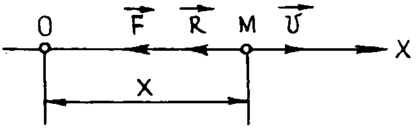
27.4. Тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати. Юқорида нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати кўрилганда муҳитнинг қаршилиги эътиборга олинмаган эди, ваҳоланки, техникада учрайдиган аниқ масалаларни ечишда қаршилик кучини ҳисобга олишга тўғри келади. Қаршилик кучи тебранма ҳаракат моҳиятига жиддий таъсир кўрсатади. Масалан, бир учи маҳкамланган ва эркин учига юк осилган пружинани чўзиб, сўнгра қўйиб юборсак, юк бир неча марта тебрангандан кейин ҳавонинг қаршилик кучи туфайли тўхтайди.

Ox ўқ бўйича ҳаракатланувчи M моддий нуқтага $\vec{F}$ қайтарувчи кучдан ташқари нуқтанинг тезлиги $\vec{v}$ га қарама-қарши йўналган $\vec{R}$ қаршилик кучи таъсир этсин (31-шакл). Нуқтанинг тезлиги унча катта бўлмаганда қаршилик кучини тезликнинг биринчи даражасига пропорционал деб қараш мумкин:

$$\vec{R} = -\mu\vec{v},$$

бунда μ қаршилик коэффициентини ифодалайди. $\vec{R}$ — қаршилик кучининг x ўқидаги проекцияси

$$\vec{R} = -\mu x.$$



31-шакл

$\vec{F}$ ва $\vec{R}$ кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракати дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Тенгламанинг иккала томонини m га бўлиб, барча ҳадларини бир томонга ўтказсак,

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0 \qquad (27.21)$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз, бунда

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n.$$

(27.21) тенглама қайтарувчи куч ва нуқта тезлигининг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракати дифференциал тенгламасини ифодалайди. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламадир. Унинг $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ характеристик тенгламаси $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ илдизларга эга.

Моддий нуқтанинг ҳаракати моҳияти бу илдизларнинг қабул қиладиган қийматларига боғлиқ бўлади. Агар $n < k$ (қаршилик унча катта бўлмаган ҳол) бўлса, характеристик тенгламанинг илдизлари қўшма комплекс сонлардан, $n \geqslant k$ (қаршилик катта бўлган ҳол) бўлса, ҳақиқий сонлардан иборат бўлади.

Бу ҳолларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

1) Муҳитнинг қаршилиги унча катта бўлмаган ҳол ($n < k$).

Бу ҳолда $k^2 - n^2 = k_1^2$ деб белгилашни киритсак, характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1$ бўлиб, (27.21) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \qquad (27.22)$$

Агар C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари ўрнига

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

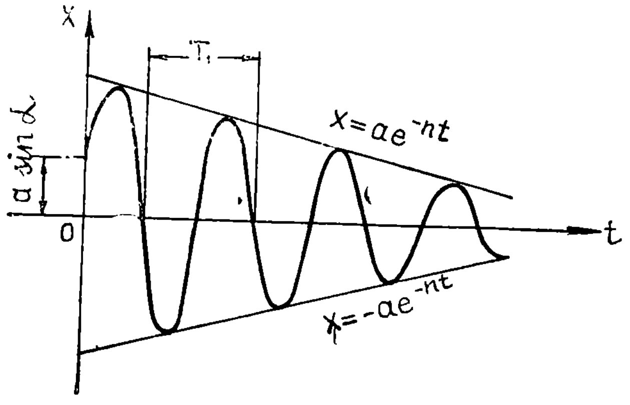
тенгликлар воситасида аниқланадиган a ва α ўзгармасларни киритсак, нуқтанинг ҳаракат қонуни

$$x = ae^{-nt} \sin (k_1 t + \alpha) \qquad (27.23)$$

тенглама билан ифодаланади.

(27.23) тенглама нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидан e^{-nt} кўпайтувчиси билан фарқ қилади. Бу кўпайтувчи вақтнинг ўтиши билан нолга интилади, яъни $t \to \infty$ да $e^{-nt} \to 0$. Шу сабабли (27.23) қонун асосида содир бўладиган ҳаракат *сўнувчи тебранма ҳаракат* дейилади. Бундай ҳаракат частотаси k_1 нуқтанинг массаси m, пропорционаллик коэффициенти c билан бир қаторда муҳитнинг қаршилик коэффициенти μ га ҳам боғлиқ бўлади.

Сўнувчи тебранма ҳаракат графиги 32-шаклда тасвирланган. (27.23) да $|\sin (k_1 t + \alpha)| \leqslant 1$ бўлгани учун x координатанинг абсолют қиймати



32- шакл

$$|x| \leqslant |ae^{-nt}|$$

шартни қаноатлантиради. Бинобарин, сўнувчи тебранма ҳаракат графиги t ўққа нисбатан симметрик жойлашган

$$x = ae^{-nt} \text{ ва } x = -ae^{-nt}$$

чизиқларга галма-гал уринадиган синусоида билан ифодаланади.

a ва α интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (27.23) дан вақт бўйича ҳосила олиб, нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$\dot{x} = ak_1 e^{-nt} \cos (k_1 t + \alpha) - an e^{-nt} \sin (k_1 t + \alpha). \qquad (27.24)$$

Агар бошланғич шартлар

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \quad \dot{x} = v_0$$

кўринишда берилган бўлса, уларни (27.23) ва (27.24) га қўйиб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = a \sin \alpha,$$

$$v_0 = ak_1 \cos \alpha - nx_0.$$

Бунда a ва α лар аниқланадиган

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k_1^2}}, \qquad (27.25)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x_0}{a}, \\ \cos \alpha &= \frac{v_0 + nx_0}{ak_1} \end{aligned}\right\} \qquad (27.26)$$

муносабатларни оламиз.

Сўнувчи тебранма ҳаракат частотаси

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, \qquad (27.27)$$

ҳаракат даври эса

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} \qquad (27.28)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(27.28) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

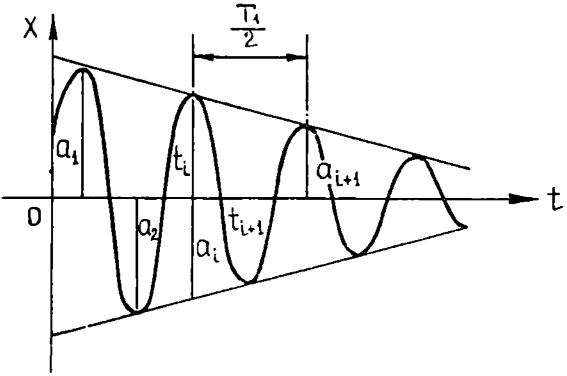
$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \qquad (27.29)$$

бунда $T = \frac{2\pi}{k}$ билан нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат даври белгиланган.

(27.29) дан кўрамизки, сўнувчи тебранма ҳаракат даври нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат давридан бирмунча катта бўлади. Лекин қаршилик кичик бўлганда бу фарқ унча катта бўлмайди ва бунда $T_1 \approx T$ деб олиш мумкин. Бинобарин, унча катта бўлмаган муҳитнинг қаршилиги эркин тебраниш даврига деярли таъсир этмайди.

Моддий нуқтанинг мувозанат ҳолатидан у ёки бу томонга қар гал тебрангандаги максимал оғиши *сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси* дейилади.

Агар бу амплитудаларнинг кетма-кет қийматларидан ташкил топган a_1, a_2, a_i, a_{i+1}, қаторни олсак, бу қаторнинг иккита кетма-кет a_i, a_{i+2} ҳадлари вақтнинг t_i ва $t_{i+1} = t_i + \frac{T_1}{2}$ пайтларига мос келади (33-шакл), яъни $t_{i+1} - t_i = \frac{T_1}{2}$ бўлиб, нуқта a_1, a_2, a_i, a_{i+1}, ларга оғгандаги вақтлар айирмаси $\frac{T_1}{2}$ га тенг арифметик прогрессияни ташкил этади ҳамда



33-шакл

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n\left(t_i+\frac{T_1}{2}\right)}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T_1}{2}} \qquad (27.30)$$

муносабат ўринли бўлади. $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ нисбат ўзгармас бўлгани туфайли амплитудаларнинг кетма-кет қийматлари, махражи $e^{-n\frac{T_1}{2}}$ га тенг камаювчи геометрик прогрессияни ташкил этади. $e^{-n\frac{T_1}{2}}$ га тенг бўлган абстракт сон *тебраниш декременти* дейилади. Декрементнинг натурал логарифми модулига тенг катталик *логарифмик декремент* дейилади ва у D билан белгиланади:

$$D = \left|\ln e^{-n\frac{T_1}{2}}\right| = \frac{nT_1}{2} = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2-n^2}}. \qquad (27.31)$$

Миқдори n га тенг бўлган коэффициент *сўниш коэффициенти* дейилади.

Шундай қилиб, унча катта бўлмаган қаршиликнинг моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатига таъсири, вақтнинг ўтиши билан тебраниш амплитудасининг камайиши билан характерланади.

2) Апериодик ҳаракат ($n > k$). Бу ҳолда $n^2 - k^2 = h^2$ белгилашни киритсак, характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm h$$

ҳақиқий бўлади. Шу сабабли (27.31) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{ht} + C_2 e^{-ht}). \tag{27.32}$$

Агар C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари ўрнига

$$C_1 = \frac{A+B}{2}, \quad C_2 = \frac{A-B}{2}$$

тенгликлар воситасида аниқланадиган янги A ва B доимийларини киритсак, (27.32) ни

$$x = e^{-nt}\left(A \frac{e^{ht} + e^{-ht}}{2} + B \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2}\right)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенгламада

$$\frac{e^{ht} + e^{-ht}}{2} = \operatorname{ch} ht, \quad \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2} = \operatorname{sh} ht$$

гиперболик функцияларни киритиб, уни қуйидагича ифодалаймиз:

$$x = e^{-nt}(A \operatorname{ch} ht + B \operatorname{sh} ht). \tag{27.33}$$

Нуқтанинг ҳаракатини янада яққолроқ тасаввур қилиш учун A ва B ўзгармаслар ўрнига

$$A = a \operatorname{sh} \alpha, \quad B = a \operatorname{ch} \alpha$$

тенгликлар ёрдамида аниқланадиган a ва α ўзгармасларни киритамиз. У ҳолда (27.33) ўрнига

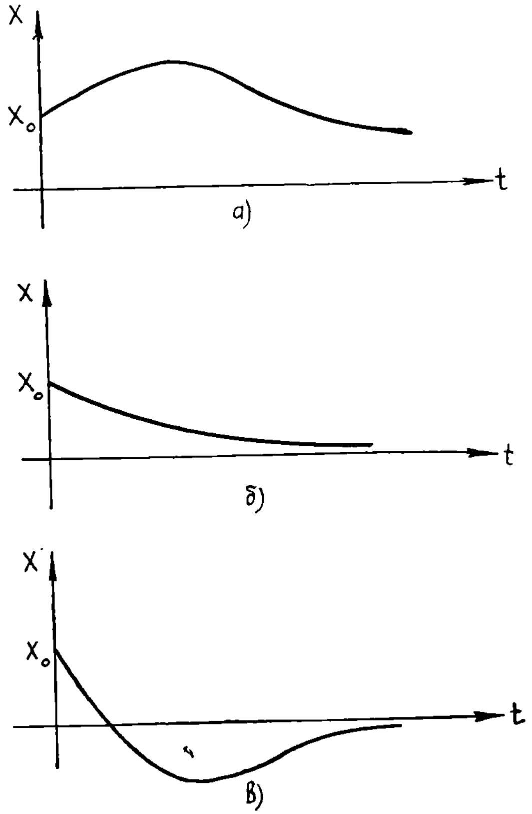
$$x = ae^{-nt} \operatorname{sh}(ht + \alpha) \tag{27.34}$$

тенгламани оламиз.

(27.34) дан кўрамизки, $n > k$ бўлган ҳолда нуқта тебранма ҳаракатда бўлмайди, чунки гиперболик синус функцияси даврий функция эмас. Бу тенглама апериодик ҳаракатни ифодалайди.

Бундай ҳаракат графиги бошланғич шартларнинг қандай бўлишига қараб, 34-шаклда тасвирланган графикларнинг бирортаси кўринишида бўлади. Агар нуқта бошланғич пайтда x ўқининг мусбат йўналиши бўйича йўналган бошланғич $\vec{v}_0$ тезликка эга бўлса, у ҳолда бу тезлик ҳисобига нуқта дастлаб мувозанат ҳолатидан узоқлаша боради, сўнгра қайтарувчи куч таъсирида мувозанат ҳолатига аста-секин яқинлаша боради (34-*а* шакл).

Агар нуқта бошланғич пайтда x ўққа қарама-қарши йўналган бошланғич тезликка эга бўлса, ҳаракат графиги 34-*б*, *в* шаклдагидек бўлади. Бу ҳолда нуқтанинг бошланғич тезлиги $\vec{v}_0$ етарлича



34- шакл

катта бўлса, нуқта мувозанат ҳолатидан бир марта ўтиб, сўнгра бу ҳолатга аста-секин яқинлаша боради (34-*в* шакл).

3) **Чегаравий ҳолдаги апериодик ҳаракат.** Бу ҳолда характеристик тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг, ҳақиқий ва манфий қийматга эга бўлади:

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 = -n.$$

Бу (27.21) тенгла[illegible] ечимини

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2) \qquad (27.35)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ҳолда нуқтанинг тезлиги

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 t + C_2) + e^{-nt} C_1 \qquad (27.36)$$

формула ёрдамида аниқланади.

C_1 ва C_2 ни топиш учун ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланамиз. Айтайлик, бошланғич $t = 0$ пайтда нуқта $x = x_0$ ҳолатни эгалласин ва $\dot{x} = v_0$ тезликка эга бўлсин. Бу шартларни (27.35) ва (27.36) га қўйсак,

$$x_0 = C_2,$$

$$v_0 = -nC_2 + C_1 = -nx_0 + C_1,$$

бундан

$$C_1 = v_0 + nx_0$$

эканлиги топилади.

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини (27.35) га қўйиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини қуйидагича ёза оламиз:

$$x = e^{-nt}[x_0 + (v_0 + nx_0)t].$$

Бу тенглама воситасида аниқланадиган ҳаракат ҳам сўнувчи апериодик ҳаракатдан иборат бўлади.

28-§. Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар. Лагранжнинг ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули

Бир жинсли бўлмаган ёки ўнг томони берилган дифференциал тенглама деб

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \quad + a_n(x)\,y = f(x) \tag{28.1}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламага айтилади. Чизиқли дифференциал операторнинг ифодасидан фойдаланиб, (28.1) тенгламани

$$L[y] = f(x) \tag{28.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу — бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими шундай функция эканини билдирадики, унга $L[y]$ чизиқли оператор берилган $f(x)$ функцияни мос қўяди.

(28.2) тенглама билан бир қаторда

$$L[y] = 0 \tag{28.3}$$

тенгламани ҳам қараймиз. Бу тенглама берилган бир жинсли бўлмаган тенгламага мос *бир жинсли тенглама* дейилади.

28.1. Умумий ечимнинг структураси. Кейинги теорема чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама умумий ечимининг структурасини аниқлашга ёрдам беради.

1-теорема. *Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бу тенгламанинг хусусий ечими ва мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборат.*

Исбот. Бу (28.2) тенгламанинг бирорта хусусий ечимини $\bar{y}$ орқали, бу тенгламага мос бир жинсли (28.3) тенгламанинг умумий ечимини Y орқали белгилаймиз. Бу белгилашларга кўра қуйидагини ёзиш мумкин:

$$L[\overline{y}] = f(x), \quad L[Y] = 0.$$

Энди бу ечимларнинг йиғиндисини тузамиз:

$$y = Y + \overline{y}. \qquad (28.4)$$

Бу функцияни (28.1) тенгламага қўйиб, операторнинг аддитивлик хоссасини эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$L[y] = L[Y + \overline{y}] = L[Y] + L[\overline{y}] = f(x) + 0 = f(x).$$

Шундай қилиб, $y = Y + \overline{y}$ функция берилган (28.2) тенгламани қаноатлантиради, яъни унинг ечими бўлади. Энди (28.4) ифода умумий ечим эканини исботлаш қолди.

Агар $y_1, y_2, \quad , y_n$ функциялар бир жинсли (28.3) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этса, у ҳолда унинг умумий ечими бу функцияларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади:

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \qquad + C_n y_n,$$

бу ерда $C_1, C_2, \quad , C_n$ — ихтиёрий ўзгармаслар. У ҳолда (28.4) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = \overline{y} + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \qquad + C_n y_n. \qquad (28.5)$$

(28.5) ифода (28.2) тенгламанинг умумий ечими эканини кўрсатиш учун ушбу

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (28.6)$$

бошланғич шартлар қандай бўлишидан қатъи назар $C_1, C_2 \qquad C_n$ ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай қийматларини топиш мумкинки, ўзгармасларнинг бу қийматларида (28.5) ечим берилган (28.6) бошланғич шартларни қаноатлантиришини кўрсатиш керак, яъни умумий ечимдан берилган бошланғич шартларда уларга мос хусусий ечимни ажратиб олиш мумкин эканлигини кўрсатиш керак. (28.5) функция (28.6) бошланғич шартларни қаноатлантирсин:

$$\overline{y}_0 + C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \qquad + C_n y_{n0} = y_0,$$
$$\overline{y}_0' + C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \qquad + C_n y_{n0}' = y_0'.$$

$$\overline{y}_0^{(n-1)} + C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \qquad + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)};$$

ёки

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \qquad + C_n y_{n0} = y_0 - \overline{y}_0,$$
$$C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \qquad + C_n y_{n0}' = y_0' - \overline{y}_0',$$

$$C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \dots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - \overline{y}_0^{(n-1)}, \qquad (28.7)$$

Бу ерда

$$\bar{y}_0, \ \bar{y}_0', \qquad \bar{y}_0^{(n-1)}$$

орқали $\bar{y}$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати; $y_{10}, y_{10}', \qquad y_{10}^{(n-1)}$ орқали y_1 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати; $y_{20}, y_{20}', \qquad y_{20}^{(n-1)}$ орқали y_2 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати ва ҳоказо; $y_{n0}, y_{n0}', \qquad y_{n0}^{(n-1)}$ орқали y_n функциянинг ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати белгиланган.

Натижада $C_1, C_2, \quad , C_n$ номаълумларга нисбатан n та алгебраик тенгламалар системаси (28.7) ни ҳосил қиламиз. Агар бу системанинг бош детерминанти нолга тенг бўлмаса, система ягона ечимга эга бўлади. Бироқ, системанинг бош детерминанти $y_1, y_2, \quad , y_n$ фундаментал ечимлар системасининг Вронский детерминантидан иборатдир:

$$\Delta = W[y_{10}, y_{20}, \qquad y_{n0}] = W(x_0).$$

Бу детерминант нолдан фарқли, чунки $y_1 \ y_2, \qquad y_n$ функциялар чизиқли эркли. Шундай қилиб, (28.7) система ечимга эга, у ягона ечимга эга бўлиб, бу ечим Крамер формуласи ёки Гаусс усули ёрдамида аниқланади.

Бу ердан (28.5) функция ёки (28.4) қаралаётган (28.1) ёки (28.2) дифференциал тенгламанинг умумий ечими экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани ечишда бир жинсли тенгламани ечишга нисбатан фарқ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топишдан иборат экан.

Хусусий ечимларни топишда қуйидаги теоремадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

2-теорема. *Агар бир жинсли бўлмаган* (28.1) *ва* (28.2) *тенгламанинг ўнг томони иккита функциянинг йиғиндисидан иборат бўлса, яъни*

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

бўлса, у ҳолда бундай тенгламанинг хусусий ечимини ўнг томонлари $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ *бўлган мос тенгламаларнинг хусусий ечимлари йиғиндиси сифатида ҳосил қилиш мумкин.*

Исбот. Ушбу $L[y_1] = f_1(x)$ ва $L[y_2] = f_2(x)$ тенгламаларни қараймиз. Айтайлик, $\bar{y}_1$ ва $\bar{y}_2$ функциялар мос равишда бу тенгламаларни қаноатлантирсин, яъни

$$L[\bar{y}_1] = f_1(x) \text{ ва } L[\bar{y}_2] = f_2(x).$$

Чизиқли дифференциал операторнинг аддитивлик хоссасига кўра:

$$L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] + L[\bar{y}_2] = f_1(x) + f_2(x)$$

яъни

$$L[\bar{y}] = f_1(x) + f_2(x)$$

бўлгани учун $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ функция (28.2) тенгламани қаноатлантиради. Теорема исботланди.

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг умумий усулини кўрсатамиз.

28.2. Лагранжнинг ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули. (28.3) бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини тузамиз:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \quad + C_ny_n.$$

Бир жинсли бўлмаган (28.2) тенгламанинг хусусий ечимини $C_1, C_2, C_3, \quad , C_n$ ларни x нинг функцияси деб, юқоридаги шаклда, яъни

$$\bar{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \quad + C_n(x)y_n \qquad (28.8)$$

кўринишда излаймиз. Бу функцияларни шундай топиш талаб қилинадики, (28.8) ечим (28.2) тенгламани қаноатлантирсин. Қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned}
&C_1'y_1 + C_2y_2 \quad + \quad + C_n'y_n = 0,\\
&C_1'y_1' + C_2'y_2' \quad + \quad + C_n'y_n = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} \quad + \quad + C_n'y_n^{(n-2)} = 0,\\
&C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} \quad + \quad + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned} \qquad (28.9)$$

Номаълум $C_1', C_2', \quad , C_n'$ лардан иборат бу тенгламалар системаси ечимга эга, чунки системанинг $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ ларнинг олдиларидаги коэффициентлардан тузилган бош детерминанти чизиқли эркли $y_1, y_2, \ldots, y_n$ хусусий ечимларнинг Вронский детерминантидан иборатдир. Маълумки, бундай детерминант чизиқли эркли функциялар учун нолдан фарқлидир.

Шундай қилиб, (28.9) система $C_1', C_2', \quad . , C_n'$ функцияларга нисбатан ечилиши мумкин. Уларни топиб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int C_1'\,dx + \bar{C}_1,\\
C_2 &= \int C_2'\,dx + \bar{C}_2,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
C_n' &= \int C_n'\,dx + \bar{C}_n.
\end{aligned}$$

Бу ерда $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \quad \bar{C}_n$—интеграллаш ўзгармаслари.

Энди

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 + \quad + C_ny_n \qquad (28.10)$$

бир жинсли бўлмаган (28.2) тенгламанинг умумий ечими эканини исботлаймиз. (28.10) ифодани n марта дифференциаллаймиз, бунда ҳар гал (28.9) тенгликни эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 + \qquad + C_ny_n,$$
$$\bar{y}' = C_1y_1' + C_2y_2' + \qquad + C_ny_n'.$$

. .   . . .   .

$$\bar{y}^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \qquad + C_ny_n^{(n-1)},$$
$$\bar{y}^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \qquad + C_ny_n^{(n)} + f(x).$$

Биринчи, иккинчи, ниҳоят, сўнгги тенгламанинг ҳадларини мос равишда a_n, a_{n-1}, , a_1 ларга кўпайтирамиз ва қўшиб, $L[\bar{y}] = f(x)$ни ҳосил қиламиз, чунки y_1, y_2 y_n бир жинсли (28.3) тенгламанинг хусусий ечими ва шунинг учун

$$L[y_1] = 0, \; L[y_2] = 0, \qquad , \; L[y_n] = 0.$$

Демак,

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 + \qquad + C_ny_n$$

функция бир жинсли бўлмаган (28.2) тенгламанинг ечими бўлади, бу ерда C_1, C_2, . . , C_n лар (28.9) дан аниқланган функциялар. Бу ечим n та $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, , $\bar{C}_n$ ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ. Демак, бу ечим умумий ечимдан иборат бўлади.

1-мисол. Ушбу дифференциал тенгламани ечинг:

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

Ечиш. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^3 + k = 0$, $k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$ илдизларга эга. Мос бир жинсли тенгламанинг ечими:

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x,$$

яъни

$$y_1 = 1, \; y_2 = \cos x, \; y_3 = \sin x.$$

Хусусий ечимни ҳам шу кўринишда излаймиз. Бундай тенглама учун (28.9) система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x = 0,$$
$$-C_2'\sin x + C_3'\cos x = 0,$$
$$-C_2'\cos x - C_3'\sin x = \operatorname{tg} x.$$

Иккинчи тенгламанинг иккала қисмини $\sin x$ га, учинчи тенгламанинг иккала қисмини эса $\cos x$ га кўпайтириб, қўшсак $C_2' = -\sin x$ ни ҳосил қиламиз. У ҳолда иккинчи тенгламадан $C_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ келиб чиқади. Биринчи ва учинчи тенгламаларнинг иккала қисмларини қўшиб, $C_1' = \operatorname{tg} x$ ни топамиз. Интеграллаш қуйидагини беради:

$$C_1 = -\ln|\cos x| + \bar{C}_1, \; C_2 = \cos x + \bar{C}_2,$$
$$C_3 = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + \bar{C}_3.$$

Бу ердан берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$y = -\ln|\cos x| + \overline{C_1} + \cos^2 x + \bar{C}_2 \cos x +$$
$$+ \sin^2 x - \sin x \cdot \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + \tilde{C}_3 \sin x$$

ёки

$$y = \bar{\bar{C}}_1 + \bar{C}_2 \cos x + \bar{C}_3 \sin x - \ln|\cos x| - \sin x \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|,$$

бу ерда $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ бўлгани учун

$$\bar{\bar{C}}_1 = \overline{C_1} + 1.$$

2-мисол. Ушбу дифференциал тенгламани ечинг:

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x.$$

Ечиш. а) Мос бир жинсли дифференциал тенглама $y'' - \frac{1}{x} y' = 0$ ёки $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$ нинг умумий ечимини излаймиз. Мос бир жинсли дифференциал тенгламадан: $\ln y' = \ln x + \ln C_1$ ёки $y' = C_1 x$. Интеграллаб, топамиз: $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$, бу ерда $\bar{C}_1 = \frac{C_1}{2}$ Шундай қилиб, фундаментал система $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$ дан иборат.

б) Хусусий ечимни шу кўринишда излаймиз. (28.9) системани тузамиз:

$$\begin{cases} C_1' x^2 + C_2' = 0, \\ C_1' 2x + 0 = x. \end{cases}$$

Бу ердан $C_1' = \frac{1}{2}$, $C_2' = -\frac{x^2}{2}$. Интеграллаймиз

$$C_1 = \frac{1}{2} x + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \left(\frac{1}{2} x + \overline{C_1}\right) x^2 + C_2 - \frac{x^3}{6} = \overline{C_1} x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

29-§. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар

Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламаларнинг коэффициентлари ўзгармаслар бўлган хусусий ҳолни қараймиз.

Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламани ечиш бир жинсли тенгламани ечишдан бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топиш билан фарқ қилади. Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг аниқмас коэффициентлар усулини қарашга ўтамиз. Бу усул ўнг томони махсус кўринишда бўлган тенгламалар учун татбиқ қилинади. Агар тенгламанинг ўнг томонида кўрсаткичли функциялар, синуслар, косинуслар, кўпҳадлар ёки уларнинг бутун рационал комбинациялари иштирок этаётган бўлса, бу усул бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишга имкон беради. Бунда, табиийки, хусусий ечимни ўнг томоннинг шаклига ўхшаш шаклда излаш керак бўлади. Бундан ташқари, хусусий ечимнинг шакли тенгламанинг чап томонига ҳам боғлиқдир.

Аввал иккинчи тартибли дифференциал тенгламани муфассал қараб чиқамиз, сўнгра унинг натижаларини n- тартибли дифференциал тенгламалар учун умумлаштирамиз.

29.1. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар. Ушбу иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламани қараймиз:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{29.1}$$

бу ерда p, q — ўзгармас сонлар. Ушбу

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{29.2}$$

берилган бир жинсли бўлмаган (29.1) дифференциал тенгламага мос чизиқли бир жинсли

$$y'' + py' + qy = 0$$

дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси бўлади. $f(x)$ функцияни қуйидагича ёзиш мумкин бўлсин:

$$f(x) = e^{\gamma x}\,[P_n(x)\cos\delta x + Q_m(x)\sin\delta x], \tag{29.3}$$

бу ерда γ, δ—маълум сонлар, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — маълум кўпҳадлар. Бу функциянинг хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз.

1) $\gamma = 0$, $\delta = 0$ бўлсин, у ҳолда $f(x) = P_n(x)$, бу ерда $P_n(x)$ n- даражали кўпҳад. $\overline{y}$ хусусий ечимни n- даражали ушбу кўпҳад кўринишида излаймиз:

$$\overline{y} = R_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + . \qquad + A_{n-1}\,x + A_n, \tag{29.4}$$

бу ерда A_0, A_1, A_2, $\qquad A_n$ — топилиши керак бўлган номаълум коэффициентлар. Уларни $\overline{y} = R_n(x)$ функция (29.1) тенгламани айнан қаноатлантириши шартидан аниқлаймиз. (29.4) ифодани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\overline{y}_1' = R_n'(x) = nA_0\,x^{n-1} + (n-1)\,A_1x^{n-2} + \qquad + A_{n-1},$$

$$\overline{y}'' = R_n''(x) = n(n-1)\,A_0x^{n-2} + (n-1)\,(n-2)\,A_1x^{n-3} + \\ + \qquad + 2A_{n-2}.$$

$\overline{y}$, $\overline{y}'_1$, $\overline{y}^n$ ларни (29.1) дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R''_n + pR'_n + qR_n = P_n(x), \tag{29.5}$$

бу ерда R_n — n- даражали кўпҳад; R'_n — $(n-1)$- даражали кўпҳад, R''_n — $(n-2)$- даражали кўпҳад. Мумкин бўлган ҳолларни қараб чиқамиз.

а) $q \neq 0$ бўлсин (яъни характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, у ҳолда (29. 5) тенгликнинг чап ва ўнг томонларида n- даражали кўпҳадлар туради. x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, $(n+1)$ та A_0, A_1, A_2, A_n номаълум коэффициентларни аниқлаш учун $n+1$ та тенгламадан иборат системани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий ечим $\overline{y} = R_n(x)$ кўринишда бўлади.

б) $q = 0$, $p \neq 0$ ((29.2) характеристик тенгламанинг илдизлари: $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$) бўлсин. Агар хусусий ечим яна $\overline{y} = R_n(x)$ шаклда изланса, (29. 5) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$R''_n + pR'_n = P_n(x). \tag{29.6}$$

Чап томонда $(n-1)$- даражали кўпҳад, ўнг томонда эса n- даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч қандай A_0, A_1, , A_n ларда (29. 6) айният бўла олмайди. Шунинг учун хусусий ечимни номаълум коэффициентлар сонини оширмай $(n+1)$- даражали кўпҳад кўринишида олиш керак. Бунинг учун $R_n(x)$ ни x га кўпайтириш етарли. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий ечим $\overline{y} = xR_n(x)$ кўринишига эга бўлади.

в) $q = 0$, $p = 0$ ((29.2) характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1 = k_2 = 0$) бўлсин. Агар хусусий ечимни $\overline{y} = R_n(x)$ шаклда излайдиган бўлсак, (29.5) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$R''_n = P_n(x) \tag{29.7}$$

Чап томонда $(n-2)$- даражали кўпҳад, ўнг томонда эса n-даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч бир A_0, A_1, A_n ларда (29.7) айният бўла олмайди. Шунинг учун хусусий ечимни номаълум коэффициентлар сонини оширмай $(n-2)$- даражали кўпҳад шаклида олиш керак. Бунинг учун $R_n(x)$ ни x^2 га кўпайтириш етарли. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий ечим $\overline{y} = x^2R_n(x)$ кўринишда бўлади.

Хулоса. а) Агар 0 сони характеристик тенгламанинг илдизлари билан устма-уст тушмаса, $\overline{y} = R_n(x)$ бўлади.

б) Агар 0 сони характеристик тенгламанинг битта илдизи билан устма-уст тушса, $\overline{y} = xR_n(x)$ бўлади.

в) Агар 0 сони характеристик тенгламанинг иккала илдизи билан устма-уст тушса, $\overline{y} = x^2R_n(x)$ бўлади.

1-мисол. Ушбу $y'' + 4y' + 3y = x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. а) $k^2 + 4k + 3 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = -1$, $k_2 = -3$ илдизларга эга. Бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

кўринишда бўлади.

б) Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = x = P_1(x)$ кўринишга эга, шу билан бирга 0 сони характеристик тенгламанинг ҳеч қайси илдизи билан устма-уст тушмайди. Шунинг учун хусусий ечимни $\bar{y} = Ax + B$ кўринишда излаймиз. Номаълум A ва B ларни топиш учун y функциянинг ва унинг ҳосилаларининг ифодаларини берилган тенгламага қўямиз ва чап ҳамда ўнг томондаги коэффициентларни таққослаймиз. Бунинг учун $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ларнинг ифодаларини ва уларнинг тенгламага кирган коэффициентларини ёзиб чиқамиз. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{c|l} 3 & \bar{y} = Ax + B, \\ 4 & \bar{y}' = A, \\ 1 & \bar{y}'' = 0. \end{array}$$

Ҳисоблашларни бажариб, $3(Ax + B) + 4A = x$ га эга бўламиз. Бу ердан коэффициентларнн тенглаб,

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ 3B + 4A = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{4}{9}$ ларни топамиз. Шундай қилиб, хусусий ечим $\bar{y} = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$ бўлади. Умумий ечим эса

$$y = Y + \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

дан иборат бўлади.

2) $\delta = 0$ бўлсин, у ҳолда $f(x) = e^{\gamma x} P_n(x)$, бу ерда γ — маълум сон, $P_n(x)$ эса n-даражали маълум кўпҳад. Дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини

$$\bar{y} = e^{\gamma x} R_n(x) \qquad (29.8)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $R_n(x)$ — юқоридагига ўхшаш n-даражали кўпҳад, унинг коэффициентлари A_0, A_1, A_n — номаълумлар. Уларни $\bar{y} = e^{\gamma x} R_n(x)$ функция (29.8) тенгламани айнан қаноатлантириши керак, деган шартдан аниқлаймиз. (29. 8) ифодани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\bar{y}' = e^{\gamma x}(R_n' + \gamma R_n),$$

$$\bar{y}'' = e^{\gamma x}(R_n'' + 2\gamma R_n' + \gamma^2 R_n).$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ларни (20.1) тенгламага қўйиб,

$$R_n'' + (2\gamma + p) R_n' + (\gamma^2 + p\gamma + q) R_n = P_n(x) \qquad (29.9)$$

ни ҳосил қиламиз. Мумкин бўлган ҳолларни қараб чиқамиз.

а) γ (29. 2) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмасин (яъни $\gamma \neq k_1$, $\gamma \neq k_2$). У ҳолда (29. 9) тенгликнинг чап ва ўнг томонида n-даражали кўпҳадлар туради. x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, $(n+1)$ та A_0, A_1, , A_n номаълумларни аниқлаш учун $n+1$ та тенгламадан иборат системани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, бу ҳолда дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\bar{y} = e^{\gamma x} R_n(x)$$

кўринишда бўлади.

б) γ (29. 2) характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи бўлсин (яъни $\gamma = k_1$, $\gamma \neq k_2$ ёки $\gamma \neq k_1$, $\gamma = k_2$). Агар хусусий ечим $\bar{y} = e^{\gamma x} R_n(x)$ кўринишда изланадиган бўлса, у ҳолда (29. 9) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_n'' + (2\gamma + p) R_n' = P_n(x). \qquad (29.10)$$

Бу ерда чап томонда $(n-1)$- даражали кўпҳад, ўнг томонда эса n-даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч қандай A_0, A_1, A_n ларда (29. 10) айният бўла олмайди. Шунинг учун хусусий ечимда номаълум коэффициентлар сонини оширмасдан $R_n(x)$ ўрнига $xR_n(x)$ кўпҳадни олиш керак. Шундай қилиб, бу ҳолда дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\bar{y} = x \cdot e^{\gamma x} R_n(x)$$

кўринишда бўлади.

в) γ (29. 2) характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлсин (яъни $\gamma = k_1 = k_2$). Агар хусусий ечим $\bar{y} = e^{\gamma x} R_n(x)$ шаклда изланса, у ҳолда (29. 9) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_n'' = P_n(x). \qquad (29.11)$$

Бу ерда чап томонда $(n-2)$- даражали кўпҳад, ўнг томонда эса n- даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч қандай A_0, A_1, , A_n ларда (29.11) айният бўла олмайди. Шунинг учун хусусий ечимда номаълум коэффициентлар сонини оширмасдан $R_n(x)$ ўрнига $x^2 \cdot R_n(x)$ кўпҳадни олиш керак. Шундай қилиб, бу ҳолда дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\bar{y} = x^2 e^{\gamma x} R_n(x)$$

кўринишда бўлади.

Хулоса: а) Агар $\gamma \neq k_1, k_2$ бўлса, $\bar{y} = e^{\gamma x} R_n(x)$.

б) Агар $\gamma = k_1 \neq k_2$ бўлса, $\bar{y} = xe^{\gamma x} R_n(x)$.

в) Агар $\gamma = k_1 = k_2$ бўлса, $\bar{y} = x^2e^{\gamma x} R_n(x)$.

2-мисол. Ушбу

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(3x - 2)$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш: а) $k^2 - 5k + 6 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ илдизларга эга. Мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = e^{2x}(3x - 2) = e^{\gamma x} R_1(x)$ кўринишга эга. Бунда $\gamma = 2 = k_1$, шунинг учун хусусий ечим $\bar{y} = x(Ax + B)\, e^{2x}$ кўринишда бўлади. Бундан $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ларни топамиз:

$$\bar{y}' = e^{2x}(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B),$$
$$\bar{y}'' = e^{2x}(4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A).$$

Берилган дифференциал тенгламага $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ларни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x^2(6A - 10A + 4A) + x(6B - 10B - 10A + 4B + 8A) + (-5B + 4B + 2A) = 3x - 2.$$

x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаймиз, натижада:

$$\left.\begin{array}{l|l} x & -2A = 3, \\ x^0 & 2A - B = -2. \end{array}\right\}$$

Системани ечиб,

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = -1$$

ларни топамиз. Демак, хусусий ечим

$$\bar{y} = e^{2x}\left(-\frac{3}{2}x^2 - x\right)$$

кўринишда, умумий ечим эса

$$y = Y + \bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^{2x}\left(-\frac{3}{2}x^2 - x\right)$$

кўринишда бўлади.

3) γ, $\delta \neq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$f(x) = e^{\gamma x} [P_n(x) \cos \delta x + Q_m(x) \sin \delta x].$$

Хусусан, агар $P_n(x) \equiv 0$ бўлса,

$f(x) = e^{\gamma x} Q_m(x) \sin \delta x$; агар $Q_m(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$f(x) = e^{\gamma x} P_n(x) \cos \delta x$. Юқоридаги [1), 2) ҳоллар] га ўхшаш мулоҳазалардан қуйидаги хулосаларга келамиз:

а) Агар $\gamma + i\delta \neq k_1, k_2$ бўлса (k_1, k_2 — характеристик тенглама илдизлари), у ҳолда хусусий ечимни ўнг томон шаклида излаш керак:

$$\overline{y} = e^{\gamma x} [u(x) \cos \delta x + v(x) \sin \delta x],$$

бу ерда $u(x)$, $v(x)$ номаълум коэффициентли кўпҳадлар бўлиб, бу коэффициентлар $\overline{y}$ — берилган (29.1) дифференциал тенгламани қаноатлантириши керак, деган шартдан топилади. $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадларнинг даражаси берилган $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг эканини қайд қиламиз.

б) Агар $\gamma + i\delta = k_1$ бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y} = x e^{\gamma x} [u(x) \cos \delta x + v(x) \sin \delta x]$$

кўринишда излаш керак. $f(x)$ функцияда синус ёки косинус иштирок этмаганда ҳам хусусий ечимнинг шакли сақланишини қайд қилиб ўтамиз. Қаралаётган ҳол учун хусусий ҳолни, яъни

$$f(x) = M \cos \delta x + N \sin \delta x$$

бўлган ҳолни қарайлик, бу ерда M, N — ўзгармас сонлар.

а) Агар $\delta i \neq k, k_{12}$ бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y} = x A \cos \delta x + B \sin \delta x$$

кўринишда излаш керак, бу ерда A, B — номаълум коэффициентлар;

б) агар $\delta i = k_1 \neq k_2$ бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y} = x (A \cos \delta x + B \sin \delta x)$$

кўринишда излаш керак.

3-мисол. Ушбу

$$y'' - 2y' + y = \sin x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. а) $k^2 - 2k + 1 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = k_2 = 1$ илдизларга эга. Мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y = e^x (C_1 + C_2 x)$$

бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = \sin x = M \cos \delta x + N \sin \delta x$ кўринишга эга. Бунда $\delta i = i \neq k_1, k_2$. Шунинг учун хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\overline{y} = A\sin x + B\cos x,$$

$\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни топамиз.

$$\overline{y}' = A\cos x - B\sin x, \quad \overline{y}'' = -A\sin x - B\cos x$$

$\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни берилган дифференциал тенгламага қўйиб, топамиз:

$$(A + 2B - A)\sin x + (B - 2A - B)\cos x = \sin x.$$

$\sin x$ ва $\cos x$ лар олдидаги коэффициентларни таққослаб, топамиз:

$$\begin{array}{r|l} \sin x & 2B = 1, \\ \cos x & -2A = 0. \end{array}$$

Бу ердан $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Демак, тенгламанинг хусусий ечими: $\overline{y} = \frac{1}{2}\cos x$. Умумий ечими: $y = Y + \overline{y}$.

Шунинг учун:

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}\cos x.$$

4-мисол. Ушбу

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш а) $k^2 + 4 = 0$ характеристик тенглама $k_{1,2} = \pm 2i$ илдизларга эга, бу ердан $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = \cos 2x = M\cos\delta x + N\sin\delta x$ кўринишга эга. Бунда: $\delta i = 2i = k_1 \neq k_2$. Шунинг учун хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаш керак:

$$\overline{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

$\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни топамиз:

$$\overline{y}' = (A + 2Bx)\cos 2x + (B - 2Ax)\sin 2x,$$

$$\overline{y}'' = (2B + 2B - 4Ax)\cos 2x + (-2A - 2A - 4Bx)\sin 2x$$

$\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(4Ax + 2B + 2B - 4Ax)\cos 2x + (4Bx - 2A - 2A - 4Bx)\sin 2x =$$
$$= \cos 2x.$$

$\sin 2x$, $\cos 2x$ ларнинг олдидаги коэффициентларни тенглаб:

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & 4B = 1, \\ \sin 2x & -4A = 0, \end{array}$$

$A = 0,\ B = -\frac{1}{4}$ эканини топамиз. Хусусий ечим:

$$\overline{y} = \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

У ҳолда дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = Y + \overline{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x$$

бўлади.

29.2. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган n-тартибли дифференциал тенгламалар. Ушбу ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган n-тартибли дифференциал тенгламани қараймиз:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \qquad + a_n y = f(x), \qquad (29.12)$$

бу ерда $a_1, a_2, \qquad , a_n$ — ўзгармас сонлар. Мос бир жинсли

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \qquad + a_n y = 0 \qquad (29.13)$$

дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \qquad + a_n = 0$$

бўлсин. (29.12) тенгламанинг умумий ечими $y = Y + \overline{y}$ каби тузилиши маълум, бу ерда Y — мос бир жинсли (29.13) дифференциал тенгламанинг умумий ечими, $\overline{y}$ эса берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими.

$f(x)$ функция махсус (29. 3) кўринишга эга бўлган ҳолда хусусий ечимни ҳам ўша (29 3) шаклда излаш керак. (29. 3) кўринишнинг хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз ва хусусий ечим шаклини тузиш қоидаларини келтирамиз.

1) $f(x) = P_n(x)$ бўлсин, бу ерда $P_n(x)$ маълум кўпҳад. Агар 0 сони характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган ечими бўлса, хусусий ечимни $\overline{y} = x^r R_n(x)$ шаклда излаш керак, бу ерда $R_n(x)$ — — кўпҳад бўлиб, унинг даражаси $P_n(x)$ нинг даражаси билан бир хил, лекин коэффициентлари номаълум.

2) $f(x) = e^{\gamma x} P_n(x)$ бўлсин, бу ерда γ — ўзгармас сон. Агар γ сон характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y} = x^r e^{\gamma x} R_n(x)$$

шаклда излаш керак, бу ерда $R_n(x)$ ҳам $P_n(x)$ билан даражаси бир хил бўлган кўпҳад.

3) $f(x)=M\cos\delta x+N\sin\delta x$ бўлсин, бу ерда M, N, δ—ўзгармас сонлар. Агар δ сон характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y}=x^r(A\cos\delta x+B\sin\delta x)$$

шаклда излаш керак, бу ерда A, B — номаълум ўзгармас коэффициентлар, $f(x)$ функцияда фақат синус ёки фақат косинус қатнашган, яъни $f(x)=M\cos\delta x$ ёки $f(x)=N\sin\delta x$ ҳолда ҳам хусусий ечимнинг бу шакли сақланиб қолади.

4) $f(x)=e^{\gamma x}[P_n(x)\cos\delta x+Q_m(x)\sin\delta x]$ бўлсин, бу ерда γ, δ— — ўзгармас сонлар, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — маълум кўпҳадлар. Агар $\gamma+$ $+i\delta$ сон характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y}=x^re^{\gamma x}[u(x)\cos\delta x+v(x)\sin\delta x]$$

кўринишида излаш керак, бу ерда $u(x)$, $v(x)$ — коэффициентлари номаълум кўпҳадлар бўлиб, уларнинг даражаси $P_n(x)$, $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг. Хусусий ечимнинг бу шакли $f(x)$ функцияда фақат синус ёки фақат косинус қатнашган, яъни

$$f(x)=e^{\gamma x}P_n(x)\cos\delta x \text{ ёки } f(x)=e^{\gamma x}Q_m(x)\sin\delta x$$

бўлганда ҳам сақланади.

4) ҳолда аввалги 1), 2), 3) ҳолларнинг умумлаштиришини кўриш осон.

5-мисол. Ушбу

$$y^{IV}-y=x^3+1$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш. а) $k^4-1=0$ характеристик тенглама $k_1=1$, $k_2=$ $=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$ илдизларга эга. Бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

кўринишда бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x)=x^3+1=P_3(x)$ кўринишга эга. 0 сони характеристик тенгламанинг ҳеч қайси илдизига тенг эмас, шунинг учун $r=0$. Хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаб, ҳосилаларни топамиз:

$$\begin{aligned}&\overline{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D, && \overline{y}'''=6A,\\ &\overline{y}'=3Ax^2+2Bx+C, && \overline{y}^{IV}=0.\\ &\overline{y}''=6Ax+2B,\end{aligned}$$

Ушбу тенглнкка эга бўламиз:
$-Ax^3-Bx^2-Cx-D=x^3+1$. Бу ерда $A=-1$, $B=C=0$, $D=-1$. Хусусий ечим: $\overline{y}=-x^3-1$.

Демак, умумий ечим:

$$y = Y + y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Бир нечта амалий масалаларнинг таҳлилини келтирайлик.

29. 3. Моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати. Резонанс ҳодисаси. Моддий нуқтага қайтарувчи кучдан ташқари вақтнинг даврий функциясидан иборат бўлган уйғотувчи куч ҳам таъсир этса, у мажбурий тебранма ҳаракатда бўлади. Даврий куч манбаи ўз табиатига кўра турлича бўлиши мумкин. Ёқилғи ёниши натижасида ҳосил бўладиган газларнинг ички ёнув двигатели поршенига таъсир кучи, электромагнитларнинг ўзгарувчан тортиш кучлари, мувозанатланмаган валнинг айланиши натижасида ҳосил бўладиган марказдан қочма инерция кучи ана шулар жумласидандир.

Айтайлик, моддий нуқтага таъсир этувчи $\vec{Q}$ уйғотувчи кучнинг x ўқдаги проекцияси $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ га тенг бўлсин; бу ерда H — уйғотувчи кучнинг амплитудаси, p — унинг доиравий частотаси, δ — бошлангич фаза.

$\vec{F}$ қайтарувчи ва $\vec{Q}$ уйғотувчи кучлар таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m\, x = -cx + H \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \delta), \tag{29.14}$$

бунда

$$k^2 = \frac{c}{m},$$

$$H_0 = \frac{H}{m}.$$

(29. 14) тенглама моддий *нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати тенгламаси* дейилади. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли, бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламадан иборат. Унинг умумий ечими $\ddot{x} + k^2 x = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $x_1 = a \sin(kt + \alpha)$ ва (29. 14) тенгламанинг хусусий ечими x_2 ларнинг йиғиндисига тенг:

$$x = x_1 + x_2. \tag{29. 15}$$

Агар $p \neq k$ бўлса, (29. 14) тенгламанинг хусусий ечимини қуйидаги кўринишда оламиз:

$$x_2 = A \sin(pt + \delta). \tag{29. 16}$$

Бундаги A катталикни аниқлаш учун (29.16) дан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб,

$$x_2 = -Ap^2 \sin(pt + \delta),$$

сўнгра x_2 ва $\ddot{x}_2$ ларнинг қийматини (29. 14) тенгламага қўямиз:

$$-Ap^2 \sin(pt + \delta) + Ak^2 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta). \qquad (29.\ 17)$$

Бу тенглик ўринли бўлиши учун чап ва ўнг томондаги $\sin(pt + \delta)$ олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$A(k^2 - p^2) = H_0.$$

Бундан

$$A = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \qquad (29.18)$$

муносабатни оламиз.

(29. 18) ни (29. 16) га қўйиб, хусусий ечим учун

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

ифодага эга бўламиз.

Шундай қилиб, (29. 14) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \qquad (29.\ 19)$$

Бинобарин, моддий нуқтага бир вақтнинг ўзида $\vec{F}$ қайтарувчи ва $\vec{Q}$ уйғотувчи кучлар таъсир этса, мазкур нуқта k частота билан содир бўладиган эркин тебранма ҳаракат ҳамда уйғотувчи куч частотаси p билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракатлардан ташкил топган мураккаб ҳаракатда бўлади.

(29. 19) даги a ва α доимийлар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Бу тенгламадаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракатини ифодаловчи охирги ҳадда интеграллаш натижасида ҳосил бўладиган доимийлар қатнашмайди. Бинобарин, мажбурий тебранма ҳаракат нуқта ҳаракатининг бошланғич шартларига боғ бўлмайди.

Нуқтанинг

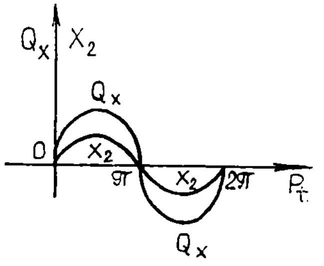
$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \qquad (29.\ 20)$$

қонун асосида содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракатини батафсил текширамиз.

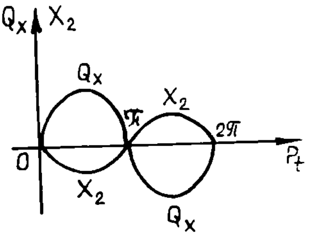
Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси

$$A_1 = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} \qquad (29.\ 21)$$

тенгликдан аниқланади.



35- шакл



36- шакл

Мажбурий тебранма ҳаракат тенгламасинн унинг амплитудаси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$k > p \text{ бўлса, } x_1 = A_1 \sin(pt + \delta),$$

$$k < p \text{ бўлса, } x_2 = -A_1 \sin(pt + \delta) = A_1 \sin(pt + \delta - \pi).$$

Охирги иккита тенгликдан кўрамизки, агар $k > p$ бўлса, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ уйғотувчи куч фазаси билан устма- уст тушади (35- шакл); агар $k < p$ бўлса, мажбурий тебранма ҳаракат ва уйғонувчи куч қарама- қарши фазага эга бўлади, яъни мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан π га орқада қолади (36- шакл).

Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудасини частоталар нисбати орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$A_2 = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H_0}{k^2 \left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|} = \frac{x_{ст}}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|} \qquad (29.22)$$

бунда

$$x_{ст} = \frac{H_0}{k^2}$$

билан нуқтага уйғотувчи кучнинг максимал қийматига тенг куч таъсир этганда унинг мувозанат ҳолатидан статик оғишини ифодаловчи катталик белгиланган.

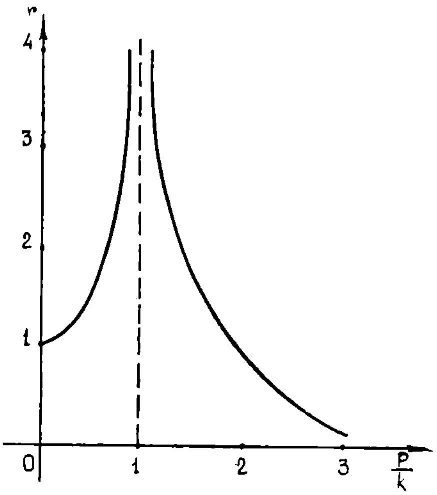
Агар $\frac{A_1}{x_{ст}}$ нисбатни η орқали белгиласак,

$$\eta = \frac{A_1}{x_{ст}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|}, \qquad (29.23)$$

η катталик *динамиклик коэффициенти* дейилади; бу коэффициент мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси статик оғишидан неча марта ортиқ бўлишини ифодалайди. 37- шаклда ифодаланган (29.23) ифоданинг графигидан кўрамизки, $\frac{p}{k} \to 1$ да динамиклик коэффициенти жуда катта қийматга эришади. (29. 17) дан кўрамизки, $p \approx k$ бўлганда (29.16) кўринишидаги хусусий ечим мавжуд бўлмайди. Бу ҳолда хусусий ечимни қуйидагича танлаб оламиз:

$$x^*_2 = \frac{H_0}{k^2-p^2} (\sin pt - \sin kt).$$

Бу ечимни (29. 19) тенглик билан ифодаланадиган умумий ечимдан a, α ва δ катталиклар



37- шакл

$$a = -\frac{H_0}{k^2 - p^2}, \quad \alpha = 0, \quad \delta = 0$$

қийматларни қабул қилган ҳолда келтириб чиқариш мумкин. Агар $p = k$ бўлса, мазкур хусусий ечим $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасликдан иборат бўлади. Бу аниқмасликни йўқотиш учун Лопиталь қоидасидан фойдаланамиз:

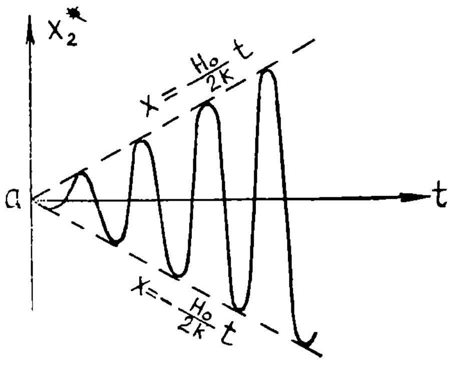
$$x_2^* = H_0 \left[\frac{\frac{d}{dp}(\sin pt - \sin kt)}{\frac{d}{dp}(k^2 - p^2)} \right]_{p=k} = \frac{-H_0 t}{2k} \cos kt. \qquad (29.24)$$

Шундай қилиб, $p = k$ ҳолида (29. 14) тенгламанинг умумий ечимини

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{H_0 t}{2k} \cos kt \qquad (29.\ 25)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

38- шаклда x_2^* функциянинг графиги тасвирланган бўлиб, $p = k$ бўлганда вақтнинг ўтиши билан тебраниш амплитудаси вақтнинг чизиқли функцияси сифатида чексиз орта боради. Бу ҳодисага *резонанс* дейилади.



38- шакл

Резонанс ҳодисасини эътиборга олмаслик натижасида баъзида иншоотлар тўсатдан бузилиб кетиши мумкин. Масалан, осма кўприк устидан аскарлар бир хил қадам ташлаб ўтганда аскар қадамларининг частотаси кўприкнинг тебраниш частотаси билан устма- уст тушганда резонанс ҳодисаси рўй беради ва натижада кўприк бузилиб кетиши мумкин. 1850 йилда Анжер осма кўприги устидан 500 кишилик француз пиёда аскарлари батальони бир меъёрда қадам ташлаб ўтиб бораётганда бу кўприк бузилиб кетган ва натижада 226 киши ҳалок бўлган.

Акустика ва радиотехникада ҳамда турли иншоотларнинг лойиҳасини динамик ҳисоблашда резонанс ҳодисаси алоҳида аҳамиятга эга.

29. 4. Нуқтанинг мажбурий тебранишига муҳит қаршилигининг таъсири. Эркин тебранма ҳаракатдаги нуқтага тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган муҳитнинг қаршилик кучи таъсир этганда нуқта сўнувчи тебранма ҳаракатда бўлишини кўрган эдик. Энди мажбурий тебранма ҳаракатдаги нуқтага бундай қаршилик кучи қандай таъсир этишини кўрамиз. Ox ўқ бўйича ҳаракатланувчи M нуқтага қайтарувчи куч $\vec{F}$, уйғотувчи куч $\vec{Q}$ ва тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган $\vec{R} = -\mu\cdot\vec{v}$ қаршилик кучи таъсир этсин.

Координаталар бошини пружина деформацияланмаган ҳолатига мос келувчи нуқтанинг эгаллаган ҳолатида олиб, унинг ихтиёрий пайтдаги координатасини x билан белгилайлик. У ҳолда нуқтага таъсир этувчи кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича ифодаланади:

$$F_x = -cx,\quad Q_x = H\sin(pt+\delta) - \mu\dot{x},\quad R_x = -\mu x.$$

Бундай кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin(pt+\delta) - \mu\dot{x}$$

кўринишда ёзиш мумкин. cx ва μx ҳадларни чап томонга ўтказиб, тенгламанинг иккала томонини m га бўлсак,

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}x + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt+\delta)$$

ва $\frac{\mu}{m} = 2n$, $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{H}{m} = H_0$ белгилашларни киритсак,

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \delta) \qquad (29.26)$$

дифференциал тенглама ҳосил бўлади. (29. 26) тенглама ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли, бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламадан иборат бўлиб, унинг умумий ечими (27. 21) бир жинсли тенгламанинг умумий ечими x_1 билан (29. 26) тенгламанинг хусусий ечими x_2 ларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$x = x_1 + x_2. \qquad (29.27)$$

(27. 21) тенгламанинг умумий ечимини n ва k ларнинг қандай қийматларни қабул қилишига қараб, мос равишда (27. 22) ёки (27. 23), (27. 32) ёки (27. 34) ҳамда (27. 35) кўринишда олиш мумкин.

(29. 26) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin(pt + \delta - \varepsilon) \qquad (29.28)$$

шаклида оламиз. Бундаги A ва ε доимийларни аниқлаш учун $\dot{x}_2$ ва $\ddot{x}_2$ ларни ҳисоблаб,

$$\dot{x}_2 = Ap \cos(pt + \delta - \varepsilon),$$
$$\ddot{x}_2 = Ap^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

сўнгра x_2, $\dot{x}_2$ ва $\ddot{x}_2$ ларнинг қийматини (29. 26) га қўямиз:

$$-Ap^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nAp \cos(pt + \delta - \varepsilon) + Ak^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) =$$
$$= H_0 \sin(pt + \delta). \qquad (29.29)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги ифодани қуйидагича ёзиб:

$$H_0 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta - \varepsilon + \varepsilon) =$$
$$= H_0 \sin(pt + \delta - \varepsilon) \cos\varepsilon + H_0 \cos(pt + \delta - \varepsilon) \sin\varepsilon,$$

олинган натижани (29. 29) га қўямиз:

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2npA \cos(pt + \delta - \varepsilon) =$$
$$= H_0 \cos\varepsilon \cdot \sin(pt + \delta - \varepsilon) + H_0 \sin\varepsilon \cdot \cos(pt + \delta - \varepsilon).$$

Бу тенглама t вақтнинг ҳар қандай қийматида ўринли бўлиши учун $\sin(pt + \delta - \varepsilon)$ ва $\cos(pt + \delta - \varepsilon)$ олдидаги мос коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$\left.\begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= H_0 \cos\varepsilon, \\ 2npA &= H_0 \sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (29.30)$$

(29. 30) дан A ва ε лар аниқланадиган ушбу муносабатларни оламиз:

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}, \qquad (29.\ 31)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2-p^2} \qquad (29.\ 32)$$

ε ни (29. 32) дан аниқлаш мумкинлигини назарда тутиб, мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси A нинг қийматини (29. 28) га қўйсак,

$$x_2 = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \sin(pt+\delta-\varepsilon) \qquad (29.33)$$

тенгликни оламиз.

Шундай қилиб, k ва n лар орасидаги муносабат қандай бўлишига қараб, (29. 26) тенгламанинг умумий ечимини

1) $n < k$ бўлганда $k_1 = \sqrt{k^2-n^2}$ белгилашни киритиб,

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1t + C_2 \sin k_1t) + A\sin(pt+\delta-\varepsilon) \qquad (29.\ 34)$$

ёки

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha) + A\sin(pt+\delta-\varepsilon); \qquad (29.\ 35)$$

2) $n > k$ муносабат ўринли бўлганда $(h = \sqrt{n^2-k^2})$

$$x = e^{-nt}(C_1e^{ht} + C_2e^{-ht}) + \sin(pt+\delta-\varepsilon) \qquad (29.\ 36)$$

ёки

$$x = ae^{-nt}\operatorname{sh}(ht+\alpha) + A\sin(pt+\delta-\varepsilon); \qquad (29.\ 37)$$

3) $n = k$ ҳолида

$$x = e^{-nt}(C_1t + C_2) + A\sin(pt+\delta-\varepsilon) \qquad (29.38)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгламаларда C_1, C_2 ва a, α лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Масалан, (29.34) даги C_1 ва C_2 ларни аниқлаш учун ундан вақт бўйича ҳосила оламиз ҳамда олинган тенгламага ва (29.34) га $t = 0$ да $x = x_0$, $\dot{x} = x_0$ бошлангич шартларни қўямиз:

$$C_2 = \frac{1}{k_1}[\dot{x}_0 + nx_0 - nA\sin(\delta-\varepsilon) - Ap\cos(\delta-\varepsilon)],$$

$$C_1 = x_0 = A\sin(\delta-\varepsilon). \qquad (29.34)$$

C_1 ва C_2 нинг қийматларини (29.34) га қўйиб, моддий нуқтанинг $n < k$ ҳолдаги ҳаракат қонунини оламиз:

$$x = e^{-nt}\left[\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1}\sin k_1t + x_0\cos k_1t\right] -$$

$$- e^{-nt}\left\{\frac{A}{k_1}[n\sin(\delta-\varepsilon) + p\cos(\delta-\varepsilon)]\sin k_1t + \right.$$

$$+A\sin(\delta-\varepsilon)\cdot\cos k_1t\Big\} + A\sin(pt+\delta-\varepsilon). \qquad (29.39)$$

(29.39) дан кўрамизки, $n < k$ бўлганда моддий нуқтанинг ҳаракатини биринчи қўшилувчи билан ифодаланадиган ва бошланғич шартларга боғлиқ бўлган сўнувчи тебранма ҳаракат, иккинчи қўшилувчи билан ифодаланадиган ва уйғотувчи куч таъсирида k_1 частота билан содир бўладиган сўнувчи тебранма ҳаракат ҳамда учинчи қўшилувчи билан ифодаланадиган соф мажбурий тебранма ҳаракатлардан ташкил топган, деб қараш мумкин.

(29.34) — (29.38) формулаларда қатнашувчи e^{-nt} кўпайтувчи вақтнинг ўтиши билан нолга интилади, яъни бу кўпайтувчи қатнашган ҳадлар сўнувчи тебранма ёки апериодик ҳаракатни ифодалайди. Шу сабабли маълум вақт ўтгандан кейин нуқтанинг ҳаракати фақат

$$x = A\sin(pt+\delta-\varepsilon)$$

қонун билан ифодаланадиган мажбурий тебранишдан иборат бўлиб қолади ҳамда мажбурий тебранма ҳаракат қаршилик кучи таъсирида сўнмайди.

Мажбурий тебранишдан фарқли ўлароқ, эркин тебранма ҳаракатда жуда кичик қаршилик мавжуд бўлганда ҳам ҳаракат сўнувчи бўлади.

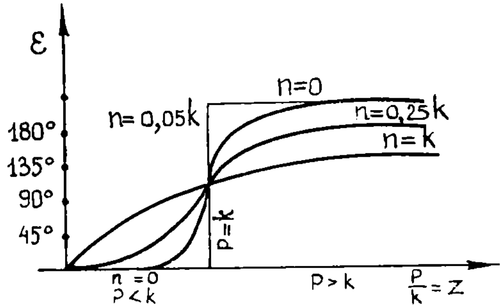
Қаршилик мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат частотаси p ва тебраниш даври $\tau = \frac{2\pi}{p}$ уйғотувчи куч частотаси ва даврига тенг бўлади ҳамда муҳитнинг қаршилиги мажбурий тебранма ҳаракат частотаси ва даврига таъсир этмайди.

Қаршилик кучи мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат фазаси $(pt+\delta-\varepsilon)$ уйғотувчи куч фазаси $(pt+\delta)$ дан *фаза силжиши* деб аталадиган ва (17.55) формула ёрдамида аниқланадиган ε катталик қадар орқада қолади.

(29.32) дан кўрамизки, $\sin\varepsilon = \frac{2npA}{H_0} > 0$ бўлгани учун ε катталик $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi$ оралиқда ўзгаради. Шу сабабли, ε ни (29.32) формула воситасида бир қийматли аниқлаш мумкин:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2-p^2} \quad \text{ёки} \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2\frac{n}{k}\frac{p}{k}}{2-\left(\frac{p}{k}\right)^2} = \frac{2\beta z}{1-z^2}.$$

Бу формулалардан кўрамизки, ε нинг қиймати уйғотувчи куч частотаси билан эркин тебраниш частотасининг нисбатига тенг бўлган $\frac{p}{k} = z$ катталикка ҳамда *сўниш коэффициенти* деб аталадиган $\frac{n}{k} = \beta$ нинг миқдорига боғлиқ бўлади.



39- шакл

Бинобарин, β га маълум қийматларни бериб, ε билан z орасидаги муносабатни 39-шаклдагидек тасвирлаш мумкин.

Қаршилик кучи таъсир этмаган ҳолда $n = 0$ ва $\operatorname{tg}\varepsilon = 0$ бўлади. Бу ҳолда кичик частота $\left(\frac{p}{k} < 1\right)$ билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракат учун $\varepsilon = 0$ бўлиб, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси билан уйғотувчи куч фазаси устма-уст тушади.

$p = k$ бўлса, яъни уйғотувчи куч частотаси эркин тебранишлар частотаси билан устма-уст тушса, сўниш коэффициенти p қандай қийматни қабул қилишидан қатъи назар,

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2pz}{1-z^3} = \infty \text{ ва } \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

бўлади. Бинобарин, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан $\frac{\pi}{2}$ қадар орқада қолади.

Катта частота $\left(\frac{p}{k} > 1\right)$ билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракат учун $\varepsilon = \pi$ бўлиб, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан π қадар орқада қолади, яъни унга қарама-қарши бўлади.

k, p ва n ларнинг қийматлари маълум бўлса, 40-шаклда тасвирланган графикдан силжиш фазаси ε ни бевосита аниқлаш мумкин.

Муҳитнинг қаршилик кучи мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси (29.31) формуладан аниқланади. Бу формуладаги касрнинг сурат ва маҳражини k^2 га бўлиб, мажбурий тебраниш амплитудаси учун қуйидаги ифодани оламиз:

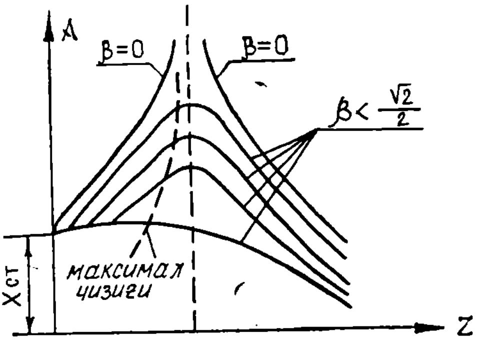
$$A = \frac{\frac{H_0}{k^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)\right]^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}}$$

ёки

$$A = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \qquad (29.40)$$

бунда $z = \frac{p}{k}$, $\beta = \frac{n}{k}$, $x_{\text{ст}} = \frac{H_0}{k^9}$ бўлиб, $x_{\text{ст}}$ катталик уйғотувчи куч

$\vec{Q}$ нинг максимал қийматига тенг бўлган ўзгармас H куч таъсирида нуқтанинг мувозанат ҳолатидан статик силжишини ифодалайди. (29.40) дан кўрамизки, сўниш коэффициенти, β берилганда A мажбурий тебраниш амплитудаси z нинг функциясидан иборат бўлади. 40-шаклда тасвирланган эгри чизиқларнинг ҳар бири β нинг маълум қийматида A амплитуда билан z орасидаги муносабатни ифодалайди.



40- шакл

(29.40) дан кўрамизки,

$$(A)_{z=0} = x_{ст};\ (A)_{z=1} = \frac{x_{ст}}{2\beta} \tag{29.41}$$

ҳамда

$$\lim_{z\to\infty} A = 0,$$

яъни z ўқ 40-шаклда тасвирланган эгри чизиқларнинг амплитудасини ифодалайди.

z қандай қийматни қабул қилганда A амплитуда максимал қийматга эга бўлишини аниқлаймиз. Бунинг учун (29.40) да илдиз остидаги ифодани $f(x)$ билан белгилаймиз, яъни

$$f(z) = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2.$$

$f(z)$ нинг минимал қийматига A нинг максимал қиймати мос келади. $f(z)$ экстремал қийматларини аниқлаш учун унинг z бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{df(z)}{dz} = -4z(1 - z^2) + 8\beta^2 z$$

$$\frac{d^9f(z)}{dz^2} = -4 + 12z^2 + 8\beta^2.$$

$\frac{df(z)}{dz}$ ни нолга тенглаб, z нинг A амплитуда экстремал қийматларга эришадиган ва бизни қизиқтирадиган $z \geqslant 0$ қийматларини аниқлаймиз:

$$z_1 = 0,\ z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}.$$

Агар $\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлса, у ҳолда $z_1 = 0$ да $\frac{d^9f(z)}{dz^2} < 0$, яъни $f(z)$ функция максимумга, A эса минимумга эришади.

$z_2 = \sqrt{1-2\beta^2}$ илдиз учун $\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = 8(1-2\beta^2) > 0$, яъни $z = z_2$ бўлганда $f(z)$ минимумга, A эса максимал қийматга эришади.

(29.40) формулага $z = \sqrt{1-2\beta^2}$ ни қўйиб, мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг максимал қийматини аниқлаймиз:

$$A_{\max} = \frac{2x_{\text{ст}}}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (29.42)$$

(29.42) ни (29.41) билан солиштириб,

$$A_{\max} > (A)_{z=1}$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

40-шаклда пунктрли эгри чизиқ амплитуданинг максимал нуқталари орқали ўтади.

Бу шаклдан кўрамизки, $z=1$ га нисбатан z етарлича катта ёки кичик қийматларни қабул қилганда мажбурий тебранишлар амплитудаси муҳитнинг қаршилигига деярли боғлиқ бўлмайди. Аммо z катталик $z=1$ га яқин қийматларни қабул қилганда муҳит қаршилигининг таъсири ниҳоятда катта бўлади.

Шундай қилиб, агар сўниш коэффициенти $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда $z = z_2 = \sqrt{1-2\beta^2}$ қийматга эришганда резонанс ҳодисаси рўй беради, яъни резонанс $z = \frac{p}{k}$ частоталар нисбати бирдан бирмунча кичик бўлганда содир бўлади. (29.42) га кўра $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ га мос бўлган резонанс пайтида мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси чекли бўлади.

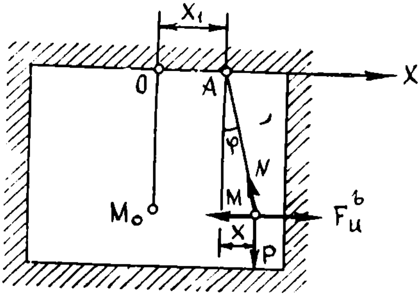
Агар сўниш коэффициенти жуда кичик бўлса, у ҳолда $z = 1$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда $p=k$ бўлганда, яъни уйғотувчи куч частотаси эркин тебраниш частотаси билан устма-уст тушганда резонанс содир бўлади.

43-шаклда $\beta = 0$ га мос эгри чизиқ қаршилик мавжуд бўлмагандаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракатига мос келади.

Агар $\beta = 0$, $p = k$ бўлса, (29.40) формулага биноан мажбурий тебраниш амплитудаси чексиз катта қийматга эга бўлади. Бу ҳолда тебранма ҳаракат қонуни (29.25) формула ёрдамида аниқланади.

29.5. Горизонтал тебранишларни ёзиш учун сейсмограф. Сейсмограф деб ернинг тебранишларини ёзиш учун сейсмик станцияларда ўрнатиладиган асбобларга айтилади. Ернинг горизонтал силкинишларини ёзиш учун хизмат қиладиган энг содда сейсмографни кўриб чиқайлик.

Ер остидаги хонада жойлашган оддий тебрангични тасаввур этайлик (41-шакл). Ер силкинишлари бўлмаган ҳолда тебрангич OM_0 вертикал мувозанат вазиятда бўлади. Энди ер горизонтал тебранмоқда деб тасаввур этайлик. Бу тебранишлар тебрангични тебрантиради, улар эса, ўз навбатида, тебрангичга маҳкамланган учлик мослама ёрдамида ёзилади. Энди ер тебранишлари билан тебрангич тебранишлари орасида қандай боғланиш борлигини кўриб чиқайлик.



41-шакл

Бундай йўл билан ёзиб олинадиган тебрангич тебранишлари тебрангичнинг тебранаётган ерга нисбатан ҳаракатининг ўзидир. Тебрангич тебранишларининг дифференциал тенгламасини ёзамиз.

Ер ҳаракатини илгариланма ҳаракат деб ҳисоблаб, у гармоник тебранмоқда деб фараз қиламиз. Тебрангичнинг осиш ўқи атрофидаги ер билан бирга силжиб, қаралаётган вақтда A вазиятни эгаллайди. OA ни x_1 билан белгилаб (45-шаклда x ўқ чапдан ўнгга йўналган):

$$x_1 = \alpha \sin pt$$

га эга бўламиз, бу ерда α ва p — ер тебранишининг амплитудаси ва частотаси.

M жисмга (уни моддий нуқта деб қараймиз) тебрангичнинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ва стерженнинг реакция кучи $\vec{N}$ қўйилган. Бу кучлар қаторига инерция кўчириш кучи $\vec{F_u^e} = -m w_l$ ни ҳам киритамиз, m A нуқтанинг тезланиш массаси, w_l — тезланишнинг x ўққа проекцияси

$$x_1'' = -\alpha p^2 \sin pt$$

га тенг. Бундан $w_l = \alpha p^2 \sin pt$ эканлиги келиб чиқади. Шу билан бирга w_l тезланиш x ўқнинг манфий томонига, яъни ўнгдан чапга йўналган (агар $\sin pt > 0$ бўлса), демак,

$$F_u^e = m\alpha p^2 \sin pt,$$

шу билан бирга $\vec{F_u^e}$ куч чапдан ўнгга йўналган (агар $\sin pt > 0$ бўлса).

Энди моментлар ўқи сифатида тебрангичнинг айланиш ўқи A ни олиб, моментлар қонунидан фойдаланамиз; бу ўқни z ўқ деб атаймиз. Тебрангичнинг MA узунлигини l билан, унинг вертикалдан оғиш бурчагини φ билан белгилаб,

$$l_z = mvl, \ v = l\varphi' \to l_z = ml^2\varphi'$$

га эга бўламиз. Моментлар қонунига асосан

$$ml^2\varphi'' = -Pl\sin\varphi - F_u^e l\cos\varphi$$

ни ҳосил қиламиз ёки F_u^e инерция кучи қийматини қўйиб ва $P = mg$ эканлигини ҳисобга олиб, ml^2 га қисқартирсак,

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{\alpha p^2}{l}\sin pt\cos\varphi.$$

Тебрангичнинг кичик тебранишларидан иборат ҳол билан чегаралаnamиз. $\sin\varphi \approx \varphi$ ва $\cos\varphi \approx 1$ деб,

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = \frac{\alpha p^2}{l}\sin pt$$

га эга бўламиз, φ бурчак ўрнига B нуқтанинг осиш нуқтаси A орқали ўтадиган вертикалдан горизонтал оғиши x ни киритамиз. $x = l\varphi$ деб (φ бурчакнинг кичиклигига асосан)

$$x'' + \frac{g}{l}x = \alpha p^2\sin pt$$

тенгламага эга бўламиз. Тебрангичнинг кичик тебранишлари дифференциал тенгламаси ана шундан иборат. Биз мажбурий тебранишлар дифференциал тенгламасини ҳосил қилдик.

Бу тенгламани интеграллаб,

$$x = a\sin(kt+\beta) + \alpha\frac{p^2}{k^2-p^2} - \sin pt$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — тебрангичнинг эркин тебранишлари частотаси, a ва β — ихтиёрий ўзгармаслар, улар бошланғич шартлардан аниқланади.

Шундай қилиб, тебрангич ҳаракати эркин ва мажбурий тебранишларнинг қўшилишидан ҳосил бўлади. Ер ҳаракати

$$x_1 = \alpha\sin pt$$

тенглама бўйича содир бўлишини ҳисобга олсак, кўрамизки, тебрангичнинг мажбурий тебранишлари ер тебранишларини уларни

$$\frac{p^3}{k^2-p^2} = \frac{1}{\left(\frac{k}{p}\right)^2-1}$$

нисбатда орттириб ёки камайтириб такрорлайди. Агар эркин тебранишлар бўлмаганида эди, у ҳолда тебрангич тебранишлари ёзуви ер тебранишларини тўғри қайд этган бўлар эди. Тебрангичнинг эркин тебранишлари бундай қайд этишга имкон бермайди. Шунга ишонч ҳосил қилиш мумкинки, p/k кичик миқдор бўлганда, яъни тебрангич катта частотали эркин тебранишларга эга бўлганда эркин тебранишларнинг таъсири унча катта бўлмайди. Бироқ, агар p/k кичик бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{p}\right)^2-1}$$

кичик миқдор бўлади ва, демак, тебрангичнинг мажбурий тебранишлари амплитудаси

$$\frac{\alpha}{\left(\frac{k}{p}\right)^2-1}$$

ҳам кичик бўлади, яъни тебрангич ер тебранишларига кам сезгир бўлади.

Шу сабабли эркин тебранишларнинг олдини олиш учун бошқача йўл тутишга тўғри келади, чунончи эркин тебранишларни сўндирадиган катта қаршиликлар киритилади. Қаршиликларни тезликнинг биринчи даражасига пропорционал ҳисоблаб, тебрангич тебранишлари дифференциал тенгламасига эга бўламиз ($R = -\mu x$):

$$x'' + 2n\dot{x} + \frac{g}{l}x = \alpha p^2 \sin pt,$$

бу ерда $2n = \frac{\mu}{m}$ — сўниш коэффициенти. Бу ҳолда тебрангичнинг мажбурий тебранишлари амплитудаси

$$\frac{\alpha p^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\left(\frac{k^2}{p^2}-1\right)^2+\frac{4n^2}{p^2}}}$$

қийматга эга бўлади.

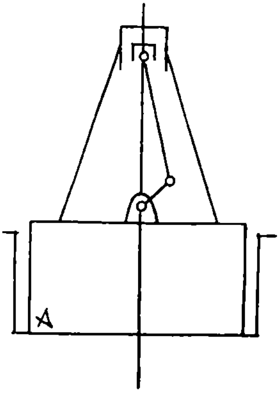
Сейсмологик станцияларда сейсмографлар махсус электромагнит сўндиргичга эга бўлиб, у апериодиклик чегарасигача келтирилади ($n = k$). Тебрангичнинг эркин тебранишлар частотаси қанчалик кичик бўлса, у шунча сезгир бўлади.

Мана шунинг учун сейсмографларда асбобнинг эркин тебранишлари частотасини камайтириш (ёки даврини ошириш) га ҳаракат қилинади. Бунга тебрангичнинг айланиш ўқини горизонтал эмас, балки деярли вертикал қилиш йўли билан эришилади (горизонтал тебрангич) ёки тебрангични тўнкарилган ҳолатга қўйилади. Бу ерда баён этилган мулоҳазалар тебранишларни ёзиш учун хизмат қилувчи барча асбобларга қўлланилиши мумкин.

29.6. Пойдевор вибрацияси. *А* пойдеворга вертикал бир цилиндрли двигатель ўрнатилган (42-шакл). Двигатель ишлаётган вақтда пойдевор узлуксиз титраб (тебраниб) туради. Пойдеворнинг вибрациясини текшириш талаб этилади.

Бу масалани ҳал этиш учун двигатель, пойдевор ва пойдевор қурилган грунтни (ерни) тавсифловчи маълумотлар керак.

Двигателга келсак, унинг қайтма-илгарилама ҳаракатланувчи қисмларининг оғирлиги P (P оғирликка поршеннинг оғирлиги ва ша-



42- шакл

туннинг тахминан $\frac{1}{3}$ қисми оғирлиги киради), кривошипнинг узунлиги r ва шатуннинг узунлиги l берилади. Двигателнинг бош вали ω^2 бурчак тезлик билан текис айланади деб ҳисоблаймиз.

Сўнгра Q орқали пойдеворнинг (двигателнинг қайтма ҳаракатда иштирок этмайдиган қисмлари билан биргаликдаги) оғирлигини, S орқали эса пойдевор тагининг юзини белгилаймиз. Ниҳоят, грунтнинг эластиклик хусусиятларини тавсифлайдиган миқдорни бериш лозим. Пойдевор грунтга чўкканида пойдеворга грунтнинг эластик реакция кучи $\vec{F}$ таъсир қилади, уни пойдевор тагининг юзи S га ва пойдеворнинг грунтга чўкиш чуқурлигига пропорционал деб ҳисоблаймиз. Пойдеворнинг бу чўкиши ёки ўтиришини δ билан белгилаб, қуйидагига эга бўламиз:

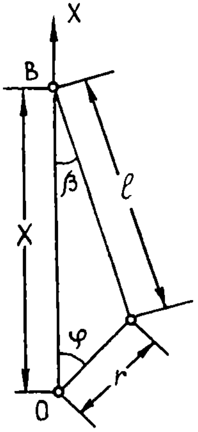
$$F_1 = cS\delta. \qquad (29.43)$$

Бу формуладаги c коэффициент орқали (уни грунтнинг бикрлик коэффициенти деб атаймиз) грунтнинг эластиклик хоссаларини тавсифлаймиз. Агар F кг ҳисобида, S см^2 ҳисобида, δ эса см ҳисобида ифодаланса, у ҳолда c коэффициент кг/см^3 да ифодаланиши лозим эканини таъкидлаймиз.

Шундай қилиб, P ва Q оғирликлар, пойдевор тагининг юзи S, кривошип ва шатун узунликлари r ва l, грунтнинг бикрлиги c ҳамда двигатель бош валининг бурчак тезлиги ω берилган. Бу маълумотлар бўйича пойдевор вибрациясини ҳисоблаш талаб қилинади.

$m = \frac{P}{g}$ орқали двигателнинг қайтма-илгарилама ҳаракатланаётган қисмлари массасини белгилаймиз. Агар пойдевор қўзғалмас бўлганида эди, r, l ва ω маълумотлар бўйича m массани (яъни двигател поршени ҳаракатини) аниқлаш осон бўлар эди. Бироқ аслида пойдевор ва у билан биргаликда бутун машина вибрацияланади. Аслида массанинг абсолют ҳаракати унинг пойдеворга нисбатан нисбий ҳаракати (бу массанинг пойдевор қўзғалмас деб қилинган фараздаги ҳаракатидир) ва пойдевор билан биргаликдаги кўчма ҳаракатининг қўшилишидан иборатдир. Бу икки ҳаракатдан биринчиси бизга маълум (чунки кривошип механизмининг ўлчамлари ва бурчак тезлик берилган), пойдевор билан биргаликдаги кўчма ҳаракат эса ҳозирча номаълум, ана шуни аниқлаш керак. Биз пойдевор вертикал йўналишда тебранади ва бунда илгариланма кўчади деб ҳисоблаймиз. Биз кўчма ҳаракатни илгариланма ҳаракат деб фараз қилаётганимиз учун m массанинг пойдевор билан биргаликдаги кўчма ҳаракатини, агар m массага таъсир этаётган кучлар қаторига нисбий инерция кучи $\vec{F}^{r}_{u}$ ни киритадиган бўлсак, абсолют ҳаракат деб талқин этишга ҳақлимиз. Бу инерция кучини киритиб, m массанинг нисбий ҳаракатини қарамасдан, балки бу массани пойдевор билан доимий боғланган деб ҳисоблаймиз. Двигатель ишлаётган вақтда пойдевор вибрацияси бу ҳолда гўёки машина ишлаётгандек, бироқ m массага $\vec{F}^r_u$ ўзгарувчи куч қўйилгандек бўлади.

Нисбий инерция кучи $\vec{F}^r_u$ ни ҳисоблашга ўтамиз. Бизга маълумки, бу куч сон жиҳатдан $m\,w_r$ га тенг ва w_r тезланишга қарама-қарши йўналган, m массанинг нисбий тезланиши w_r ни ҳисоблаймиз. w_r пойдевор қўзғалмас бўлганда B нуқтанинг тезланишининг ўзидир (43-шакл). B нуқтанинг ҳаракат тенгламасини тузамиз. x ўқини цилиндр ўқи бўйича юқорига йўналтирамиз ва саноқ бошини O нуқтада белгилаймиз. $OB = x$ деб белгилаб,



43- шакл

$$x = r\cos\varphi + l\sin\beta$$

га эга бўламиз, бу ерда φ — кривошипнинг бурилиш бурчаги, β — шатуннинг цилиндр ўқи билан ташкил этган бурчаги.

β бурчак φ бурчак билан

$$r\sin\varphi = l\sin\beta$$

тенглик орқали боғланган.

Бундан $\sin\beta = \lambda\sin\varphi$, бу ерда $\lambda = \frac{r}{l}$. Демак,

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}.$$

Радикални Ньютон биноми формуласи бўйича ёйиб ва бу ёйилмада λ нинг тўртинчи ва юқори даражаларини ўз ичига олган барча ҳадларни ташлаб юбориб, тақрибан

$$\cos\beta = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi$$

ни ҳосил қиламиз, ва демак:

$$x = r\cos\varphi + l\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi\right) = r\left(\cos\varphi - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi\right) + l.$$

Бу ерда $\varphi = \omega t$ деб, B нуқта ҳаракатининг тақрибий тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x = r\left(\cos\omega t - \frac{\lambda}{2}\sin^2\omega t\right) + l.$$

Буни вақт бўйича икки марта дифференциаллаймиз:

$$x' = -r\omega(\sin\omega_t + \lambda\sin\omega t\cos\omega t) = -r\omega\left((\sin\omega t + \frac{\lambda}{2}\sin^2\omega t\right),$$

$$x'' = -r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t),$$

иккинчи тартибли x'' ҳосила w_r тезланишнинг x ўққа проекциясидан иборатдир, бу проекцияни w_{rx} билан белгиласак,

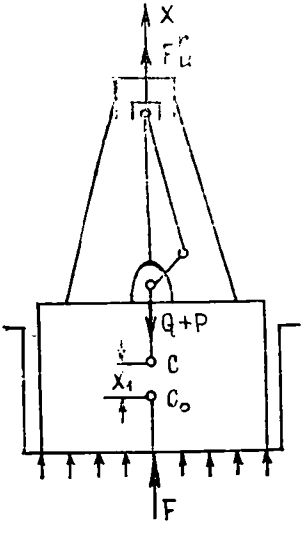
$$w_{rx} = -r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t)$$

га эга бўламиз.

$\vec{F}^r_u$ инерция кучи миқдор бўйича mw_r га тенг ва w_r тезланишга тескари йўналганлиги учун $\vec{F}^r_u$ инерция кучининг Ox ўққа проекциясини F^r_{ux} орқали белгиласак,

$$F^r_{ux} = -mw_{rx} = mr\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t) \qquad (29.44)$$

ни ҳосил қиламиз.



44- шакл

Энди пойдевор ҳаракатини аниқлашга ўтамиз. $M+m$ массага $\vec{Q}+\vec{P}$ оғирлик кучи ва грунтнинг эластик реакция кучи $\vec{F}$ таъсир этади; бу кучлар қаторига нисбий инерция кучи $\vec{F}^r_u$ ни ҳам киритамиз (44-шакл). Мувозанат ҳолатда пойдевор статик чўкиш f га эга бўлиб, у оғирлик кучи $\vec{Q}+\vec{P}$ билан грунтнинг эластик реакция кучи $\vec{F}$ орасидаги мувозанатдан, яъни

$$Q + P = cSF \qquad (29.45)$$

тенгликдан аниқланади.

Пойдевор оғирлиги мувозанат вазиятининг марказини C_0 орқали ва унинг тебраниш вақтининг бирор пайтидаги вазиятини C орқали белгилаймиз. Ox ўқни вертикал юқорига йўналтирамиз ва $C_0 \cdot C$ ни x_1 билан белгилаймиз (x_1 миқдор C_0 нуқтадан юқорига томон қўйилганда уни мусбат ҳисоблаймиз). Мазкур вақтда пойдеворнинг чўкиши $f - x_1$ га тенг бўлганлиги учун эластиклик кучи F учун

$$F = cS(f - x_1)$$

ифодани оламиз.

$M+m$ масса ҳаракатининг дифференциал тенгламасининг x ўққа проекцияси

$$(M+m)x_1'' = -(Q+P) + F + F^r_{ux} = -(Q+P) + cS(f - x_1) + F^r_{ux},$$

бундан (29.45) ни ҳисобга олиб ва (29.44) дан F^r_{ux} нинг қийматини қўйиб,

$$(M+m)x_1'' = -cSx_1 + mr\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t).$$

$\frac{cS}{M+m} = k^2$ белгилашни киритамиз. У ҳолда ҳосил бўлган тенглама ушбу кўринишни олади:

$$x_1'' + k^2 x_1 = \frac{m}{M+m}\omega^2(\omega t + \lambda\cos 2\omega t). \qquad (29.46)$$

Биз бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенглама ҳосил қилдик. Мос бир жинсли

$$x_1'' + k^2 x_1 = 0$$

тенгламанинг ечими бизга маълум бўлиб, у

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad (29.47)$$

га тенг, бу ерда C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини A ва B номаълум коэффициентлари билан

$$x_1 = A \cos \omega t + B \cos 2 \omega t$$

кўринишда излаймиз. x_1 нинг бу қийматини (29.46) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(k^2 - \omega^2) A \cos \omega t + (k^2 - 4\omega^2) B \cos 2 \omega t = \frac{mr\omega^2}{M+m} (\cos \omega t + \lambda \cos 2 \omega t),$$

бу ерда тенгликнинг чап ва ўнг томонидаги $\cos \omega t$ ва $\cos 2 \omega t$ олдидаги коэффициентларни тенглаб, топамиз:

$$A = \frac{mr\omega^2}{(M+m)(k^2-\omega^2)}, \quad B = \frac{mr\omega^2\lambda}{(M+m)(k^2-4\omega^2)}.$$

Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим бундай бўлади:

$$x_1 = \frac{mr\omega^2}{M+m} \left(\frac{\cos \omega t}{k^2-\omega^2} + \frac{\lambda \cos 2 \omega t}{k^2 - 4\omega^2} \right).$$

Бу хусусий ечимга бир жинсли тенгламанинг (29.47) умумий ечимини қўшиб, (29.46) тенгламанинг умумий ечимини оламиз:

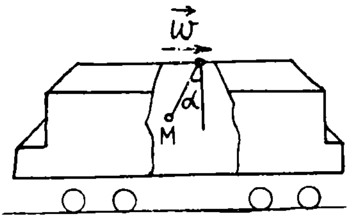
$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{mr\omega^2}{M+m} \left(\frac{\cos \omega t}{k^2-\omega^2} + \frac{\lambda \cos^2 \omega t}{k^2-4\omega^2} \right).$$

C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармасларни ўз ичига олган ҳадлар пойдеворнинг хусусий ёки эркин тебранишларига мос келади, бу тебранишлар частотаси k га тенг. Олинган формуладаги сўнгги ҳад пойдеворнинг мажбурий тебранишларига мос келади. Бу мажбурий тебранишлар, ўз навбатида, ω ва 2ω частотали иккита гармоник тебранишнинг қўшилишидан ҳосил бўлади.

Бу ерда, кўриниб турибдики, биз резонанснинг иккита ҳолига эгамиз: $\omega = k$ бўлганда ва $\omega = \frac{k}{2}$ бўлганда. Двигател бурчак тезлигининг пойдевор кучли вибрациясини кутишимиз мумкин бўлган бу қийматлари *критик бурчак тезликлар*, уларга мос бурчак тезликлар эса *критик айланишлар сони* деб аталади.

Пойдеворни лойиҳалашда унинг оғирлиги ва ўлчамларини шундай танлаш лозимки, двигателнинг нормал айланишлар сони бу хавфли критик айланиш сонларидан етарлича узоқликда ётсин.

29.7. Дедуи тебрангичи. Нотекис ҳаракатланаётган темир йўл поездининг тезланишини аниқлашда қуйидаги усулдан фойдаланилади.



45- шакл

Поезд вагонига учига М юкча ўрнатилган енгил стержендан иборат М тебрангич (маятник) осилади (45- шакл). Поезд нотекис ҳаракатланаётганда тебрангич поезд тезланиши йўналишига қарама-қарши йўналишда оғади. Тебрангичнинг вертикал оғиш бурчагини ўлчаб поезднинг тезланиши ҳақида хулоса чиқариш мумкин.

Мувозанатдан оғиш бурчаги α учун ушбу формулани оламиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega}{g}, \qquad (29.48)$$

бундан

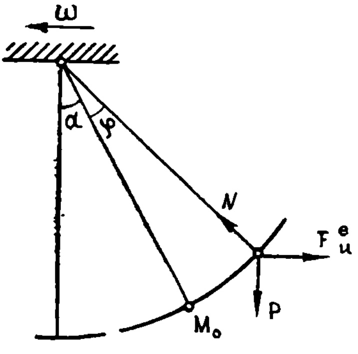
$$\omega = g\operatorname{tg}\alpha. \qquad (29.49)$$

Поезд ўзгармас тезланиш билан ҳаракатланмоқда деган фаразни ҳозирча ўз кучида сақлаб туриб, тебрангич ўзининг мувозанат ҳолатидан чиқарилган деб фараз қиламиз ва тебрангич ҳаракатини аниқлаймиз.

Ҳаракатланаётган вагонда кузатилаётган тебрангич ҳаракати ҳаракатланаётган вагонга нисбатан тебрангичнинг нисбий ҳаракатидан бошқа нарса эмас. Биз вагон ҳаракатини илгариланма ҳаракат деб ҳисоблашимиз мумкин.

Тебрангичнинг вертикалдан α бурчакка оғган мувозанат вазиятини белгилаб оламиз ва тебрангич вақтнинг берилган пайтида ўзининг мувозанат вазияти билан φ бурчак ҳосил қилади, деб фараз қиламиз (46- шакл). φ ни аниқлаш учун дифференциал тенглама тузамиз.

М юкчага (уни моддий нуқта деб қараймиз) унинг $\vec{P}$ оғирлиги ва тебрангич стержениниг реакция кучи $\vec{N}$ таъсир қилади. Бу кучлар қаторига кўчирма инерция кучи $F^e_и = -mw$ ни ҳам киритамиз, бу ерда m — юкча массаси, w — поезднинг тезланиши (яъни M нуқтанинг кўчма тезланиши). Бу $F^e_и$ кучни поезд тезланишига қарама-қарши йўналтирамиз (46- шаклда w тезланишни «$\rightarrow$» белги билан кўрсатилгандек, ўнгдан чапга йўналган деб ҳисоблаймиз). Қўйилган кучлар қаторига кўчирма инерция кучини ҳам киритиб, биз ҳаракатланаётган вагонда ҳаракатланаётган тебрангичнинг ҳаракатини абсолют ҳаракат деб ҳисоблашимиз мумкин.



46- шакл

Моментлар қонунидан фойдаланамиз. Моментлар ўқи сифатида тебрангичнинг айланиш ўқини (яъни тебрангичнинг осиш нуқтаси O дан ўтувчи ва чизма текислигига перпендикуляр йўналган ўқни) оламиз ва бу ўқни z ўқи деб атаймиз. Моментлар қонунига асосан қуйидагига эгамиз:

$$\frac{dl_z}{dt} = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z}, \qquad (29.50)$$

бу ерда l_z — шу M моддий нуқтанинг z ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти, M_{1z}, M_{2z}, M_{3z} эса мос равишда P, N ва F_u^e кучларнинг моментлари.

Тебрангичнинг OM узунлигини l орқали белгилаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$l_z = mvl,$$

бу ерда v — шу M нуқтанинг тезлиги, $v = l\varphi'$ бўлгани учун

$$l_z = m l^2 \varphi'$$

бўлади. l_z нинг бу қийматини ҳамда $\vec{P}$, $\vec{N}$ ва $\vec{F_u^e}$ кучлар моментларининг қийматларини (29.50) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$ml^2 \varphi'' = -Pl\sin(\alpha + \varphi) + F_u^e l\cos(\alpha + \varphi).$$

Бу ерда $F_u^e = mw$ деб олиб ва ml^2 га қисқартириб, топамиз:

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin(\alpha + \varphi) - \frac{w}{l}\cos(\alpha + \varphi) = 0. \qquad (29.51)$$

Бу ерда α бурчак (29.48) формула билан аниқланадиган қийматга эга.

Ҳосил бўлган бу тенгламани интеграллашга тўхталиб ўтирмасдан (бу тенглама элементар функциялар ёрдамида интегралланмайди), бизнинг тебрангичимиз ўзининг мувозанат вазиятидан озгина оғади деб фараз қиламиз: шунга мувофиқ равишда φ ни кичик бурчак деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда тақрибан қуйидагига эга бўламиз:

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi = \sin\alpha + \varphi\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi = \cos\alpha - \varphi\sin a.$$

$\sin(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + \varphi)$ нинг бу қийматларини (29.51) га қўйиб, тебрангичнинг мувозанат вазиятидан кичик оғишли ҳаракатининг дифференциал тенгламасига эга бўламиз:

$$\varphi'' + \frac{g}{l}(\sin\alpha + \varphi\cos\alpha) - \frac{w}{l}(\cos\alpha - \varphi\sin\alpha) = 0,$$

ёки

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{w}{l}\cos\alpha + \varphi\left(\frac{g}{l}\cos\alpha + \frac{w}{l}\sin\alpha\right) = 0.$$

Бу ерда (29.48) формулага асосан,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} + \frac{g}{\sqrt{g+w^2}},\ \sin\alpha = \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{w}{\sqrt{g^2+w^2}}$$

деб олиб,

$$\varphi'' + \frac{\sqrt{g^2+w^2}}{l}\varphi = 0$$

ни топамиз. Биз эркин тебранишлар дифференциал тенгламасини ҳосил қилдик. Бундан ушбу хулосага келамиз: тебрангичнинг мувозанат вазиятидан кичик оғишли ҳаракат бу вазият атрофида гармоник ҳаракатдир. Бу тебранишлар частотаси

$$\sqrt{\frac{\sqrt{g^2+w^2}}{l}}$$

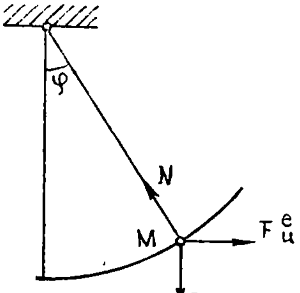
ифодадан, тебранишларнинг T даври эса

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+w^2}}}$$

формула билан аниқланади.

Энди поезднинг w тезланиши ўзгармас катталик бўлмаган ҳолга ўтамиз (аслида ҳам мана шу ҳол бўлади). Бу ҳолда энди оғишнинг мувозанат бурчаги α ҳақида гапириб бўлмайди. Энді бу ҳолда поезднинг тезланиши билан тебрангичнинг оғиш бурчаги орасида қандай боғланиш бор, деган савол туғилади.

Энди оғиш бурчаги φ ни тебрангичнинг вертикал вазиятидан ҳисоблаймиз (47-шакл). φ ўзгарувчи бурчак учун дифференциал тенглама тузамиз. Яна кўчирма инерция кучи $\vec{F}^e_u = -m\vec{w}_e$ ни киритиб ва тебрангичнинг осиш ўқига нисбатан моментлар қонунини татбиқ этиб ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:



47- шакл

$$ml^2\varphi'' = -Pl\sin\varphi + mwl\cos\varphi$$

ёки

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{w}{l}\cos\varphi. \quad (29.52).$$

Бундан

$$w = g\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{l\varphi''}{\cos\varphi} \qquad (29.53)$$

ни топамиз. w ва φ ўзгарувчи бўлган ҳолда (29.49) формула бу формула билан алмаштирилиши лозим. Кўриниб турибдики, олинган бу формула (29.49) тенгликдан $\frac{l\varphi''}{\cos\varphi}$ қўшимча ҳади билан фарқ қилади. Агар тебрангичнинг оғишини кузатишдан φ бурчакнинг t вақтда боғлиқлиги маълум бўлса, у ҳолда бу тузатма ҳадни осон ҳисоблаш мумкин.

φ бурчакнинг вақтга боғланиши график усулда берилган бўлса, график дифференциаллаш усули қўлланилиши мумкин.

Албатта (29.49) содда формула поезднинг ўзгарувчан тезланиши бўлган ҳолда ҳам сақланганда мақсадга мувофиқ бўлар эди. Бу формула w ўзгарувчи бўлган қайси ҳолда етарлича аниқ натижалар беради деб ўзимизга савол бериб кўрайлик, яъни қандай шартда тебрангич оғиш бурчаги ҳар бир пайтда ўзгармас тезланиш бўладиган ҳолга мос келувчи оғишнинг мувозанат бурчагига яқин бўлади. Буни ўзимизга ойдинлаштириб олиш учун, соддалик мақсадида φ оғиш бурчаги ҳамма вақт кичик бурчак бўлади деб фараз қиламиз (бу асл вазиятга ҳам етарлича аниқ мувофиқ келади); бу ҳолда (29.52) ушбу кўринишни олади:

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = \frac{w}{l}. \tag{29.54}$$

Бу ердан φ бурчакнинг берилган ўзгармас w тезланишга мос φ мувозанат қийматини бу ерда $w = \text{const}$ ва $\varphi = \text{const}$ деб, ҳосил қиламиз:

$$\varphi = \frac{w}{g} \tag{29.55}$$

(бу (29.48) формулага мос бўлиб, унда $\alpha = \varphi$ ва $\operatorname{tg}\varphi$ шу φ орқали алмаштирилган).

Берилган w ўзгарувчи тезланишга мос φ бурчакнинг ҳақиқий ўзгариш йўлини аниқлаш учун биз (29.54) тенгламани интеграллашимиз лозим.

φ тезланишнинг энг содда ўзгариш қонунини олайлик: фараз қилайлик, w тезланиш вақтга пропорционал равишда ўзгариб, τ вақт ичида 0 дан бирор w_0 қийматгача ўзгарсин. Бунга мувофиқ равишда

$$w = \frac{w_0}{\tau}t$$

деб оламиз. w нинг б қийматини (29.54) тенгламага қўйиб,

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = \frac{w_0}{l\tau}t$$

га эга бўламиз. Биз ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламага эга бўлдик. Бу тенглама

$$\varphi = \frac{w_0}{g\tau}t$$

хусусий ечимга эга. Бу хусусий ечимга мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини қўшиб, тенгламанинг ушбу умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$\varphi = \frac{w_0}{g\tau} t + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (29.56)$$

бу ерда $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$, C_1 ва C_2 — ўзгармаслар.

Бу формуланинг биринчи ҳадида $\frac{w_0}{\tau} t = w$ деб,

$$\varphi = \frac{w}{g} + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

га эга бўламиз. Бу натижани (29.55) формула билан taққосласак. кўрамизки, φ бурчакнинг ҳақиқий қиймати бу бурчакнинг қийматидан (29.55) формула билан аниқланадиган сўнгги иккита ҳад билан фарқ қилади, улар эса тебрангичнинг эркин тебранишларига мос келади. Тебрангич бошланғич пайтда вертикал вазиятда тинч турган деб фараз қилиб, бу эркин тебранишлар амплитудасини аниқлаймиз. (29.56) ифодада

$$\varphi' = \frac{w_0}{g\tau} - C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$$

тенгликларда $t = 0$, $\varphi = 0$ ва $\varphi' = 0$ деб,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{w_0}{gk\tau}$$

ни ҳосил қиламиз. C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (27.56) га қўйиб,

$$\varphi = \frac{w_0}{g\tau} t - \frac{w_0}{gk\tau} \sin kt$$

га эга бўламиз. Кўриниб турибдики, тебрангичнинг эркин тебранишлар амплитудаси (уни a билан белгилаймиз)

$$a = \frac{w_0}{gk\tau} = \frac{w_0}{2\pi g} \frac{T}{\tau}$$

га тенг, бунда T — тебрангичнинг эркин тебранишлар даври. Бу формуладан келиб чиқадики, T/τ нисбат қанча кичик бўлса, a амплитуда шунча кичик бўлади. Демак, тебрангичнинг эркин тебранишлар даври поезд тезланишининг ўсиш вақтига нисбатан қанчалик кичик бўлса, φ бурчакнинг ҳақиқий қиймати ҳар бир пайтда ўзининг (29.55) билан аниқланадиган қийматига шунча яқин бўлади. Бундан ушбу хулосага келамиз: поезднинг тезланиши w билан тебрангичнинг (29.55) формуладан аниқланадиган φ оғиш бурчаги орасидаги боғланишга тебрангичнинг эркин тебранишлари камроқ таъсир этиши учун тебрангичнинг эркин тебранишлари иложи борича кичик даврга (ёки иложи борича катта частотага) эга бўлиши зарур.

30- §. Қўшма тенгламалар

Чизиқли дифференциал

$$L[y] \equiv a_n y + a_{n-1} y' + a_{n-2} y'' + \quad . + a_1 y^{n-1} + a_0 y^{(n)} \tag{30.1}$$

ифода берилган бўлсин. Шундай $z(x)$ функцияни топайликки, унга (30.1) ифодани кўпайтирганда ихтиёрий y функциянинг x бўйича аниқ ҳосиласи бўлсин (y функция n марта дифференциалланувчи функция). $z(x)$ функция $L[y]$ *дифференциал ифоданинг кўпайтувчиси* дейилади. a_i коэффициентлар қаралаётган интервалда x нинг узлуксиз функцияси ва керакли тартибдаги ҳосилаларга эга.

(30.1) ифодани $z(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва $\int zL[y]\,dx$ аниқмас интегрални ҳисоблаймиз. Бу интегрални бўлаклаб, интеграл остида y кўпайтувчи қолгунча интеграллаймиз. Натижада қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\int a_n yzdx = \int a_n yzdx,$$

$$\int a_{n-1} y'zdx = a_{n-1} zy - \int y(a_{n-1}z)'\,dx,$$

$$\int a_{n-2} y''zdx = a_{n-2} zy' - \int (a_{n-2}z)'y'dx = a_{n-2}zy' - (a_{n-2}z)'y + \\ + \int y(a_{n-2}z)''dx,$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$\int a_1 y^{(n-1)}zdx = a_1 zy^{(n-2)} - (a_1z)'y^{(n-3)} + (a_1z)''y^{(n-4)} - \quad + \\ + (-1)^{(n-2)}(a_1z)^{(n-2)}y + (-1)^{(n-1)}\int y(a_1z)^{(n-1)}dx,$$

$$\int a_0 y^{(n)}zdx = a_0 zy^{(n-1)} - (a_0z)'y^{(n-2)} + (a_0z)''y^{(n-3)} - \\ - \quad + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}y + (-1)^n\int y(a_0z)^{(n)}dx$$

ёки интеграллар қатнашмаган ҳадларни алоҳида, квадратуралар қатнашгап ҳадларни бир интеграл ифодаси остига йиғсак,

$$\int zL[y]dx = a_{n-1}zy - (a_{n-2}z)'y + \quad + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}y + \\ + a_{n-2}zy' - (a_{n-3}z)'y' + \quad + (-1)^{(n-2)}(a_0z)^{(n-2)}y' + \\ \\ + a_1zy^{(n-2)} - (a_0z)'y^{(n-2)} + a_0zy^{(n-1)} + \int y\,\{a_nz - (a_{n-1}z)' + \\ + (a_{n-2}z)''\} - \quad + (-1)^n(a_0z)^{(n)}\}\,dx,$$

ёки интегрални тенгликнинг чап томонига ўтказиб, янги белгилашлар киритсак,

$$\int \{zL[y] - yM[z]\}\,dx = \Psi[y, z] \tag{30.2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Дифференциал

$$M[z] = a_nz - (a_{n-1}z)' + \quad + (-1)^{n-1}(a_1z)^{(n-1)} + \\ + (-1)^n(a_0z)^{(n)} \tag{30.3}$$

ифода $L[y]$ дифференциал ифодага қўшма ифода (ёки оператор) дейилади, $\Psi[y,z]$ эса бир томондан $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ га, иккинчи томондан эса $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ га нисбатан бичизиқ формадир:

$$\Psi[y,z] = y\{a_{n-1}z - (a_{n-2}z)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}\} +$$

$$+ y'\{a_{n-2}z - (a_{n-3}z)' + \ldots + (-1)^{n-2}(a_0z)^{(n-2)}\} +$$

$$\ldots + y^{(n-2)}\{a_1z - (a_0z)'\} + y^{(n-1)}a_0z. \tag{30.4}$$

n- тартибли

$$M[z] = 0 \tag{30.5}$$

дифференциал тенглама

$$L[y] = 0 \tag{30.6}$$

тенгламага *қўшма тенглама* дейилади.

(30.2) муносабат x бўйичагина айниятга айланмасдан, ихтиёрий y ва z функциялар учун ҳам ўринли. Агар z учун (30.5) тенгламанинг $z = \bar{z}$ ечимини олсак, (30.2) формула

$$\int \bar{z} L[y]\,dx = \Psi[y, \bar{z}]$$

ёки дифференциалласак,

$$\bar{z} L[y] = \frac{d}{dx}\Psi[y, \bar{z}]$$

кўринишни олади.

Шундай қилиб, агар берилган (30.1) дифференциал ифодани унга қўшма бўлган (30.5) тенгламанинг ихтиёрий $\bar{z}$ ечимига кўпайтирилса, (30.1) ифода $(n-1)$-тартибли дифференциал $\Psi[y, \bar{z}]$ ифодадан олинган тўлиқ ҳосилага тенг бўлади; тескариси ҳам тўғри, $\bar{z}$ функциянинг $L[y]$ га кўпайтмаси уни ихтиёрий y функция учун аниқ ҳосилага айлантирса, $M[\bar{z}] \equiv 0$ бўлиши зарурдир.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\bar{z}$ (30.1) ифоданинг бирор кўпайтувчиси бўлса,

$$\bar{z} L[y] = \frac{d}{dx}\Psi_1[y], \tag{30.7}$$

бунда $\Psi_1[y]$ $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ларга нисбатан чизиқли ифода

$$\Psi_1[y] = b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y.$$

иккинчи томондан, (30.2) ифодада z нинг ўрнига $\bar{z}$ ни қўйиб, x бўйича дифференциалласак,

$$\bar{z} L[y] = \frac{d}{dx}\Psi[y, \bar{z}] + yM[\bar{z}] \tag{30.8}$$

ни ҳосил қиламиз.

(30.7) ва (30.8) лардан

$$\frac{d}{dx}\{\Psi_1[y]-\Psi[y_1\bar z]\}-yM[\bar z]=0 \qquad (30.9)$$

ифодани ҳосил қиламиз.

(30.9) ифоданинг чап томони y га нисбатан n-тартибли чизиқли ифодадан иборат; унинг нолга тенглиги ихтиёрий y функция учун бажарилгани сабабли, y ва унинг ҳамма ҳосилалари олдидаги коэффициентлари айнан нолга тенг, бошқача бўлганда (30.9) y нинг дифференциал тенгламаси бўлур эди.

Ψ учун бичизиқли (30.7) ифоданинг кўринишидан қуйидагилар келиб чиқади:

$$b_{n-1}=a_0\bar z,\ b_{n-2}=a_1\bar z-(a_0\bar z)',$$

$$b_0=a_{n-1}\bar z-(a_{n-2}\bar z)'+\dots+(-1)^{n-1}(a_0\bar z)^{(n-1)},$$

яъни $\Psi_1[y]\equiv\Psi[y,\bar z]$ ва (27.9) тенгликдан $M[\bar z]\equiv 0$.

Демак, агар $y(x)$ *функция ихтиёрий бўлганда z функция $\bar z L[y]$ кўпайтмани аниқ ҳосилага айлантириши учун $\bar z$ қўшма* (30.5) *тенгламанинг ечими бўлиши зарур ва етарлидир.*

Қўшма (30.5) тенгламанинг ҳар бир ечими (30.6) тенгламанинг кўпайтувчиси бўлади; унга кўпайтириш билан (30.6) тенгламанинг чап томони тўлиқ ҳосилага айланади. Шундай қилиб, (30.6) тенглама биринчи интегралга эга бўлади:

$$\Psi[y,\bar z]=C, \qquad (30.10)$$

бунинг ўзи эса бир жинсли бўлмаган $(n-1)$-тартибли тенгламадир. Демак, агар бизга $L[y]=f(x)$ бир жинсли бўлмаган тенглама берилган бўлса, $\bar z$ функция унинг кўпайтувчиси бўлади ва биз биринчи интегрални ёза оламиз:

$$\Psi(y,\bar z)=\int f(x)\bar z\,dx+C.$$

Агар $y'+Py=Q$ шаклдаги биринчи тартибли чизиқли тенгламага эга бўлсак, унга мос бўлган бир жинсли тенгламанинг қўшма тенгламаси $Pz-z'=0$ кўринишда бўлади, унинг ечими $\bar z=e^{\int P dx}$ берилган тенгламанинг кўпайтувчиси бўлади.

1-эслатма. Берилган дифференциал тенглама чап томонининг ўзи аниқ ҳосила бўлиши учун унга қўшма тенгламанинг ечими $\bar z=1$ га тенг бўлиши зарур ва етарлидир, яъни (30.5) тенгламада z нинг олдидаги коэффициент нолга тенг бўлиши керак.

Ҳақиқатан ҳам, (30.3) ифодани очиб ва унда z нинг олдидаги коэффициентни ҳисоблаб, (30.6) тенгламанинг чап томони аниқ ҳосила бўлишлик шартини топамиз:

$$a_n-\frac{d}{dx}a_{n-1}+\frac{d^2}{dx^2}a_{n-2}-\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}a_0=0. \qquad (30.11)$$

2-эслатма. Агар жуфт $n = 2m$ тартибли $L[y]$ оператор қўшма оператор билан устма-уст тушса, яъни $L[y] \equiv M[y]$ бўлса, у ҳолда бу оператор ўз-ўзига қўшма бўлади. У ҳолда $L[y] = 0$ тенглама ўз-ўзига *қўшма тенглама* дейилади. Иккинчи тартибли

$$L[y] \equiv a_2 y + a_1 y' + a_0 y'',$$

операторнинг қўшма оператори

$$M[z] \equiv a_2 z - (a_1 z)' + (a_0 z)'' =$$

$$= (a_2 - a_1' + a_0'')z + (-a_1 + 2a_0')z' + a_0 z''$$

бўлади. Ўз-ўзига қўшмалик шартлари

$$-a_1 + 2a_0' = a_1, \; a_2 - a_1 + a_0'' = a_2$$

ягона биринчисига келтирилади: $a_1 = a_0'$. Демак, ўз-ўзига қўшма иккинчи тартибли оператор $(a_0 y')' + a_2 y$ кўринишда бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(1 + x)y'' - xy' - y = 2x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бунда $a_2 = -1$, $a_1 = -x$, $a_0 = 1 + x$, (30.11) шарт бажарилади: $-1 + \frac{d}{dx}x + \frac{d^2}{dx^2}(1 + x) \equiv 0$. Демак, тенгламанинг чап томони аниқ ҳосиладан иборат ва унинг биринчи (30.10) интеграли мавжуд бўлиб, унда $\overline{z} = 1$ деб олса бўлади. $\Psi[y, z]$ ифода эса $a_1 zy - (a_0 z)' y + a_0 zy'$ кўринишда бўлади. Бу ифодага a_0, a_1 ларнинг қийматларини, z нинг ўрнига бир қўйиб, биринчи интеграл

$$(1 + x)y' + y(-x - 1) = x^2 + C_1$$

ёки

$$y' - y = \frac{x^2 + C_1}{x + 1}$$

ни ҳосил қиламиз. Чап томоннинг қўшма ифодаси $-z - z'$ дан иборат. $z + z' = 0$ тенгламанинг $z = e^{-x}$ ечимини янги тенгламанинг кўпайтувчиси деб қабул қилиш мумкин ва натижада

$$e^{-x} y' - e^{-x} y = e^{-x} \frac{x^2 + C_1}{x + 1}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг чап томони яна тўлиқ ҳосиладан иборат ва унинг умумий ечими

$$y = e^x \int \frac{e^{-x}(x^2 + C_1)}{x + 1} dx + C_2 e^x$$

кўринишда бўлади.

31-§. Эйлер тенгламаси

Эйлер тенгламаси ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенглама бўлиб, уни коэффициентлари ўзгармас бўлган тенгламага келтириш мумкин. Қуйидаги тенглама *Эйлер тенгламаси* дейилади:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} xy' + p_n y = q(x) \qquad (31.1)$$

бунда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — ўзгармас сонлар. Эйлер тенгламасининг коэффициентлари даражали функциялар бўлиб, коэффициентнинг даражаси y билан бирга турган ҳосила тартибига тенг.

Эйлер тенгламаси $x = e^t$ ёки $t = \ln x$ алмаштириш ёрдамида коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли тенгламага келтирилади.

Ҳақиқатан ҳам, $x = e^t$, яъни $t = \ln x$ бўлсин ($x > 0$ деб фараз қилинади; $x < 0$ учун $t = \ln |x|$ деб ҳисоблаш керак). t ни оралиқ аргумент деб ҳисоблаб ва $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}$ эканлигини назарда тутиб, унинг x бўйича ҳосиласини топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}. \qquad (31.2)$$

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра, x бўйича яна дифференциалласак,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right), \qquad (31.3)$$

бу ердан

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \qquad (31.4)$$

Яна x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{d^2y}{dt^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right) - \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

ва бинобарин,

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} = 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}. \qquad (31.5)$$

(31.2), (31.4) ва (31.5) тengliклар қуйи ҳосилалар учун $x^m y^{(m)}$ кўпайтма y нинг t бўйича ўзгармас коэффициентли ҳосилалари орқали ифодаланишини кўрсатади. Тўлиқ математик индукция методидан фойдаланиб, бу хосса исталган мусбат n лар учун ўринли эканлигини исбот қилиш мумкин, бу ердан исталган тартибли Эйлер тенгламасини ўзгармас коэффициентли тенгламага келтириш мумкинлиги келиб чиқади.

1-мисол. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x = e^t$ деб ва (31.2), (31,4), (31.5) тенгламалардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{2dy}{dt} - 2y = 0$$

ёки

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - 2y = 0,$$

яъни коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли тенгламани ҳосил қилдик. Унинг характеристик тенгламаси $r^3-4r^2-5r-2=0$ дан кўриниб турибдики, унинг битта илдизи $r_1 = 1$ га тенг, уни $(r-1)^2(r-2)=0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг илдизлари: $r_{1,2} = 1$, $r_3 = 2$. Тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t}$$

ёки эски ўзгарувчиларга қайтсак,

$$y = C_1x + C_2x\ln x + C_3x^2.$$

Юқорида айтилганлар Эйлернинг

$$x^n y^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \quad + p_{n-1}xy' + p_ny = 0 \qquad (31.6)$$

бир жинсли тенгламасини эркли ўзгарувчини алмаштирмасдан, бевосита интеграллашга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, коэффициентлари ўзгармас бўлган ўзгартирилган тенгламада каррали илдизлар йўқлигида хусусий ечим e^z кўринишга, яъни Эйлернинг дастлабки тенгламасида $y - x^r$ кўринишга эга. Шунинг учун аргументни ўзгартириб ўтирмасдан, дарҳол Эйлер тенгламасининг хусусий ечимларини $y = x^r$ кўринишда излаш мумкин:

$$\frac{d^k(x^r)}{dx^k} = r(r-1) \qquad (r-k+1)x^{r-k}, \ (k \leqslant r)$$

бўлгани учун барча $k \leqslant r$ ларда

$$x^k\frac{d^k(x^r)}{dx^k} = r(r-1) \qquad (r-k+1)x^r .$$

Бу ифодаларни (31.6) тенгламага қўйиб ва x^r га қисқартириб, r ни топиш учун n-даражали алгебраик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$r(r-1) \qquad (r-n+1) + p_1r(r-1) \qquad (r-n+2) +$$
$$+ \qquad + p_{n-2}\cdot r(r-1) + p_{n-1}r + p_n = 0. \qquad (31.7)$$

(31.7) тенгламани Эйлер тенгламаси учун характеристик тенглама деб аташ табиийдир. У ўзгартирилган, коэффициентлари ўзгармас бўлган тенглама учун ҳам характеристик тенглама бўлади.

Агар (31.7) тенглама n та турли r_1, r_2, , r_n илдизларга эга бўлса, n та хусусий ечим топилади. Эйлер тенгламасининг умумий ечими

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2} + \qquad + C_nx^{r_n}$$

функция бўлади. α каррали r_1 илдизга x^{r_1}, $x^{r_1}\ln x$, $x^{r_1}|\ln x|^2$ $x^{r_1}(\ln x)^{\alpha-1}$ кўринишдаги α та хусусий ечим мос келади, комплекс қўшма $\alpha \pm bi$ илдизлар жуфтига $x^{\alpha}\cos(b\ln x)$ ва $x^{\alpha}\sin(b\ln x)$ ечимлар жуфти мос келади.

2-мисол. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y = x^r$ дейлик. У ҳолда $y' = rx^{r-1}$ ва $xy' = rx^r$ қуйидагини топамиз:

$$y'' = r(r-1)x^{r-2} \text{ ва } x^2y'' = r(r-1)x^r$$

Энди $y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$, бу ердан $x^3y''' = r(r-1)(r-2)x^r$

Бу ифодаларни тенгламага қўйиб ва x^r га қисқартириб, ушбуга эга бўламиз:

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - r + 1 = 0 \text{ ёки } r^3 - r^2 - r + 1 = 0.$$

Бу тенгламани $(r-1)^2(r+1) = 0$ кўринишда ёзиб, $r_{1,2} = 1$, $r_3 = -1$ ни топамиз. Бу илдизлар учта хусусий ечимни беради: $y_1 = x$, $y_2 = x\ln x$ (қўш илдиз), $y_3 = x^{-1}$ ва шундай қилиб, умумий ечим ушбу кўринишда бўлади:

$$y = C_1x + C_2\ln x + C_3/x.$$

Эйлернинг бир жинсли бўлмаган тенгламасини ўзгармасларни вариациялаш ёрдамида интеграллаш мумкин. Унг қисмининг баъзи турлари учун аниқмас коэффициентлар усулини ҳам қўллаш мумкин, шу билан бирга буни ўзгармас коэффициентли тенгламага ўтгандан сўнг ҳам, ўтмасдан ҳам бажариш мумкин.

32-§. Дифференциал тенгламалар системалари

Баъзи жараён ёки ҳодисаларни тавсифлаш учун кўпинча бир нечта функция талаб қилинади. Бу функцияларни излаш бир нечта дифференциал тенгламаларга олиб келиши мумкин ва бу тенгламалар системани ташкил этади.

Бир ўзгарувчили n та номаълум функция учун дифференциал тенгламалар системаси умумий ҳолда қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned}
&F_1(x, y_1, y_2, \quad y_n, y_1', y_2', \quad y_n') = 0,\\
&F_2(x, y_1, y_2, \quad y_n, y_1', y_2', \quad y_n') = 0,\\
&\cdot\ \cdot\\
&F_n(x, y_1, y_2, \quad , y_n, y_1', y_2', \quad , y_n') = 0.
\end{aligned}$$

Бу ерда $y_1, y_2, \quad y_n, y_1', y_2', \quad y_n' = 0$ лар мос равишда x га боғлиқ бўлган номаълум функциялар ва уларнинг ҳосилалари.

32.1. Нормал системалар. Ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламалар системаси *нормал система* дейилади. Бундай система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x,\ y_1,\ y_2, \qquad y_n),\\ y_2' &= f_2(x,\ y_1,\ y_2, \qquad y_n),\\ &\cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ y_n' &= f_n(x,\ y_1,\ y_2, \qquad y_n). \end{aligned} \tag{32.1}$$

Нормал системанинг хусусиятлари:

а) системага кирувчи барча тенгламалар биринчи тартибли тенгламалардир;

б) тенгламаларнинг ўнг томонлари ҳосилаларга боғлиқ эмас.
(32.1) тенгламалар системасини қаноатлантирадиган $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\quad$, $y_n(x)$ функциялар системаси бу *системанинг ечими* дейилади. (32.1) тенгламалар системаси учун *Коши масаласи* шундай ечимни топишдан иборатки, у $x = x_0$ да берилган қуйидаги қийматларни қабул қилсин:

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_{10},\ y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}, \qquad y_n\big|_{x=x_0} = y_{n0} \tag{32.2}$$

Бу қийматлар (32.1) тенгламалар системасининг *бошланғич шартлари* дейилади. Уларнинг сони номаълум функциялар сони билан бир хил.

(32.1) нормал система учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги тўғрисидаги қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Агар* (32.1) *нормал система тенгламаларининг ўнг томонлари ўзларининг хусусий ҳосилалари билан биргаликда* x_0, y_{10}, y_{20}, $\quad$ y_{n0} *қийматларнинг атрофида узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \qquad y_n(x_0) = y_{n0}$$

шартларни қаноатлантирувчи ягона $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\quad$ $y_n(x)$ ечим мавжуддир.

(32.1) нормал системанинг умумий ечими деб, n та ихтиёрий C_1, C_2, $\quad$, C_n ўзгармасларга боғлиқ бўлган ушбу функциялар системасига айтилади:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x,\ C_1,\ C_2, \qquad C_n),\\ y_2 &= \varphi_2(x,\ C_1,\ C_2, \qquad C_n),\\ &\qquad\qquad\qquad \cdot \qquad \cdot \\ y_n &= \varphi_n(x,\ C_1,\ C_2, \qquad C_n). \end{aligned} \tag{32.3}$$

Бу система қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

а) C_1, C_2, $\quad$ C_n ларнинг ҳар қандай мумкин бўлган қийматларида (32.3) функциялар системаси (32.1) тенгламалар системасини қаноатлантириши керак;

б) Коши теоремаси шартлари бажариладиган соҳада (32.3) функциялар системаси Коши масаласининг ечими бўлади, яъни (32.3) бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\quad$ $\overline{C}_n$ қийматларини топиш мумкинки,

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x,\ \bar{C}_1,\ \bar{C}_2, \qquad \bar{C}_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x,\ \bar{C}_1,\ \bar{C}_2, \qquad \bar{C}_n), \\ \\ y_n &= \varphi_n(x,\ \bar{C}_1,\ \bar{C}_2, \qquad \bar{C}_n) \end{aligned} \tag{32.4}$$

бу функциялар системаси берилган (32.4) бошланғич шартларни қаноатлантиради. Умумий ечимдан ихтиёрий ўзгармасларнинг мумкин бўлган баъзи қийматларида ҳосил бўладиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

32.2. Нормал системани чиқариш усули билан ечиш. n та дифференциал тенгламадан иборат нормал системани қўшимча функция киритиш орқали битта n-тартибли дифференциал тенгламадан ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y'\ \ y'', \qquad y^{(n-1)})$$

тенглама юқори ҳосиласига нисбатан ечилган n-тартибли дифференциал тенглама бўлсин. Қуйидагича фараз қиламиз:

$$\begin{aligned} y &= y_1, \\ y' &= y_1' = y_2 \\ y'' &= y_2' = y_3 \\ \\ y^{(n-1)} &= y_{n-1}' = y_n, \\ y^{(n)} &= y_n' = f(x,\ y_1,\ y_2, \qquad y_n). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, битта n-тартибли тенгламадан биринчи тартибли n та дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= y_4, \\ \\ y_n' &= f(x,\ y_1,\ y_2, \qquad y_n). \end{aligned}$$

Умуман айтганда, тескариси ҳам тўғри. Биринчи тартибли n та дифференциал тенгламанинг нормал системаси битта n-тартибли дифференциал тенгламага эквивалентдир. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системасини интеграллаш усулларидан бири—*чиқариш усули* ана шунга асосланган. Ҳақиқатан ҳам, (32.1) системанинг тенгламаларидан биринчисини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\ y_1' + \qquad + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\ y_n'.$$

$y_1',\ y_2', \qquad ,\ y_n'$ ҳосилаларни уларнинг (32.1) даги $f_1,\ f_2,\ f_3$ $f_{n-1},\ f_n$ лар орқали ифодалари билан алмаштириб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \qquad y_n).$$

Ҳосил қилинган тенгламани дифференциаллаб, яна юқоридагидек йўл тутиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \qquad y_n).$$

Худди шундай давом эттириб, охирида қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \qquad y_n).$$

Шундай қилиб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(x, y_1, y_2, \qquad y_n), \\ y_1'' &= F_2(x, y_1, y_2, \qquad, y_n), \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ y_1^{(n)} &= F_n(x, y_1, y_2, \qquad, y_n). \end{aligned} \tag{32.5}$$

Бу системанинг дастлабки $(n-1)$ та тенгламасидан, умуман айтганда, $(n-1)$ та y_2, y_3, $\qquad y_n$ номаълум функцияларни y функция ва унинг ҳосилалари ($(n-1)$-тартибгача, у ҳам киради) орқали ифодалаш мумкин. Бу ифодаларни (32.5) тенгламаларнинг энг охиргисига қўйиб, номаълум функция y_1 га нисбатан n-тартибли битта дифференциал тенгламага келамиз:

$$y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1', \qquad y_1^{(n-1)}).$$

Бу тенгламани ечиб, y_1 ни топамиз:

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \qquad C_n).$$

Қолган функцияларни топиш учун топилган y_1 функцияни ва унинг ҳосилаларини y_2, y_3, $\qquad y_n$ ларнинг ифодаларига қўямиз. Натижада қуйидаги функциялар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \qquad C_n). \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \qquad C_n), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \qquad C_n). \end{aligned}$$

Бу система (32.1) нормал системанинг изланаётган ечимини аниқлайди.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z}, \\ z' = y \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системасини ечинг, бу ерда эркли ўзгарувчи x.

Ечиш. Системанинг иккинчи тенгламасини x бўйича дифференциаллаб, $z'' = y'$ ни ҳосил қиламиз. y' ни унинг биринчи тенгламадаги ифодаси билан алмаштириб, $z'' = \frac{y^2}{z}$ ни оламиз. Иккинчи тенгламага кўра уни z' билан алмаштириб, бир номаълумли иккинчи тартибли қуйидаги тенгламага келамиз:

$$z'' = \frac{(z')^2}{z}.$$

Бу тенгламада эркли ўзгарувчи ошкор ҳолда иштирок этмайди, шунинг учун унинг тартибини пасайтириш мумкин. Бироқ, уни

$$zz'' - (z')^2 = 0$$

кўринишида ёзиб ва иккала қисмини z^2 га бўлиб, чап томони аниқ ҳосиладан иборат эканини кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = \frac{zz'' - (z')^2}{z^2},$$

натижада тенгламамиз $\left(\frac{z'}{z}\right)' = 0$ кўринишга эга бўлади, бу ердан $\frac{z'}{z} = C_1$ ёки $z' = C_1 z$. Ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб, бу ердан z ни топамиз:

$$z = C_2 e^{C_1 x}$$

$y = z'$ бўлгани сабабли z учун топилган ифодани дифференциаллаб, $y = C_1 C_2 e^{C_1 x}$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, системанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 C_2 e^{C_1 x}, \quad z = C_2 e^{C_1 x}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = 2y - z \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системасининг

$$y\big|_{x=0} = 2\sqrt{3}, \quad z\Big|_{x=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Иккинчи тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз: $z'' = 2y' - z'$. Энди y' ни биринчи тенгламага кўра $y + z$ билан алмаштирамиз:

$$z'' = 2(y + z) - z' \quad \text{ёки} \quad z'' = 2y + 2z - z'$$

Иккинчи тенгламага кўра $2y$ ни $z' + z$ га алмаштирамиз: $z'' = 3z$. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани ҳосил қилдик: $z'' - 3z = 0$. Унинг характеристик тенгламаси $k^2 - 3 = 0$ бўлиб, у $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = -\sqrt{3}$ илдизларга эга. Умумий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$z = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$$

Уни x бўйича дифференциаллаб, $z' = C_1\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}x} - C_2\sqrt{3}\,e^{-\sqrt{3}x}$ ни ҳосил қиламиз. Иккинчи тенгламага кўра $y = \frac{1}{2}(z' + z)$ бўлгани учун

$$y = \frac{C_1}{2}(1+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x} + \frac{C_2}{2}(1-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}x}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, системанинг умумий ечими топилди:

$$y = C_1\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{\sqrt{3}x} + C_2\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{-\sqrt{3}x}$$

$$z = C_1 e^{-\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$$

Хусусий ечимни топиш учун C_1 ва C_2 ларнинг уларга мос қийматларини бошланғич шартлардан фойдаланиб топамиз:

$$C_1\frac{1+\sqrt{3}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$C_1 + C_2 = 0.$$

Бу ердан $C_1 = 2$, $C_2 = -2$. Демак, берилган системанинг хусусий ечими қуйидаги функциялар системасидан иборат бўлади:

$$y = (1+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x} - (1-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}x} = 2\,\mathrm{sh}\,\sqrt{3}x + $$

$$+ 2\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{3}\,x,$$

$$z = 2e^{\sqrt{3}x} - 2e^{-\sqrt{3}x} = 4\,\mathrm{sh}\,\sqrt{3}x.$$

33-§. Чизиқли дифференциал тенгламалар системаси

33.1. Чизиқли дифференциал тенгламалар деб, изланаётган функцияларнинг ҳосилалари ва бу функцияларнинг ўзлари чизиқли бўлиб кирган тенгламаларга айтилади.

Биз чизиқли тенгламаларнинг нормал системасини қараймиз. Бундай система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} + a\ \ y_1 + a_{12}y_2 + \qquad + a_{1n}y_n = V_1,\\
&\frac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \qquad + a_{2n}y_n = V_2,\\
&\\
&\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \qquad + a_{nn}y_n = V_n,
\end{aligned}\right\} \qquad (33.1)$$

бу ерда y_1, y_2, , y_n — изланаётган функциялар, x — эркли ўзгарувчи, a_{ik} ва V_i лар x нинг берилган узлуксиз функциялари. Агар $V_i(x)$ нинг ҳаммаси ҳам айнан нолга тенг бўлмаса, у ҳолда система *бир жинсли бўлмаган система* дейилади, агар V_i лар айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда чизиқли система *бир жинслидир* ва у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+ \qquad +a_{1n}y_n=0,\\ \frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+ \qquad +a_{2n}y_n=0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdot \\ \frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+ \qquad +a_{nn}y_n=0. \end{array}\right\} \qquad (33.2)$$

Агар (33.1) ва (33.2) системалар бир хил коэффициентларга эга бўлса, у ҳолда (33.2) система (33.1) бир жинсли бўлмаган системага мос система дейилади.

Биз a_{ik} коэффициентлар $a < x < b$ оралиқда узлуксиз деб ҳисоблаймиз.

(32.2) системанинг хусусий ечими $y_1^{(1)}(x)$, $y_2^{(1)}(x)$, $\qquad y_n^{(1)}(x)$ функциялар системасидан иборат бўлсин, демак, бу функцияларни (33.2) тенгламаларга қўйилганда, улар бу тенгламаларни айниятга айлантиради. Кўриш осонки, бу ҳолда $Cy_1^{(1)}$, $Cy_2^{(1)}$, $\qquad Cy_n^{(1)}$ функциялар системаси ҳам (33.2) системанинг ечими бўлади. Агар $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \qquad y_n^{(1)}$ ва $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \qquad y_n^{(2)}$ иккита хусусий ечим бўлса, у ҳолда $y_1^{(1)}+y_2^{(2)}$, $y_2^{(1)}+y_2^{(2)}$, $\qquad y_n^{(1)}+y_n^{(2)}$ ҳам (33.2) системанинг ечими бўлади.

Қуйидаги n та хусусий ечимни қарайлик:

$$\left.\begin{array}{lll} y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \qquad y_n^{(1)}, \\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \qquad y_n^{(2)}, \\ & & \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \qquad y_n^{(n)}. \end{array}\right\} \qquad (33.3)$$

Агар

$$D=\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \qquad y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \qquad y_n^{(2)} \\ & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \qquad y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (33.3')$$

детерминат (a, b) оралиқда айнан нолга тенг бўлмаса, (33.3) ечимлар системаси *фундаментал ечим* деб аталади.

1-теорема. *Агар* $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \qquad , y_n^{(k)}$ $(k=1, 2, \qquad , n)$ (33.2) *системанинг хусусий ечимлари фундаментал системани ташкил этса, у ҳолда системанинг умумий ечими бундай бўлади:*

$$\left.\begin{array}{l} y_1=C_1y_1^{(1)}+C_2y_1^{(2)}+ \qquad +C_ny_1^{(n)}, \\ y_2=C_1y_2^{(1)}+C_2y_2^{(2)}+ \qquad +C_ny_2^{(n)}, \\ \\ y_n=C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)}+ \qquad +C_ny_n^{(n)}. \end{array}\right\} \qquad (33.4)$$

Мазкур банднинг бошида айтилган фикрлардан (33.4) формулалар системанинг ечими эканлиги келиб чиқади. Бу умумий ечим эканлигини исботлаш учун C_1, C_2, C_n ўзгармасларни y_1, y_2, y_n функциялар $x = x_0$ да

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},\ y_2(x_0) = y_2^{(0)},\qquad y_n(x_0) = y_n^{(0)}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкинлигини кўрсатиш лозим.

Ҳақиқатан ҳам, бу шартларни (33.4) ифодаларга қўйиб, C_1, C_2, C_n ни аниқлаш учун ушбу n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$C_1 y_i^{(1)}(x) + C_2 y_i^{(2)} + \qquad + C_n y_i^{(n)}(x_0) = y_i^{(n)}, \tag{33.5}$$

$$(i = 1,2, \qquad , n).$$

$D(x_0) \neq 0$ бўлганлиги учун (33.4) система C_1, C_2, C_n ягона ечимга эга. (33.4) формулаларга ихтиёрий ўзгармасларнинг топилган қийматларини қўйиб, изланаётган ечимни ҳосил қиламиз.

1-мисол. Қуйидаги

$$y_1^{(1)} = e^x \cos x,\quad y_2^{(1)} = e^x \sin x.$$

$$y_1^{(2)} = -\sin x,\quad y_2^{(2)} = \cos x$$

ечимлар системасига эга бўлган иккинчи тартибли, чизиқли бир жинсли системани тузинг.

Ечиш. Изланаётган тенгламалар бундай бўлади:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} & e^x(\cos x - \sin x) & -\cos x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_2}{dx} & e^x(\sin x + \cos x) & -\sin x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0$$

ёки детерминантларни биринчи устун бўйича ёйиб ва иккала тенгламани $D(x) = e^x$ га бўлиб, изланаётган системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} - (\cos^2 x)\cdot y_1 + (1 - \sin x \cos x)\, y_2 = 0, \\ &\frac{dy_2}{dx} - (1 + \sin x \cdot \cos x)\, y_1 - (\sin^2 x)\cdot y_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

33.2. Бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламалар системаси. Ушбу бир жинсли бўлмаган системани қараймиз:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\qquad +a_{1n}y_n=V_1,\\
&\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\qquad +a_{2n}y_n=V_2,\\
&\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\qquad +a_{nn}y_n=V_n.
\end{aligned}\right\}\qquad (33.6)$$

2-теорема. *Агар бир жинсли бўлмаган системанинг $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_n(x)$ хусусий ечими маълум бўлса, у ҳолда бу системанинг умумий ечимини топиш мос бир жинсли (33.2) системани ечишга келтирилади.*

Ҳақиқатан ҳам янги изланаётган z_i функцияларни

$$y_1=Y_1+z_1,\quad y_2=Y_2+z_2,\qquad y_n=Y_n+z_n$$

муносабатлар билан киритамиз. Бу ифодаларни (33.1) тенгламаларга қўйиб ва

$$\frac{dY_i}{dx}+a_{i1}Y_1+a_{i2}Y_2+\qquad +a_{in}Y_n=Y_i^1(x)\ (i=1,\ 2,\qquad ,n)$$

айниятларни ҳисобга олиб, янги z_i функциялар учун

$$\frac{dz_i}{dx}+a_{i1}z_1+a_{i2}z_2+\qquad +a_{in}z_n=0(i=1,2.\qquad ,n)\qquad (33.2')$$

системани ҳосил қиламиз. Теорема исбот қилинди.

Натижа. (33.1) системанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned}
y_1&=C_1y_1^{(1)}+C_2y_1^{(2)}+\qquad +C_ny_1^{(n)}+Y_1,\\
y_2&=C_1y_2^{(1)}+C_2y_2^{(2)}+\qquad +C_ny_2^{(n)}+Y_2,\\
&\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
y_n&=C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)}+\qquad +C_ny_n^{(n)}+Y_n,
\end{aligned}$$

бу ерда Y_1, Y_2, Y_n (33.1) системанинг бирор хусусий ечими,

$$y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\qquad y_n^{(1)};\ y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\qquad y_n^{(2)},\qquad (33.7)$$
$$y_1^{(n)},\ y_2^{(n)},\qquad ,y_n^{(n)}$$

эса мос бир жинсли (33.2) системанинг n та эркли хусусий ечимлари, C_1, C_2, , C_n — ихтиёрий ўзгармаслар.

3-теорема. *Агар мос бир жинсли чизиқли системанинг фундаментал ечими маълум бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган системанинг ечими квадратураларга келтирилади.*

Агар (33.2) системанинг (33.7) ечимлари маълум бўлса, у ҳолда унинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \qquad + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \qquad + C_n y_2^{(n)} \\ &\cdot \\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \qquad + C_n y_n^{(n)}, \end{aligned}\right\} \tag{33.8}$$

бу ерда C_1, C_2, $\quad$, C_n — ўзгармаслар. C_i ўзгармас коэффициентлар билан берилган (33.8) формулалар (33.1) системанинг умумий ечимини бермайди. Бир жинсли чизиқли тенглама бўлган ҳолдаги каби ўзгармасларни вариациялаш усулини татбиқ этамиз. C_i ларни x нинг номаълум функциялари сифатида қараймиз, шу билан бирга уларни (33.8) ифодалар бир жинсли бўлмаган системанинг ечимлари бўладиган қилиб танлаймиз.

(33.8) тенгламаларни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= C_1 \frac{dy_i^{(1)}}{dx} + C_2 \frac{dy_i^{(2)}}{dx} + \qquad + C_n \frac{dy_i^{(n)}}{dx} + \\ &+ y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_i^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \qquad + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} \; (i = 1, 2, \ldots \;, n). \end{aligned} \tag{33.9}$$

(33.9) ва (33.8) ифодаларни (33.1) га қўямиз. (33.9) формулалар ўнг томонларининг биринчи сатрлари C_i лар ўзгармас бўлгандаги каби кўринишга эга, чунки $y_i^{(1)}$, $y_i^{(2)}$, $\quad$, $y_i^{(n)}$ бир жинсли системанинг ечими бўлганлиги учун ўрнига қўйилганда биринчи ҳадлар нолни беради; ҳақиқатан ҳам, i-тенгламага қўйиш натижаси бундай бўлади:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dy_i^{(k)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)} \frac{dC_k}{dx} + a_{i1} \sum_{k=1}^{n} C_k y_1^{(k)} + \\ &+ a_{i2} \sum_{k=1}^{n} C_k y_3^{(k)} + \ldots + a_{in} \sum_{k=1}^{n} C_k y_n^{(k)} = V_i \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} C_k \left(\frac{dy_i^{(k)}}{dx} + a_{i1} y_1^{(k)} + . \qquad + a_{in} y_n^{(k)} \right) + \\ &+ y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + \qquad + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = V_i \end{aligned}$$

ва C_1, C_2, $\qquad$ C_n ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар қолади:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_1^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \qquad + y_1^{(n)} \frac{dC_n}{dx} &= V_1, \\ y_2^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \qquad + y_2^{(n)} \frac{dC_n}{dx} &= V_2, \end{aligned}$$

$$y_n^{(1)}\frac{dC_1}{dx} + y_n^{(2)}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n)}\frac{dC_n}{dx} = V_n.$$

$\frac{dC_1}{dx}$, $\quad \frac{dC_n}{dx}$ га нисбатан чизиқли бу система ечимга эга, чунки системанинг детерминанти $D(x) \neq 0$.

n та ечим системаси фундаментал деб қилинган фаразга асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{D_{11}V_1 + D_{21}V_2 + \quad + D_{n1}V_n}{D(x)} \equiv \varphi_1(x),$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{D_{12}V_1 + D_{22}V_2 + \quad + D_{n2}V_n}{D(x)} \equiv \varphi_2(x),$$

$$\cdot \qquad \cdot\ \cdot$$

$$\frac{dC_n}{dx} = \frac{D_{1n}V_1 + D_{2n}V_2 + \quad + D_{nn}V_n}{D(x)} \equiv \varphi_n(x),$$

бу ерда $D_{ik}(i,\ k = 1,\ 2, \quad , n)$ орқали детерминантнинг $y_i^{(k)}$ элементга мос минори белгиланган. $\varphi_i(x)$ лар маълум функциялар бўлганлиги учун C_i лар квадратура орқали топилади:

$$C_i = \int \varphi_i(x)\,dx + \gamma_i (i = 1,\ 2, \quad , n),$$

(γ_i — интеграллаш ўзгармаслари).

C_i ларнинг топилган қийматларини (33.8) формулаларга қўйиб (33.1) системанинг умумий ечимини

$$y_1 = \gamma_1 y_1^{(1)} + \gamma_2 y_1^{(2)} + \quad + \gamma_n y_1^{(n)} + Y_1,$$

$$y_2 = \gamma_1 y_2^{(1)} + \gamma_2 y_2^{(2)} + \quad + \gamma_n y_2^{(n)} + Y_2,$$

$$y_n = \gamma_1 y_n^{(1)} + \gamma_2 y_n^{(2)} + \quad + \gamma_n y_n^{(n)} + Y_n$$

кўринишда ҳосил қиламиз, бу ерда бир жинсли бўлмаган системанинг $Y_1, Y_2, \quad , Y_n$ хусусий ечими

$$Y_i(x) = y_i^{(1)}\int \varphi_1(x)\,dx + y_1^{(2)}\int \varphi_2(x)\,dx + \quad +$$

$$+ y_i^{(n)}\int \varphi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)} \int \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} D_{lk}V_l}{D}\,dx$$

формулалар билан аниқланади.

2-мисол. Ушбу $\frac{dy}{dx} - z = \cos x$, $\frac{dz}{dx} + y = 1$ бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бир жинсли системанинг умумий ечими

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x, \quad z = -C_1 x\sin x + C_2\cos x$$

кўринишда бўлади. Бу қийматларни берилган тенгламаларга қўйиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dC_1}{dx}\cos x+\frac{dC_2}{dx}\sin x=\cos x,\quad -\frac{dC_1}{dx}\sin x+\frac{dC_2}{dx}\cos x=1.$$

Системани $\frac{dC_1}{dx}$ ва $\frac{dC_2}{dx}$ га нисбатан ечиб ва интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{dC_1}{dx}=\cos^2 x-\sin x,\quad C_1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\cos x+\gamma_1$$

$$\frac{dC_2}{dx}=\sin x\cos x+\cos x,\quad C_2=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\sin x+\gamma_2$$

γ_1 ва γ_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

C_1 ва C_2 нинг топилган қийматларини y ва z ларнинг ифодаларига қўйиб, берилган бир жинсли бўлмаган системанинг қуйидаги умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y=\gamma_1\cos x+\gamma_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x+1,$$

$$z=-\gamma_1\sin x+\gamma_2\cos x-\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x.$$

33.3. Ўзгармас коэффициентли чизиқли системалар. Қуйидаги бир жинсли чизиқли

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\qquad +a_{1n}y_n=0,\\ \frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\qquad +a_{2n}y_n=0,\\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\\ \frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\qquad +a_{nn}y_n=0\end{array}\right\}\qquad(33.10)$$

системани қараймиз ва ундаги коэффициентларни ўзгармас деб ҳисоблаймиз. Агар (33.10) система юқори тартибли битта тенгламага келтириладиган бўлса, у ҳолда ўзгармас коэффициентли чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Шу сабабли (33.10) системанинг ечимини кўрсаткичли функциялар кўринишида излаш табиийдир:

$$y_1=\gamma_1 e^{\lambda x},\quad y_2=\gamma_2 e^{\lambda x},\qquad\quad y_n=\gamma_n e^{\lambda x},\qquad(33.11)$$

бу ерда γ_1, γ_2, , γ_n ва λ — ўзгармаслар бўлиб, уларни (33.11) ифодалар (33.10) системани қаноатланадиган қилиб аниқлаш лозим. (33.10) системага (33.11) қийматларни қўйиб, $e^{\lambda x}$ га қисқартириб ва γ, γ_2, , γ_n олдидаги коэффициентларни танлаб, қуйидаги алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}+\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \quad . + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ &a_{11}\gamma_1 + (a_{22}+\lambda)\gamma_2 + \quad + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \quad + (a_{nn}+\lambda)\gamma_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33.12}$$

(33.12) системани $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ га нисбатан n та чизиқли бир жинсли система сифатида қараб, биз бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлишини талаб қилишимиз лозим, яъни қуйидаги тенгламага келамиз:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{33.13}$$

$\Delta(\lambda)$ детерминант билан бир қаторда бизга кейинчалик шу элементларнинг ўзидан тузилган қуйидаги $M(\lambda)$ матрицани ҳам қарашга тўғри келади:

$$\mathrm{M}(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}+\lambda \end{pmatrix} \tag{33.13'}$$

λ ўзгарувчига λ_0 қийматлар бериб, $M(\lambda_0)$ матрицани ҳосил қиламиз.

(33.13) тенглама λ га нисбатан n-даражали тенглама; у *характеристик тенглама* деб аталади. Шундай қилиб, (33.10) системанинг (33.11) кўринишдаги ечими λ характеристик тенгламанинг ечими бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда мавжуд бўлиши мумкин. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

1) Характеристик тенгламанинг барча n та илдизи турлича. Бу илдизлар $\lambda_1, \lambda_2, \quad , \lambda_n$ бўлсин. Агар бу илдизлардан бири λ_j ни $\Delta(\lambda)$ га қўйилса, $\Delta(\lambda_j) = 0$ ни ҳосил қиламиз. $\lambda = \lambda_j$ да $\Delta(\lambda)$ детерминантнинг $(n-1)$- тартибли минорларидан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, (33.13) тенгламанинг оддий илдизи бўлганлиги учун $\left[\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \Delta'(\lambda_j) \neq 0$ бўлади.

$\Delta'(\lambda)$ ни ҳисоблаймиз:

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}+\lambda & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}+\lambda \ \ldots & a_{3n} \\ & & \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13} & a_{1n}\\ a_{31} & a_{33}+\lambda\,.\,. & a_{3n}\\ \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{nn}+\lambda\end{vmatrix} + \qquad + \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{1,\,n-1}\\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{2,\,n-1}\\ \\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,\,n-1}\end{vmatrix}.$$

λ ўрнига λ_j ни қўйиб ва $\Delta'(\lambda_j) \neq 0$ эканлигини ҳисобга олиб, натижада $\lambda = \lambda_j$ да сўнгги йиғиндига кирувчи $(n-1)$- тартибли диагонал минорлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмаслигини ҳосил қиламиз. Даъво исботланди.

(33.12) системага қайтамиз ва унда λ нинг ўрнига характеристик тенгламанинг илдизларидан бири λ_j ни қўямиз. Системанинг детерминанти нолга тенг, демак, система нолдан фарқли $\gamma_1^{(j)}$, $\gamma_2^{(j)}$, , $\gamma_n^{(j)}$) ечимга эга. Бироқ, юқорида исботланганига асосан, система коэффициентлари матрицаси $M(\lambda_j)$ нинг ранги $(n-1)$ га тенг, демак, $\gamma_1^{(j)}$, $\gamma_2^{(j)}$, $\gamma_n^{(j)}$ лар ихтиёрий пропорцчоналлик кўпайтувчиси аниқлигида топилади.

Шундай қилиб, бу кўпайтувчини C_j орқали белгилаб,

$$\gamma_1^{(j)} = C_j k_1^{(j)}, \quad \gamma_2^{(j)} = C_j k_2^{(j)}, \qquad , \gamma_n^{(j)} = C_j k_n^{(j)}$$

ни ҳосил қилдик, бу ерда $k_i^{(j)} (i = 1,\ 2, \quad , n)$ — маълум сонлар. Шундай қилиб, $\lambda = \lambda_j$ илдизга (33.10) системанинг хусусий ечими (биз $C_j \equiv 1$ деб олдик)

$$y_1^{(j)} = k_1^{(j)} e^{\lambda_j x} \quad y_2^{(j)} = k_2^{(j)} e^{\lambda_j x} \qquad , y_n^{(j)} = k_n^{(j)} e^{\lambda_j x} \tag{33.14}$$

мос келади. Тушунарлики, агар биз бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг хусусий ечимлари системасини бир хил ихтиёрий ўзгармасга кўпайтирсак, яна шу системанинг ечимига эга бўламиз. Бу мулоҳазаларни характеристик тенгламанинг барча λ_1, λ_2, λ_3, , λ_n илдизлари учун татбиқ этиб, $j = 1,\ 2, \quad , n$ учун (33.14) кўринишидаги n та хусусий ечимни ҳосил қиламиз.

Шундан сўнг (33.10) системанинг тўла ечимини қуйидаги кўринишда оламиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \qquad + C_n y_1^{(n)},\\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \qquad + C_n y_2^{(n)},\\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot\\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \qquad + C_n y_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Изоҳ. Агар тенгламанинг коэффициентлари ҳақиқий бўлиб, баъзи илдизлари эса мавҳум бўлса, у ҳолда улар жуфт-жуфти билан қўшма бўлади, яъни

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

мос ечимлар эса қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_j^{(1)} = k_j^{(1)} e^{(\alpha+\beta i)\,x}, \quad y_j^{(2)} = k_j^{(2)} e^{(\alpha-\beta i)\,x} \ (j = 1,\ 2, \qquad , n).$$

$k_j^{(1)}$ ва $k_j^{(2)}$ коэффициентлар ҳам, агар уларни $\Delta(\alpha + \beta i)$ ва $\Delta(\alpha - \beta i)$ детерминантлар битта сатрининг минорларига тенг қилиб олинадиган бўлса, тенг бўлади. Шунга ишонч ҳосил қилиш осонки, $\lambda = \alpha \pm \beta i$ илдизларга ҳақиқий ва мавҳум $y_j^{(1)}$ ва $y_j^{(2)}$ қисмларга мос

$$\tilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}\,(l_j^{(1)} \cos \beta x - l_j^{(2)} \sin \beta x).$$

$$\tilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}\,(l_j^{(1)} \sin \beta x + l_j^{(2)} \cos \beta x)$$

кўринишдаги ечимларнинг иккита системаси мос келади, бу ерда $l_j^{(1)}$ ва $l_j^{(2)}$ — ҳақиқий сонлар бўлиб, улар

$$k_j^{(1)} = l_j^{(1)} + i\,l_j^{(2)}, \qquad k_j^{(2)} = l_j^{(1)} - i\,l_j^{(2)}$$

тенгламалардан аниқланади.

3-мисол. $\frac{dy}{dx} + 7y - z = 0, \quad \frac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0$ системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ечимни $y = \gamma_1 e^{\lambda x}$, $z = \gamma_2 e^{\lambda x}$ кўринишда излаймиз, уни берилган системага қўйиб

$$\gamma_1(\lambda + 7) - \gamma_2 = 0, \quad 2\gamma_1 + (\lambda + 5)\gamma_2 = 0$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Уларнинг биргаликдалик шарти қуйидаги характеристик тенгламани беради:

$$\begin{vmatrix} \lambda+7 & -1 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ёки} \quad \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Бу характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = -6 + i$, $\lambda_2 = -6 - i$. Бу илдизлардан биринчисини системага қўйиб, γ_1 ва γ_2 ни аниқлаш учун

$$\gamma_1(1 + i) - \gamma_2 = 0, \quad 2\gamma_1 + (-1 + i)\gamma_2 = 0$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз, булардан бири иккинчисининг натижасидир. Биз $k_1^{(1)} = 1$, $k_2^{(1)} = 1 + i$ деб олишимиз мумкин. Хусусий ечимларнинг биринчи системаси

$$y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x}, \quad y_2^{(1)} = (1 + i)^{(-6+i)x}$$

бўлади. Шунга ўхшаш $\lambda_2 = -6 - i$ илдизни системага қўйиб, хусусий ечимларнинг иккинчи системасини ҳосил қиламиз:

$$y_1^{(2)} = e^{(-6-i)x}, \quad y_2^{(2)} = (1 - i)\,e^{(-6-i)x}.$$

Ечимларнинг янги фундаментал системаси сифатида

$$\tilde{y}_i^{(2)} = \frac{y_i^{(1)} + y_i^{(2)}}{2}, \quad \tilde{y}_i^{(2)} = \frac{y_i^{(1)} - y_i^{(2)}}{2i} \quad (i = 1,\ 2)$$

ни олиб,

$$\tilde{y}_1^{(1)} = e^{-6x}\cos x, \quad \tilde{y}_1^{(2)} = e^{-6x}\sin x,$$

$$\tilde{y}_2^{(1)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x), \quad \tilde{y}_2^{(2)} = e^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

эканини топамиз. Умумий ечим бундай бўлади:

$$y_1 = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$y_2 = e^{-6x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x).$$

2) (33.13) тенгламанинг илдизлари орасида каррали илдизлар бор. λ_0 характеристик тенгламанинг m каррали илдизи бўлсин. Бундай ҳолда m-ҳосиланинг қиймати $\Delta(\lambda)$ детерминантнинг $(n-m)$-тартибли минорлари орасида ҳеч бўлмаганда биттаси $\lambda = \lambda_1$ да нолдан фарқли эканлигини кўрсатади. Бундан келиб чиқадики, $M(\lambda)$ матрицанинг r ранги учун $\lambda = \lambda_1$ да $r \geqslant (n-m)$ тенгсизлик ўринли. (33.12) чизиқли алгебраик тенгламалар системаси r та эркли тенглама системасига келтирилади. Чизиқли тенгламалар назариясидан маълумки, (33.12) системанинг умумий ечимида $(n-r)$ та номаълум ихтиёрий бўлади; булар $\gamma_1 = C_1$, $\gamma_2 = C_2$, . . . , $\gamma_{n-r} = C_{n-r}$ бўлсин. Қолган r та γ_{n-r+1}, γ_{n-r+2}, , , γ_n номаълумлар эса C_1, C_2, . . . , C_{n-r} га нисбатан чизиқли формалар шаклида ифодаланади, бу ифодалар қуйидагича бўлсин:

$$\gamma_1 = k_j^{(1)} C_1 + k_j^{(2)} C_2 + \qquad + k_j^{(n-r)} C_{n-r}$$

$$(j = n - r + 1, \quad n - r + 2, \qquad , n)$$

Биз $n-r$ та ихтиёрий ўзгармас C_1, C_2, C_{n-r} га боғлиқ қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = C_2 e^{\lambda_1 x}, \qquad , \ y_{n-r} = C_{n-r} e^{\lambda_1 x},$$

$$y_{n-r+1} = (k_{n-r+1}^{(1)} C_1 + k_{n-r+1}^{(2)} C_2 + \qquad + k_{n-r+1}^{(n-r)} C_{n-r})\, e^{\lambda_1 (x)}$$

$$y_n = (k_n^{(1)} C_1 + k_n^{(2)} C_2 + \qquad + k_n^{(n-r)} C_{n-r})\, e^{\lambda_1 x}.$$

Шундай қилиб, m каррали битта $\lambda = \lambda_r$ илдизга $(n-r) \leqslant m$ та хусусий ечим мос келади, уларни $i = 1, 2, \ldots, n-r$ учун $C_i = 1$, қолган барча C_j ларни нолга тенг деб ҳосил қиламиз ($j \neq i$ да $C_j = 0$):

$$y_1^{(1)} = e^{\lambda_1 x}, \ y_2^{(1)} = 0, \ \ldots, \ y_{n-r}^{(1)} = 0, \ \ldots, \ y_{n-r+1}^{(1)} =$$

$$= k_{n-r+1}^{(1)} e^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ y_n^{(1)} = k_n^{(1)} e^{\lambda_1 x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(2)}=0,\ y_2^{(2)}=e^{\lambda_1 x}, \qquad ,\ y_{n-r}^{(2)}=0,\ y_{n-r+1}^{(2)}= \\ =k_{n-r+1}^{(2)}e^{\lambda_1 x}, \qquad ,\ y_n^{(2)}=k_n^{(2)}e^{\lambda_1 (x)}, \\ . \\ y_1^{(n-r)}=0,\ \ y_2^{(n-r)}=0, \qquad .\ ,\ y_{n-r}^{(n-r)}=e^{\lambda_1 x}, \\ y_{n-r+1}^{(n-r)}=k_{n-r+1}^{(n-r)}e^{\lambda_1 x}, \qquad ,\ y_n^{(n-r)}=k_n^{(n-r)}e^{\lambda_1 x} \end{array}\right\} \quad (33.14')$$

Бу тенгламаларнинг ўнг томонларида $e^{\lambda_1 x}$ олдидаги коэффициентлардан иборат матрица қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left\|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & k_{n-r+1}^{(1)} & k_n^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k_{n-r+1}^{(2)} & k_n^{(2)} \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k_{n-r+1}^{(n-r)} & k_n^{(n-r)} \end{array}\right\|.$$

Унинг ранги, равшанки, $n-r$ га тенг, (33.14) системанинг сатрлари орасида чизиқли боғланиш йўқ; шундай қилиб, $\lambda=\lambda_1$ илдизга мос $(n-r)$ та чизиқли эркли ечим системасини ҳосил қилдик. Агар $r=n-m$, яъни $M(\lambda)$ матрица ранги $\lambda=\lambda_1$ да энг кичик қийматга эга бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган ечимлар сони λ илдизнинг карралиги m га тенг ва, шундай қилиб, бу илдизга мос барча ечимлар ҳосил қилинди (агар $m=1$ бўлса, у ҳолда $r=n-1$, $n-r=1$ ва λ оддий илдиз бўлган ҳолга келамизки, унга системанинг битта ечими мос келади).

Агар $M(\lambda_1)$ матрицанинг ранги $(n-m)$ дан катта бўлса, у ҳолда кўрсатилган усул билан олинган ечимлар сони $n-r$ шу λ_1 илдизнинг карралиги m дан кичик бўлади. Етишмаётган ечимларни топиш учун биз худди n-тартибли битта тенглама бўлган ҳолдаги каби шу ечимларни $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, $\quad ,\ x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$ функцияларнинг чизиқли комбинациялари шаклида излашимиз керак.

3-мисол. $\dfrac{dx}{dt}=y+z$, $\dfrac{dy}{dt}=z+x$, $\dfrac{dz}{dt}=x+y$ тенгламалар системаларининг ечимини топинг.

Ечиш. Ечимни $x=k_1e^{\lambda t}$, $y=k_2e^{\lambda t}$, $z=k_3e^{\lambda t}$ шаклда излаймиз. k_1, k_2 ва k_3 ни аниқлаш учун ушбу системага эгамиз:

$$\begin{aligned} \lambda k_1-k_2-k_3&=0,\\ -k_1+\lambda k_2-k_3&=0,\\ -k_1-k_2+\lambda k_3&=0. \end{aligned}$$

Унинг детерминантини нолга тенглаб,

$$0=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda-2$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. $\lambda_1 = 2$ оддий илдизга k_1, k_2, k_3 учун ушбу иккита эркли тенглама системаси мос келади:

$$2k_1 - k_2 - k_3 = 0, \quad -k_1 + 2k_2 - k_3 = 0,$$

бундан:

$$k_1 : k_2 : k_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 : 1 : 1.$$

Бу ердан битта ихтиёрий ўзгармасни ўзига олган биринчи ечимлар системасини ҳосил қиламиз:

$$x = C_1 e^{2t}, \quad y = C_1 e^{2t}, \quad z = C_1 e^{2t},$$

Агар М(λ) матрицага $\lambda_3 = -1$ ни қўйилса, у ҳолда унинг ранги 1 га тенг бўлади ва k_1, k_2, k_3 ни топиш учун учта тенглама ушбу битта

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

тенгламага келади. Агар $k_1 = C_2$, $k_2 = C_3$ десак, у ҳолда $k_3 = -(C_2 + C_3)$ бўлади ва биз яна иккита ихтиёрий ўзгармас иштирок этган ечимлар системасини ҳосил қиламиз.

Умумий ечим бундай бўлади:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \quad z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}$$

Биз фундаментал ечимлар системасини ҳосил қилдик, чунки детерминант

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

юқорида баён қилинганлардан ўзгармас коэффициентли нормал системанинг ечими бундай бўлиши келиб чиқади:

$$y_j = P_{ij}(x) e^{\lambda_i x} \, (j = 1, 2, \quad , n), \qquad (33.15)$$

бу ерда $P_{ij}(x)$ — даражаси $m_t - 1$ дан катта бўлмаган кўпҳад, m (33.13) система λ_i илдизининг карралиги.

Бундай тенгламанинг умумий ечимини амалда топиш усули қуйидагича: ҳар бир илдиз учун (33.15) кўринишидаги аниқмас коэффициентли ифодалар тузилади. Бу ифодаларни (33.10) системага қўйиб, аниқмас коэффициентлар учун чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системани ечишда ихтиёрий бўлиб қоладиган номаълумлар сони илдизнинг карралигига тенг.

4-мисол. $\frac{dx}{dt} + x - y = 0$, $\frac{dy}{dt} + y - 4z = 0$, $\frac{dz}{dt} + 4z - x = 0$ системани ечинг.

Ечиш. (33.13) система қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2 = 0.$$

$\lambda = 0$ оддий илдизга мос ечимларни $x = a$, $y = b$, $z = c$ кўринишда ёзамиз. Бу қийматларни берилган системага қўйиб, a, b ва c ни аниқлаш учун учта тенглама ҳосил қиламиз, улар умумий назарияга асосан, масалан, ушбу иккита эркли тенгламага келтирилади:

$$a - b = 0, \qquad b - 4c = 0.$$

$c = C_1$ (ихтиёрий ўзгармас) деб $\lambda = 0$ илдизга мос қуйидаги ечимлар системасини топамиз:

$$x = 4C_1, \quad y = 4C_1, \quad z = C_1.$$

$\lambda = -3$ илдиз икки каррали, шу билан бирга $\lambda \neq 3$ барча иккинчи тартибли минорларнинг бўлувчиси эмас; шу сабабли бу илдизга мос ечимларни

$$x = e^{-3t}(a_1 + a_2t), \; y = e^{-3t}(b_1 + b_2t), \quad z = e^{-3t}(c + c_2t)$$

кўринишда излаймиз. Буларни берилган системага қўйиб ва e^{-3t} умумий кўпайтувчига қисқартириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered} -3a_1 - 3a_2t + a_2 + a_1 + a_2t - b_1 - b_2t = 0, \\ -3b_1 - 3b_2t + b_2 + b_1 + b_2t - 4c_1 - 4c_2t = 0, \\ -3c_1 - 3c_2t + c_2 + 4c_1 + 4c_2t - a_1 - a_2t = 0. \end{gathered}$$

Иккала томонда озод ҳадларни ва t олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, қуйидаги олтита тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} -2a_1 + a_2 - b &= 0, & -2a_2 - b_2 &= 0, \\ -2b_1 + b_2 - 4c_1 &= 0, & -2b_2 - 4c_2 &= 0, \\ c_1 + c_2 - a_1 &= 0, & c_2 - a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ўнг устундаги учта тенгламадан $a_2 = C_2$ (ихтиёрий ўзгармас), $b_2 = 2C_2$, $c_2 = C_2$ эканини топамиз. Шундан сўнг биринчи учта тенгламадан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a_1 = C_3, \quad b_1 = C_2 - 2C_3, \quad C_1 = C_3 - C_2.$$

Шундай қилиб, системанинг умумий ечимни қуйидагича бўлади:

$$\begin{gathered} x = 4C_1 + C_2te^{-3t} + C_3e^{-3t} \\ y = 4C_1 + C_2(-2t + 1)e^{-3t} - 2C_3e^{-3t}, \\ z = C_1 + C_2(t - 1)e^{-3t} + C_3e^{-3t} \end{gathered}$$

34- §. Дифференциал тенгламалар системасининг биринчи интеграллари

1. Қуйидаги тенгламалар системасини қарайлик:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ , y_n),\\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \qquad y_n),\\ &\cdot\\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \qquad y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (34.1)$$

Биз бирор ёпиқ D соҳада $f_1, f_2 \ldots\ , f_n$ функциялар ва уларнинг $y_1, y_2 \ldots, y_n$ бўйича хусусий ҳосилалари барча аргументларга узлуксиз боғлиқ деб фараз қилайлик. У ҳолда мавжудлик ва ягоналик теоремаси татбиқ этилиши мумкин. Агар $x_0, y_1^0, y_2^0, \quad , y_n^0$ координатали нуқта D нинг ичида ётувчи бирор D' соҳанинг ичида ётса, у ҳолда (34.1) тенгламалар системасининг

$$x = x_0 \text{ да } y_i = y_i^0 \quad (i = 1,\ 2, \qquad n)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи битта ва фақат битта ечими мавжуд. Бу ечимлар қуйидагича бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x;\ x_0, y_1^0, y_2^0, \qquad , y_n^0),\\ y_2 &= \varphi_2(x;\ x_0, y_1^0, y_2^0, \qquad , y_n^0),\\ &\cdot\\ y_n &= \varphi_n(x;\ x_0, y_1^0, y_2^0, \qquad , y_n^0). \end{aligned}\right\} \qquad (34.2)$$

Бу формулаларда ечимнинг $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ бошланғич шартларга боғлиқлиги ошкор кўриниб турибди. Уларни турли қийматлар қабул қилиши мумкин бўлган параметрлар деб қабул қиламиз.

Энди D соҳада $(x_0, y_1^0, y_2^0, \quad , y_n^0)$ бошланғич нуқтани ва шу бошланғич нуқтадан ўтувчи интеграл эгри чизиқда ётадиган бирор $(x, y_1, y_2, \quad y_n)$ нуқтани оламиз. $x_0, y_1^0, \quad , y_n^0$ қийматлар бир томондан ва $x, y_1, \quad , y_n$ қийматлар, иккинчи томондан (34.2) муносабатлар билан боғланган. Агар $(x, y_1, \ldots, y_n)$ нуқта бошланғич нуқта сифатида қабул қилинса, у ҳолда бу бошланғич қийматлар билан аниқланган интеграл эгри чизиқ, ягоналик теоремасига асосан, $(x_0, y_1^0, \quad , y_n^0)$ нуқтадан ўтади, шу билан бирга қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканлиги равшан:

$$\left.\begin{aligned} y_1^0 &= \varphi_1(x_0;\ x, y_1, y_2, \qquad , y_n),\\ y_2^0 &= \varphi_2(x_0;\ x, y_1, y_2, \qquad , y_n),\\ &\cdot \quad \cdot \qquad \cdot\\ y_n^0 &= \varphi_n(x_0;\ x, y_1, y_2, \qquad , y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (34.3)$$

(34.3) формулалар кўрсатадики, (34.2) тенгламалар системаси y_1^0, y_2^0, , y_n^0 бошланғич қийматларга нисбатан (D' соҳада бир қийматли) ечилиши мумкин. Шу билан бирга ўнг томонлари x, y_1, y_2, , y_n бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлиши мумкин.

y_1^0, y_2^0, , y_n^0 бошланғич қийматларни C_1, C_2, , C_n ихтиёрий ўзгармаслар билан алмаштириб ва x_0 параметрга аниқ сон қиймат бериб қуйидаги кўринишдаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(x,\ y_1,\ y_2,\quad ,\ y_n)=C_1, \\ \psi_2(x,\ y_1,\ y_2,\quad ,\ y_n)=C_2, \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \psi_n(x,\ y_1,\ y_2,\quad ,\ y_n)=C_n. \end{array}\right\} \qquad (34.4)$$

(34.4) тengliklar системаси (34.1) системанинг *умумий интеграли*, (34.4) тенгликларнинг ҳар бири эса бу системанинг *биринчи интеграли* дейилади. Шуни қайд этамизки, бу тенгликларнинг чап қисмининг ҳар бири эркли ўзгарувчи ва изланаётган функцияларнинг функциясидан иборат. (34.4) формулаларга асосланиб бундай хулоса қилиш мумкин: агар y_1, y_2, . , y_n нинг ўрнига уларнинг (34.2) ифодаларини, яъни (34.1) нинг исталган ечими қўйилса, бу функция бирор ўзгармас миқдорга тенг бўлади. Шундай қилиб, биринчи интеграл таърифини беришимиз мумкин:

1) (34.1) системанинг биринчи интеграллари деб системанинг умумий ечимини берадиган тенгламаларни ихтиёрий ўзгармасларга нисбатан ечиш билан ҳосил қилинган муносабатларга айтилади.

Олдинги мулоҳазалар кўрсатадики, агар ихтиёрий ўзгармаслар сифатида изланаётган функцияларнинг бошланғич қийматлари олинса, биринчи интегрални доимо ҳосил қилиш мумкин.

Равшанки, бу таъриф бутун (34.4) муносабатлар системаси учунгина тўғридир. Шу сабабли, энди биз ҳар бир биринчи интегрални алоҳида тавсифлайдиган таърифни берамиз.

2) Системанинг биринчи интеграли деб, айнан ихтиёрий ўзгармасга тенг бўлмаган, чап қисмида эркли ўзгарувчини ва изланаётган функцияларни ўз ичига олган ҳамда изланаётган функциялар ўрнига (34.1) системанинг бирор ечими қўйилганда ўзгармас қиймат қабул қиладиган муносабатни айтилади.

Сўнгги таърифдан келиб чиқадики, чексиз кўп биринчи интеграллар системалари мавжуд. Ҳақиқатан ҳам,

$$\Phi[\psi_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\ \ldots,\ \psi_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)]=C \qquad (34.5)$$

муносабат (бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас, Φ — ўз аргументининг ихтиёрий функцияси) (31.1) системанинг биринчи интегралидир, чунки y_1, y_2, , y_n ўрнига системанинг ечимини қўйиб, биз ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n функцияларни ва, демак, Φ ни ҳам ўзгармас миқдорларга айлантирамиз.

2. Биринчи интегралларнинг иккинчи таърифига асосланиб, биринчи интегралнинг чап қисмини тавсифлайдиган аналитик белгини (аломатни) келтириш мумкин. Берилган (34.1) тенгламаларнинг ўнг томонлари $y_1, y_2, \quad y_n$ бўйича хусусий ҳосилаларга эга деб фараз этдик, у ҳолда, юқорида исботландики, (34.3) тенгликларнинг чап томонлари $x, y_1, y_2, \quad y_n$ бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга. (34.4) кўринишидаги умумийроқ муносабатларни қарашимиз мумкин, шу билан бирга ҳамма вақт уларнинг чап томонлари $x, y_1, y_2, \quad y_n$ бўйича ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз, агар (34.4) тенгликларнинг чап томонлари (34.3) тенгликларнинг ўнг томонларидан (34.5) кўринишдаги формулалар орқали олинган бўлса, бу доимо ўринли бўлади, бу ерда Ф ўзининг барча аргументлари бўйича узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган функция.

Айтайлик, биринчи интегралларнинг бири

$$\psi(x, y_1, y_2, \quad , y_n) = C \tag{34.6}$$

да $y_1, y_2, \quad y_n$ ўрнига (34.1) системанинг бирор ечими қўйилган бўлсин, у ҳолда унинг чап томони x нинг айнан нолга тенг бўлган бирор функциясига айланади. Бу айниятнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаб

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \quad + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = 0 \tag{34.7}$$

ни ҳосил қиламиз. $y_1, y_2 \quad , y_n$ (34.1) системанинг ечими бўлганлиги учун (34.7) тенгликдаги $\frac{dy_1}{dx}, \quad , \frac{dy_n}{dx}$ ҳосилаларни (34.1) тенгламаларнинг уларга тенг бўлган ўнг томонларига алмаштириш мумкин ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + f_1(x, y_1, \quad , y_n)\frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \quad + \\ + f_n(x, y_1, \quad , y_n)\frac{\partial \psi}{\partial y_n} = 0. \tag{34.8}$$

(34.8) тенгликда $y_1, y_2, \quad y_n$ лар x нинг функцияларидир ва (34.1) системанинг бирор ечимидан иборат. Шундай қилиб, бу тенгликдаги $(x, y_1, \quad y_n)$ қийматлар $(n+1)$ ўлчовли фазонинг қаралаётган ечим ўтадиган нуқтасидир. Бироқ (34.6) ни дифференциаллаш натижаси C га боғлиқ эмаслиги сабабли, (34.8) тенглик қаралаётган соҳадаги исталган интеграл эгри чизиқда ётадиган $(x, y_1, \quad y_n)$ нуқта учун бажарилади. Мавжудлик теоремасига асосан бу соҳанинг ҳар бир $(x_0, y_1^0, \quad , y_n^0)$ нуқтасидан интеграл эгри чизиқ ўтганлиги учун (34.8) тенглик қаралаётган соҳанинг исталган соҳаси учун ўринли, яъни $x, y_1, \quad y_n$ бўйича айниятдир. Шундай қилиб, ҳар бир биринчи интегралнинг чап томони (34.8) муносабатни айнан қаноатлантиради.

Аксинча, бирор ψ функция (34.8) тенгламани айниятга айлантирсин, у ҳолда (34.1) системанинг исталган эгри чизиғи бўйлаб (34.7) тенглик ва, демак, (34.6) тенглик ҳам ўринли бўлади. Шундай қилиб, ҳар бир интеграл эгри чизиқ бўйлаб ψ функция ўзгармас қиймат қабул қилади.

Шундай қилиб, (34.8) тенглик (34.6) тенгламалар биринчи интеграл бўлишининг зарурий ва етарли шартидир.

Баъзан биринчи интегралнинг (34.8) тенглик билан ифодаланадиган хоссаси бундай таърифланади: биринчи интегралнинг чап қисмидан олинган ҳосила, берилган дифференциал тенгламалар системасига асосан, нолга айланади.

3. Агар биз бирор усул билан (34.1) системанинг u_1, y_2, , y_n га нисбатан ечиш мумкин бўлган n та эркли биринчи интегралини топа олсак, у ҳолда уларни ечиш y_1, y_2, y_n нинг x ва n та ихтиёрий ўзгармас C_1, C_2, C_n орқали ифодасини беради. Бу ифодалар (34.1) системанинг умумий ечимини беради. Ҳақиқатан ҳам, (34.4) интегралларнинг эрклилик шарти $\frac{D(\psi_1, \psi_2, \quad, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \quad, y_n)}$ якобианнинг нолга айнан тенг эмаслигини билдиради; айтайлик, x_0, y_1^0, y_n^0 қийматлар системаси унга нолдан фарқли қиймат берсин. У ҳолда y_1, y_2 y_n лар бу қийматларнинг атрофида C_1, C_2 , C_n ва x нинг бир қийматли узлуксиз функциялари бўлади. y_1^0, y_2^0 , y_n^0 га етарлича яқин x_0, $\bar{y}_1^0$, $\bar{y}_2^0$, $\bar{y}_n^0$ бошланғич қийматларни бериб ва ўзгармасларнинг тегишли қийматларини $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, , $\bar{C}_n$, орқали белгилаб, кўрамизки, ўзгармасларнинг бу қийматлари (34.1) системанинг ушбу ечимини аниқлайди: $y_1 = \psi_1(x, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \quad, \bar{C}_n)$, , $y_n = \psi_n(x, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \quad \bar{C}_n)$ ва улар $x = x_0$ да олдиндан берилган $\bar{y}_1^0$, $\bar{y}_2^0$, , $\bar{y}_n^0$ қийматларни қабул қилди. Бу эса ечимнинг умумий бўлишлик шартидир.

Шундай қилиб, n та (эркли) биринчи интегрални билиш (34.1) системани интеграллашга тенг кучлидир.

Агар бизга системанинг битта биринчи интеграли

$$\psi(x, y_1, \quad , y_n) = C$$

маълум бўлса, у ҳолда изланаётган номаълум функциялардан бирини, масалан, y_n ни x, қолган изланаётган функциялар ва C ихтиёрий ўзгармас орқали ифодалаш мумкин:

$$y_n = \omega(x, y_1, y_2, \quad , y_{n-1}; C).$$

Бу ифодани (34.1) системанинг биринчи, иккинчи, , (n — 1)-тенгламасига киритиб, (n—1) та изланаётган функцияларга нисбатан (n—1) та тенглама системасига келамиз. Шу билан системанинг тартиби биттага камаяди. Янги (n — 1)-тартибли системани интеграллашни амалга ошириб, (n — 1) та ихтиёрий ўзгармасни киритамиз, улар C билан биргаликда n та ихтиёрий ўзгармасли системани беради, яъни (34.1) системанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш, агар n та эркли биринчи интеграл маълум бўлса, у ҳолда системанинг тартиби биттага пасайтирилади.

1-мисол. $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$ системани қарайлик. Унинг умумий ечими $x = A\cos(t+\alpha)$, $y = A\sin(t+\alpha)$ (A ва α — ихтиёрий ўзгармаслар). Равшанки, $x^2 + y^2 = C$ муносабат бу системанинг биринчи интегралидан иборат. Ҳақиқатан ҳам, унинг чап қисмидан t бўйича олинган биринчи ҳосила система тенгламаларига асосан

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2yx = 0$$

бўлади. Шунингдек, $\Phi(x^2 + y^2) = C$ ҳам биринчи интеграл бўлади, бу ерда Φ — ихтиёрий (дифференциалланувчи) функция.

2-мисол. *Қаттиқ жисмнинг ҳаракати назариясида*

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr,\quad B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp,\quad C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq$$

тенгламалар системаси учрайди, бу ерда $A \geqslant B \geqslant C > 0$ берилган ўзгармаслар (жисм инерцияси бош моментлари), p, q, r функциялар эса оний тезлик векторининг ташкил этувчилари.

Тенгламаларни мос равишда p, q, r га кўпайтириб ва қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0.$$

Бунинг чап томони тўла дифференциалдир; уни интеграллаш

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = m^2$$

ни беради (m — ихтиёрий ўзгармас) — бу тенгламанинг битта биринчи интегралидир.

Тенгламаларни Ap, Bq, Cr га кўпайтириб ва қўшиб, қуйидагини топамиз:

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0,$$

бу ердан бошқа биринчи интегрални топамиз:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = n^2$$

(n — ихтиёрий ўзгармас). Бу икки интегралга боғлиқ бўлмаган ва t ни ошкора ўз ичига олмаган бошқа интеграллар, равшанки, йўқ. Умумий назария бўйича биз системанинг тартибини биргача пасайтириш учун бу интеграллардан фойдаланишимиз мумкин. $A > B > C$ деб фараз қилиб ва олинган иккала муносабатни p^2, q^2 га нисбатан ечиб, қуйидагини топамиз:

$$p^2 = \alpha r^2 + a,\quad q^2 = -\beta r^2 + b,$$

бу ерда $\alpha = \frac{C(B-C)}{A(A-B)} > 0$, $\beta = \frac{C(A-C)}{B(A-B)} > 0$ ҳамда a ва b ўзгармас миқдорлар m^2 ва n^2 ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлгани ҳолда, ўзлари ҳам ихтиёрийдир.

p ва q нинг қийматларини системанинг учинчи тенгламасига киритиб,

$$\frac{dr}{dt}=\frac{A-B}{C}\sqrt{(\alpha r^2+a)(-\beta r^2+b)}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, унинг ечими элементар функциялар орқали ҳосил бўлади.

Бу мисолда биринчи интегрални топиш усули қуйидагидан иборат: тенгламалар чап томонларининг шундай комбинациялари топиладики, улар t нинг тўла ҳосилалари бўлади, шу билан бирга ўнг томони нолга айланади, тегишли бошланғич функцияларни ўзгармасларга тенглаб, биринчи интеграллар ҳосил қилинади.

35-§. Дифференциал тенгламалар системаларининг симметрик шакли

1. (34.1) системанинг умумий интегралини берадиган (34.4) муносабатлар бундай хусусиятга эга: уларга эркли ва боғлиқ ўзгарувчилар тенг ҳуқуқли бўлиб киради. Шундай қилиб, бу муносабатлар, агар эркли ўзгарувчи сифатида y_i функциялардан бири танланганда ҳам ўз кучида қолади. Ўзгарувчиларни бундай алмаштириш (34.1) система шаклини ўзгартиради, чунки унга ҳосилалар ҳам киради, бироқ берилган бу тенгламалар (биринчи тартибли) дифференциаллар орқали ёзилса, у ҳолда дифференциалларнинг маълум хоссасига асосан бу шаклдаги система ўзгарувчиларни исталганча алмаштириш, хусусан юқоридагича алмаштиришда ҳам ўз кучини сақлайди. Шундай қилиб, (34.1) системани бундай ёзишимиз мумкин:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,y_2,\quad y_n)}=\frac{dy_2}{f_2(x,y_1,y_2,\quad y_n)}=\quad=$$
$$=\frac{dy_n}{f_n(x,y_1,y_2,\quad ,y_n)}.$$

Бу система, агар махражларни бир хил кўпайтувчига кўпайтирилса, дастлабки системага тенг кучли бўлиб қолади (бунда бу кўпайтувчи нолга айланмайдиган соҳалар билан чекланиши лозим). Шу сабабли dx дифференциал ҳам махражида 1 эмас, балки бирор функцияга эга деб фараз қилиш мумкин. У ҳолда ўзгарувчиларнинг носимметриклиги фақат белгилашлардагина бўлади. Энди x, y_1, y_2, $\ldots$, y_n ўзгарувчилар ўрнига x_1, x_2, $\quad$, x_n ўзгарувчиларни ёзамиз (ёзув содда бўлиши учун ўзгарувчилар сонини $n+1$ эмас, балки n та деб оламиз).

Симметрик шаклдаги чизиқли дифференциал тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\ldots=$$
$$=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\ldots x_n)}. \qquad (35.1)$$

Бу системанинг умумий интеграли эса қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\Psi_1(x_1,x_2,\quad x_n)=C_1,\quad \Psi_2(x_1,x_2,\quad ,x_n)=C_2,$$
$$\Psi_{n-1}(x_1,x_2,\quad ,x_n)=C_{n-1}. \qquad (35.2)$$

Бу ўзгарувчиларнинг исталган бирини эркли ўзгарувчи, қолган барча ўзгарувчиларни эса изланаётган функциялар сифатида қабул қилиш имкониятига эга бўлишни истаётганлигимиз учун X_i функциянинг узлуксизлиги ва барча x_1, x_2, x_n аргументлар бўйича узлуксиз хусусий ҳосилалари мавжудлигини талаб қилиш табиийдир.

(35.1) симметрик системадан (34.1) кўринишдаги системага ўтиш учун ўзгарувчилардан бирини, масалан, x_n ўзгарувчини эркли ўзгарувчи сифатида олиш лозим. Системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \quad , x_n)}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \qquad , \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{35.3}$$

Бунда ўнг томонларнинг узлуксизлиги бузилмаслиги учун x_1^0, x_2^0, x_n^0 бошланғич қийматларда

$$X_n(x_1^0, x_2^0, \qquad , x_n^0) \neq 0$$

бўлиши зарур.

Агарда берилган бошланғич қийматлар X_n ни нолга айлантирса, у ҳолда эркли ўзгарувчи сифатида тегишли X_i функция нолга айланмайдиган x_i ўзгарувчини олишимиз мумкин. (35.3) системанинг ўнг томонлари x_1^0, x_2^0, x_n^0 бошланғич қийматлар барча X_i функцияларни нолга айлантирадиган ҳолдагина, яъни

$$X_1(x_1^0, x_2^0, \qquad x_n^0) = X_2(x_1^0, x_2^0, \qquad , x_n^0) = . \quad = \\ = X_n(x_1^0, x_2^0, \qquad x_n^0) = 0$$

бўлгандагина эркли ўзгарувчини исталганча танлаганда ҳам узлуксиз бўлиши мумкин.

Бундай бошланғич қийматлар *махсус бошланғич қийматлар* деб аталади; улар (35.1) системанинг махсус нуқталарига мос келади. Равшанки, махсус бошланғич қийматларда ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема шартлари бузилади.

Бундай ҳолда махсус нуқталарни қаралаётган соҳадан чиқарилади. (35.2) интеграллар жумласидаги ҳар бир интеграл ёки умуман

$$\Psi(x_1, x_2, \qquad , x_n) = C \tag{35.4}$$

кўринишдаги исталган ифода системанинг биринчи интеграли бўлишининг аналитик шарти қуйидагича ҳосил қилинади. Ψ функция системанинг интеграл эгри чизиғи бўйлаб ўзгармас қийматини сақлайди, демак, унинг бу эгри чизиқ бўйлаб тўла дифференциали нолга тенг:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} dx_2 + \qquad + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Бироқ dx_i дифференциаллар (35.1) тенгламаларга асосан интеграл эгри чизиқ бўйлаб X_i функцияларнинг қийматларига пропорционал, демак, ҳар бир интеграл эгри чизиқ бўйлаб

$$X_1(x_1,\ x_2,\qquad ,\ x_n)\frac{\partial x_1}{\partial x_2}+X_2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}+\qquad +X_n\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}=0 \qquad (35.5)$$

га эгамиз. (35.5) муносабатлар бирор интеграл эгри чизиқнинг (ўзгарувчи) нуқтасини ифодалайдиган x_1, x_2, , x_n қийматлар учун келтириб чиқарилди. Бироқ бу тенглик (35.4) формуладаги C ўзгармаснинг исталган қиймати учун ўринли бўлганлиги сабабли (35.5) тенглик интеграл эгри чизиқнинг исталган нуқталари учун бажарилади. Бу ердан, қаралаётган соҳанинг ҳар бир нуқтаси орқали интеграл эгри чизиқ ўтганлиги учун (35.5) муносабат биринчи интегралнинг исталган қисми учун айнан бажарилади, ва аксинча, (35.5) тенгламани айнан қаноатлантирадиган ҳар қаидай Ψ функция, агар уни ихтиёрий ўзгармасга тенг қилиб олинса, биринчи интегрални беради.

(35.1) системанинг (35.2) умумий интеграл билан берилган ечимини геометрик нуқтаи назардан $(n-1)$ ўлчамли $(n-1)$ та кўпхилликнинг $\Psi_i=C_i(i=1,\ 2,\qquad ,\ n-1)\cdot(n$ ўлчовли $(x_1,\ x_2,$ $x_n)$ фазодаги $(n-1)$ ўлчамли гипертекисликнинг) кесишиши орқали аниқлапган бир ўлчамли кўпхиллик (интеграл эгри чизиқ) сифатида қараш мумкин; интеграл эгри чизиқлар оиласи C_l, C_2 C_{n-1} параметрларга боғлиқ, ҳар бир гиперсиртлар оиласи эса битта параметрга боғлиқ.

2. Тенгламалар системасини симметрик шаклга келтириш биринчи интегралларни излашда кўпинча фойдали бўлади. Тенгламаларни (35.1) дифференциал шаклда ёзиб, биз (35.1) тенгликларнинг дифференциалларга нисбатан чизиқли бўлган ҳадларининг шундай комбинацияларини излаймизки, бунда чап томонда тўла дифференциал, ўнг томонда эса ноль турсин. Бу тўла дифференциални интеграллаб ва натижани ўзгармасга тенглаб, биринчи интегрални ҳосил қиламиз. Агар шу йўл билан $(n-1)$ та интеграл топилган бўлса, у ҳолда умумий ечимга эквивалент бўлган умумий интегрални ҳосил қиламиз; агар $(n-2)$ та интеграл топилган бўлса, у ҳолда умумий ечимни топиш масаласи биринчи тартибли дифференциал тенгламани интеграллашга келтирилади.

1-мисол. $(z-y)^2\frac{dy}{dx}=z$, $(z-y)^2\frac{dz}{dx}=y$ тенгламалар системасини интегралланг.

Ечиш. Системани симметрик шаклда ёзамиз:

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$$

Бу тенгликларнинг сўнгги икки ҳади интегралланадиган қуйидаги комбинацияни беради:

$$ydy-zdz=0,$$

бундан биринчи интеграл: $y^2-z^2=C_1$.

Сўнгра биринчи нисбатни кейинги икки нисбатнинг олдинги ва кейинги ҳадлари айирмаларининг нисбатига тенглаб,

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy-dz}{z-y} \text{ ёки } dx+(z-y)(dz-dy)=0$$

га эга бўламиз, бундан бошқа биринчи интеграл

$$2x+(z-y)^2=C_2$$

ни ҳосил қиламиз. Бироқ бу ерда $(y-z)^2$ га бўлиш туфайли биз битта параметрга боғлиқ ечимлар оиласи $x=C$, $y=z$ ни йўқотдик, агар эркли ўзгарувчи қилиб x олинса, бу ечимлар мавжуд эмас.

2-мисол. $\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}$ дифференциал тенгламалар системасини интегралланг.

Ечиш. Системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$dy-dx=-\frac{dx}{z}, \quad \frac{dx}{y-x}=dz.$$

Ўзаро кўпайтириб, интегралланадиган комбинацияни ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy-dx}{y-x}+\frac{dz}{z}=0,$$

бундан

$$(y-x)\cdot z=C_1.$$

Бу ердан z ни аниқлаймиз: $z=\frac{C_1}{y-x}$, уни биринчи тенгламага ёкиритиб, қуйидагини топамиз:

$$dy-dx=-\frac{dx\,(y-x)}{C_1}$$

ки $(y-x)e^{\frac{x}{C_1}}=C_2$. Умумий ечим

$$y=C_2e^{\frac{x}{C_1}}+x, \quad z=\frac{C_1}{C_2}e^{\frac{x}{C_1}}$$

кўринишда бўлади.

C_2 ни ўз ичига олган муносабат биринчи интеграл эмаслигини айтиб ўтамиз, чунки бу муносабат C_1 ихтиёрий ўзгармасни ҳам ўз ичига олади. Ундан берилган интегрални олиш учун биринчи муносабатдан C_1 ни x, y, z орқали ифодалаш ва иккинчи муносабатга қўйиш керак:

$$(y-x)e^{\frac{x}{z(y-x)}}=C_2.$$

36-§. Дифференциал тенгламалар системаларининг амалий татбиқига доир масалалар

Баъзи назарий ва амалий масалаларнинг ечимларини таҳлил қилайлик.

36.1. Модданинг парчаланиши ҳақидаги масала. A модда P ва Q моддаларга парчаланади. Уларнинг ҳар бирининг ҳосил бўлиш тезлиги A модданинг парчаланмаган миқдорига пропорционал. P ва Q моддаларнинг миқдорлари x ва y нинг t вақтга боғлиқ равишда ўзгариш қонунларини топинг. Бунда парчаланиш жараёни бошлангандан бир соатдан кейин x ва y мос равишда $a/8$ ва $3a/8$ га тенглиги маълум, бу ерда a катталик A модданинг дастлабки миқдори.

Ечиш. Вақтнинг t пайтида A модданинг миқдори $a-x-y$ га тенг, бинобарин, қуйидаги биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасига эгамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1(a-x-y), \\ \frac{dy}{dt} &= k_2(a-x-y). \end{aligned}\right\}$$

Иккинчи тенгламанинг иккала қисмини биринчи тенгламанинг мос қисмларига бўламиз, у ҳолда $\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1}$, бу ердан $y = k_2x/k_1 + C$. Сўнгра $t = 0$ да $x = y = 0$ бўлгани учун $C = 0$ ва шунинг учун $y = (k_2 \cdot x)/k_1$.

Биринчи тенгламада y ни k_2x/k_1 билан алмаштириб, $\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1a$ ни топамиз. Биринчи тартибли бу чизиқли тенгламанинг умумий ечими

$$x = \frac{k_2a}{k_1+k_2} + C_1e^{-(k_1+k_2)t}$$

Бошланғич шартлардан ($t = 0$ да $x = 0$) фойдаланиб, $C_1 = -k_1a/(k_1+k_2)$ ни топамиз, демак,

$$x = \frac{k_1a}{k_1+k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right).$$

x нинг бу ифодасини $y = k_2x/k_1$ тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y = \frac{k_2a}{k_1+k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right).$$

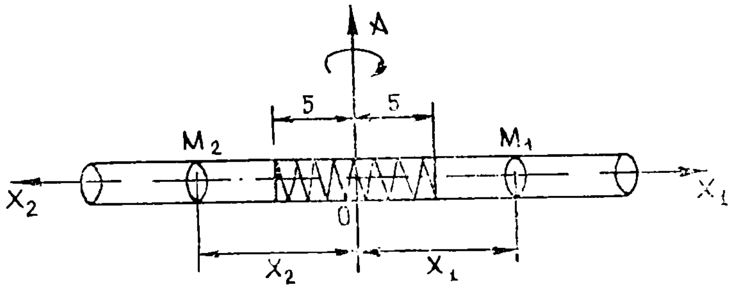
Вақт бирлиги сифатида соат қабул қилинади. $t = 1$ да $x = a/8$ ва $y = 3a/8$ эканлигини билган ҳолда k_1 ва k_2 коэффициентларни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_1}{k_1+k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right) &= \frac{1}{8}, \\ \frac{k_2}{k_1+k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right) &= \frac{3}{8}. \end{aligned}\right\}$$

Иккала тенгламанинг мос қисмларини қўшиб, $1 - e^{-(k_1+k_2)} = 1/2$ ни топамиз, бу ердан $e^{-(k_1+k_2)t} = 2^{-1}$ ва $k_1 + k_2 = \ln 2$. Иккинчи тенгламанинг иккала қисмини биринчи тенгламанинг мос қисмларига бўлиб, $k_3 = 3k_2$ ни топамиз. Шундай қилиб, $k_1 = \frac{1}{4}\ln 2$, $k_2 = \frac{3}{4}\ln 2$ ва изланаётган ечим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right), \\ y &= \frac{3a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right), \end{aligned}\right|$$

36.2. Шарчаларнинг найчадаги ҳаракати. Горизонтал найча 2 рад/с бурчак тезлик билан вертикал ўқ атрофида айланади. Найчада массалари $m_1 = 300$ г ва $m_2 = 200$ г бўлган иккита шарча жойлашган. Улар узунлиги $l = 10$ см бўлган эластик пружина орқали бир-бири билан боғланган бўлиб, пружина чўзилмаган ва шарчалар айланиш ўқидан бир хилда узоқлашган (48-шакл). Шарчалар кўрсатилган ҳолатда бирор механизм ёрдамида ушлаб турилади. Бошланғич пайтда механизм ишлашдан тўхтайди ва шарчалар ҳаракатга келади. Агар 24000 дина куч пружинани 1 см чўзиши мумкин бўлса, ҳар бир шарчанинг найчага нисбатан ҳаракат қонунини топинг.



48- шакл

Ечиш. Оғирроқ шарчанинг координатасини (найчага нисбатан) x_1 орқали, енгилроқ шарчанинг координатасини x_2 орқали белгилаймиз, бунда саноқни айланиш ўқидан бошлаб ҳисоблаймиз ва ўнг томонга йўналишни мусбат деб ҳисоблаймиз (48-шакл).

Агар масала шартига мувофиқ $F = kx$ деб олсак (бу ерда F — пружинанинг ҳар қайси шарчага таъсир кучи, x — пружинанинг деформацияси), у ҳолда $k = 24000$ бўлади.

Ҳар қайси шарча нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= m_1\omega^2 x_1 - k(x_1 - x_2 - 10), \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= m_2\omega^2 x_2 + k(x_1 - x_2 - 10). \end{aligned}\right\}$$

Ҳосил қилинган дифференциал тенгламалар системаси нормал эмас, бироқ юқорида қаралган усуллар ёрдамида ечилиши мумкин. Биринчи тенгламанинг иккала қисмини иккинчи тенгламанинг мос қисмлари билан қўшсак:

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = \omega^2 (m_1 x_1 + m_2 x_2).$$

$m_1 x_1 + m_2 x_2 = u$ деб белгилаб, $u'' - \omega^2 u = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг умумий ечими:

$$u = C_1 \operatorname{ch} \omega t + C_3 \operatorname{sh} \omega t \quad \text{ёки} \quad 3x_1 + 2x_2 = \overline{C}_1 \operatorname{ch} 2t + \overline{C}_2 \operatorname{sh} 2t,$$

бу ерда шартга кўра $\omega = 2$ деб олинган ва $C_1/100 = \overline{C}_1$ ҳамда $C_2/100 = \overline{C}_2$ деб белгиланган. Бошланғич шартлар $t = 0$ да $x_1 = 5$, $x_1' = 0$, $x_2 = -5$, $x_2' = 0$. $3x_1' + 2x_2' = 2\,(\overline{C}_1 \operatorname{sh} 2t + \overline{C}_2 \operatorname{ch} 2t)$ ни ҳисоблаймиз ва бу ерда ҳамда $3x_1 + 2x_2$ ифодага уларнинг $t = 0$ даги қийматларини қўямиз, у ҳолда $\overline{C}_1 = 5$, $\overline{C}_2 = 0$, ва демак, $3x_1 + 2x_2 = 5\,(e^{2t} - e^{-2t})/2$ ёки $3x_1 + 2x_2 = 5 \operatorname{ch} 2t$.

Бу ердан $x_2 = \dfrac{5}{2} \operatorname{ch} 2t - \dfrac{3}{2} x_1$ ни топамиз ва уни қуйидагича ўзгартирилган системанинг биринчи тенгламасига қўямиз:

$$x_1'' = -76x_1 + 80x_2 + 800,$$
$$x_2'' = -120x_1 - 116x_2 - 1200.$$

Ўрнига қўйиш x_2 ўзгарувчини йўқотади ва фақат x_1 ҳамда x_1'' ларга эга бўлган тенгламага олиб келади:

$$x_1'' = -76x_1 + 80\left(\frac{5}{2} \operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2} x_1\right) + 800$$

ёки

$$x_2'' + 196x_1 = 200 \operatorname{ch} 2t + 800.$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $x_1 = C_2 \cos 14t + C_2 \sin 14t$. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими $\overline{x}$ ни $\overline{x}_1 = A \operatorname{ch} 2t + B$ кўринишида излаймиз.

Бу ҳолда $\overline{x}_1'' = 4A \operatorname{ch} 2t$ бўлгани учун $\overline{x}_1$ ва $\overline{x}_2$ ни дифференциал тенгламага қўйиб, ушбу айниятни ҳосил қиламиз:

$$200A \operatorname{ch} 2t + 196B = 200 \operatorname{ch} 2t + 800,$$

бу ердан $A = 1$, $B = 200/49$ ни топамиз, демак, $x_1 = \operatorname{ch} 2t + 200/49$ ва x_1 умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$x_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t + \operatorname{ch} 2t + \frac{200}{49}.$$

C_1 ва C_2 ларни топиш қолди. Бошланғич шартлардан: $5 = C_1 + 1 + 200/49$, бу ердан $C_1 = -4/49$; $14C_2 = 0$, демак, $C_2 = 0$.

Массаси 300 г бўлган шарча учун унинг ҳаракат қонуни узил-кесил

$$x_1 = \mathrm{ch}\, 2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}$$

бўлади.

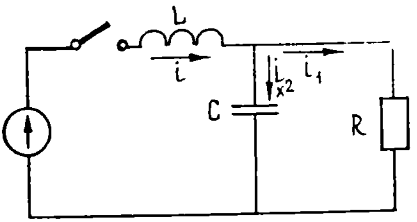
Массаси 200 г бўлган шарчанинг ҳаракат қонунини топиш учун x_2 нинг x_1 орқали ифодасига қўямиз, натижада

$$x_2 = \frac{5}{2}\mathrm{ch}\, 2t - \frac{3}{2}\left(\mathrm{ch}\, 2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}\right)$$

ёки

$$x_2 = \mathrm{ch}\, 2t + \frac{6}{49}\cos 14t - \frac{300}{49}.$$

36.3 Занжирни злектр юритувчи кучи ўзгармас бўлган манбага улаш. L индуктивлик, C сигим ва R қаршилик 49-шаклда тасвирланган схема бўйича уланган. Занжир ўзгармас э.ю.к. E га тенг бўлган манбага уланади. Уланишга қадар занжирда ток ва заряд йўқ деб ҳисоблаб, ўзиндукция ғалтагидан ўтадиган i токни t вақтнинг функцияси сифатида топинг.



49- шакл

Ечиш. Ўнг контурдаги токларни i_1 ва i_2 орқали белгилаб. Кирхгоф қонуни асосида масаланинг тенгламалар системасини тузамиз;

$$\left.\begin{aligned} &L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t (i - i_1)\, d\tau = E, \\ &Ri_1 - \frac{1}{C}\int_0^t (i - i_1)\, d\tau = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (36.1)$$

бу ерда $i - i_1 = i_2$. Бу системадан i_1 ни йўқотамиз. Иккала тенгламанинг мос қисмларини қўшамиз:

$$L\frac{di}{dt} + Ri_1 = E. \qquad (36.2)$$

(36.1) нинг биринчи тенгламасининг иккала қисмини t бўйича дифференциалласак,

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}i_1 = 0$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$i_1 = CL\frac{d^2i}{dt^2} + i.$$

i_1 ни (36.2) тенгламага қўйсак,

$$L\frac{di}{dt}+CLR\frac{d^2i}{dt^2}+Ri=E\ ,$$

ёки i_1 ток иштирок этмаган

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{di}{dt}+\frac{1}{CL}i=\frac{E}{CLR} \tag{36.3}$$

тенгламани ечамиз. Унинг характеристик тенгламаси илдизлари $r_{1,2}=-\alpha\pm\beta$ га тенг, бу ерда қуйидагича белгиланган:

$$1/(2CR)=\alpha,\ \sqrt{\alpha^2-1/(CL)}=\beta.$$

Дастлаб $\alpha^2>1/(CL)$ деб фараз қиламиз. У ҳолда мос бир жинсли тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$z=e^{-\alpha t}(C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t).$$

Бир жинсли бўлмаган (36.3) тенгламанинг хусусий ечими $\bar{i}$ ни $\bar{i}=A$ кўринишда излаймиз. У ҳолда $\bar{i}'=\bar{i}''=0$ ва $A/(CL)=E/(CLR)$, бу ердан $A=E/R$.

Демак, $\bar{i}=E/R$, (36.3) тенгламанинг $\bar{i}+z$ га тенг бўлган умумий ечими i қуйидаги кўринишда бўлади:

$$i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}\ (C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t). \tag{36.4}$$

C_1 ва C_2 ни бошланғич шартлардан топамиз. $t=0$ да $i=0$ бўлгани учун (36.4) дан $\frac{E}{R}+C_1=0$, бу ердан $C_1=-\frac{E}{R}$ ва шунинг учун

$$i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}\left(C_2\operatorname{sh}\beta t-\frac{E}{R}\operatorname{ch}\beta t\right).$$

$\frac{di}{dt}$ ни ҳисоблаймиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{di}{dt}=e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(C_2\operatorname{sh}\beta t-\frac{E}{R}\operatorname{ch}\beta t\right)+\beta\left(C_2\operatorname{ch}\beta t-\frac{E}{R}\operatorname{sh}\beta t\right)\right].$$

Бу ерда $t=0$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\alpha E}{k}+\beta C_2.$$

Энди C_2 ни ҳам топсак бўлади. $t=0$ да фақат $i=0$ эмас, балки $i_1=0$ ҳам эканлигини назарда тутсак, (36.2) тенгламадан $\frac{L\alpha E}{R}+L\beta C_2=E$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$C_2=\frac{E}{L\beta}\left(1-\frac{L\alpha}{R}\right)=\frac{E}{R\beta}\left(\frac{R}{L}-\alpha\right).$$

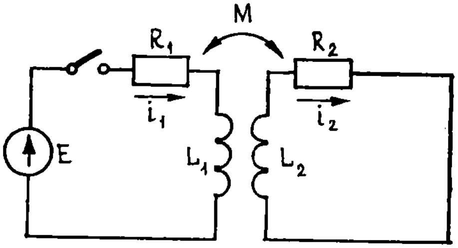
$\alpha^2>1/(CL)$ бўлган ҳол учун i хусусий ечим узил-кесил қуйидагича ёзилади:

$$i = \frac{E}{R}\left\{ 1 - e^{-\alpha t}\left[\operatorname{ch}\beta t + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{E}{L\beta}\right)\operatorname{sh}\beta t \right]\right\}.$$

Энди $\alpha^2 < 1/(CL)$ деб фараз қиламиз. У ҳолда β мавҳум сон бўлади ва $\beta = \omega_1\sqrt{-1}$ деймиз, бу ерда ω_1 ҳақиқий сон $\sqrt{1/(CL) - \alpha^2}$ га тенг.

Бу ҳолда i хусусий ечимни қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$i = \frac{E}{R}\left\{ 1 - e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_1 t + (\alpha/\omega_1 - R/L\omega_1)\sin\omega_1 t\right]\right\}.$$



50- шакл

36.4. Индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжирни улаш. Электр юритувчи кучи E ўзгармас бўлган манбага 50-шаклда тасвирланган индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжир уланади. Агар занжирга улаш ноль бошланғич шартларда амалга оширилса, шу билан бирга $L_1L_3 \neq M^2$ бўлса, ҳар иккала контурдаги i_1 ва i_2 токларни t вақтга боғлиқ равишда топинг.

Ечиш. Кирхгоф қонунига асосан масаланинг дифференциал тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M\frac{di_2}{dt} &= E, \\ L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M\frac{di_1}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (36.5)$$

Бу ерда M — контурларнинг ўзаро индуктивлик коэффициенти; қолган белгилашлар олдинги масаладагига ўхшаш.

(36.5) тенгламалар системасидан $\frac{di_2}{dt}$ ни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламанинг иккала томонини L_2 га, иккинчи тенгламаникини эса — M га кўпайтирамиз ва уларни қўшамиз. У ҳолда

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{di_1}{dt} + L_2R_1i_1 - MR_2i_2 = L_2E,$$

бу тенгламанинг иккала қисмини L_1L_2 га бўлиб, $M^2/(L_1L_2) = k^2$, $R_1/L_2 = 2\alpha_1$, $R_2/L_2 = L\alpha_2$ белгилашлар киритсак, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(1 - k^2)\frac{di_1}{dt} + 2\alpha_1 i_1 - \frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1}i_2 = \frac{2\alpha_1 E}{R_1}. \qquad (36.6)$$

Бу тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаймиз, $\frac{di_2}{dt}$ нинг ифодасини топиб, уни (36.5) тенгламаларнинг биринчисига қўямиз:

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{R_1(1-k^2)}{4M\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{R_1}{2M\alpha_2}\frac{di_1}{dt},$$

$$\frac{R(1-k^2)}{4\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{2\alpha_2} + \frac{K_1}{2\alpha_1}\right)\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = E.$$

Ҳосил қилинган тенгламанинг иккала қисмини $\frac{d^2i_1}{dt^2}$ нинг олдидаги коэффициентга бўламиз:

$$\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{1-k^2}\frac{di_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}i_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)}$$

ёки $(\alpha_1+\alpha_2)/(1-k^2) = \sigma$ деб белгиласак:

$$\frac{d_2i_1}{dt^2} + 2\sigma\frac{di_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}i_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)}. \qquad (36.7)$$

Характеристик тенгламанинг илдизлари $r_{1,2} = -\sigma \pm \beta$, бу ерда $\beta = \sqrt{\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}}$ (β — ҳақиқий сон, чунки радикал остидаги ифода нолдан катта). У ҳолда мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг z умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$z = e^{-\alpha t}(C_1 \operatorname{ch}\beta t + C_2 \operatorname{sh}\beta t).$$

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг $\overline{i}_1$ хусусий ечимини аниқмас коэффициентлар усули ёрдамида топамиз. $\overline{i}_1 = A$ бўлсин, бу ерда A — топилиши керак бўлган коэффициент. $\frac{d\overline{i}_1}{dt} = 0$ ва $\frac{d^2\overline{i}_1}{dt^2} = 0$ бўлганлиги учун (36.7) дифференциал тенгламадан A га нисбатан алгебраик тенглама келиб чиқади:

$$\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}A = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)},$$

бу ердан $A = E/R_1$.

Шундай қилиб, $\overline{i}_1 = E/R_1$, демак, (36.7) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + e^{-\sigma t}(C_2 \operatorname{ch}\beta t + C_2 \operatorname{sh}\beta t). \qquad (36.8)$$

Ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун ушбу бошлангич шартлардан фойдаланамиз: $t = 0$ да $i_1 = 0$ ва $i_2 = 0$.

Буларнинг биринчисини (36.8) ечимга қўйсак, дарҳол $C_1 = -E/R_1$ га эга бўламиз. Шунинг учун (36.8) ечим қуйидагича ёзилади:

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + e^{-\sigma t}\left(C_2 \operatorname{sh}\beta t - \frac{E}{R_1}\operatorname{ch}\beta t\right). \qquad (36.9)$$

Ҳосила оламиз:

$$\frac{di_1}{dt} = e^{-\sigma t}\left[-\sigma\left(C_2 \operatorname{sh}\beta t - \frac{E}{R_1}\operatorname{ch}\beta t\right) + \right.$$

$$+\beta\left(C_2 \operatorname{ch}\beta t - \frac{E}{R_1}\operatorname{sh}\beta t\right)\Bigg]$$

ва унинг қийматини $t = 0$ да ҳисоблаймиз:

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = \sigma\frac{E}{R_1} + C_2\beta.$$

Ҳосиланинг топилган қийматини ва бошланғич шартлардаги $i_1 = i_2 = 0$ қийматларни (36.6) тенгламага қўйиб, C_2 ни топиш учун тенглама ҳосил қиламиз;

$$(1-k^2)\left(\frac{\sigma E}{R_1} + C_2\beta\right) = \frac{2\alpha_1 E}{R_1}.$$

$\sigma = (\alpha_1 + \alpha_2)/(1-k^2)$ эканини назарда тутиб, тенгламани

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2)E}{R_1} + C_2\beta(1-k^2) = \frac{2\alpha_1 E}{R_1}$$

кўринишга келтирамиз, бу ердан

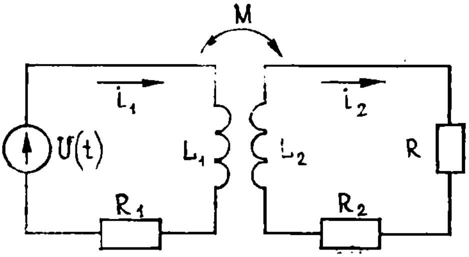
$$C_2 = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)E}{\beta(1-k^2)R_1}.$$

i_1 хусусий ечимни узил-кесил қуйидагича ёзилади:

$$i_1 = \frac{E}{R_1}\left\{1 + e^{-\sigma t}\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta(1-k^2)}\operatorname{sh}\beta t - \operatorname{ch}\beta t\right]\right\}. \qquad (36.10)$$

i_2 хусусий ечимни (36.6) муносабатдан топиш мумкин. Бунинг учун у ерда i_1 ва $\frac{di_1}{dt}$ни юқорида i_1 нинг t нинг функцияси сифатида топилган ифодасига [(36.10) формулага қаранг] ва бу функциянинг t бўйича ҳосиласига алмаштириш керак.

36.5 Истеъмолчи уланган ўзгарувчан ток занжиридаги трансформатор. Истеъмолчига боғланган ўзгарувчан ток занжирига уланган трансформаторнинг иккала контуридаги токларни топинг.



51- шакл

Ечиш. Маълумки, трансформатор индуктивлик ҳамда ички қаршиликка эга бўлган ва индуктив боғланган иккита контурдан иборат. Шунинг учун 51-шаклдаги схемадан фақат иккинчи контурида R истеъмолчиси (ташқи қаршилик) бўлиши билан фарқ қиладиган схемага эга бўламиз. Бундан ташқари ток манбаининг электр юритувчи кучи E ўзгармас деб эмас, балки $U(t) = u\cos(\omega t + \varphi_0)$ деб олинади, бу ерда u — амплитуда, ω — частота ва φ_0 — манба кучланишининг бошланғич фазаси.

Кирхгоф қонунларига биноан мазкур ҳолда масалага доир дифференциал тенгламалар системаси (36.5) га ўхшаш кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}&=U(t),\\ L_2\frac{di_2}{dt}+(R_2+R)\,i_2+M\frac{di_1}{dt}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (36.11)$$

бу ерда $U(t)$ — манбанинг электр юритувчи кучи. Соддалик учун бошлангич фаза φ_0 ни нолга тенг деб оламиз ва кучланишни $U(t) = = u\cos\omega t$ кўринишда ёзамиз.

(36.11) ни номаълумлари $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2}{dt}$ бўлган иккита алгебраик тенгламадан иборат система деб қараб ва уларни одатдагича ечиб, коэффициентлари ўзгармас бўлган иккита чизиқли тенглама системасига келамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt}&=-\frac{R_1L_2}{D}\,i_1+\frac{M(R_2+R)}{D}\,i_2+\frac{L_2U}{D},\\ \frac{di_2}{dt}&=\frac{R_1M}{D}\,i_1-\frac{L_1(R_2+R)}{D}\,i_2-\frac{MU}{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (36.12)$$

бу ерда $D=L_1L_2-M^2$ — системанинг детерминанти. (36.12) система бир жинсли эмас ва уни ечиш учун дастлаб мос бир жинсли

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt}&=-\frac{R_1L_2}{D}\,i_1+\frac{M\bar{R}}{D}\,i_2,\\ \frac{di_2}{dt}&=\frac{R_1M}{D}\,i_1-\frac{L_1\bar{R}}{D}\,i_2. \end{aligned}\right\} \qquad (36.13)$$

системани ечиш керак, бу ерда $R_2+R=\bar{R}$ деб белгиладик. Системанинг характеристик тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{vmatrix} -R_1L_2-r & M\bar{R}\\ R_1M & -L_2\bar{R}-r \end{vmatrix}=0.$$

Бу ердан

$$r^2+(R_1L_2+\bar{R}L_1)\,r+R_1\bar{R}D=0$$

ни ҳосил қиламиз, шунинг учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$r_{1,2}=-\frac{R_1L_2+\bar{R}L_1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{R_2L_2+\bar{R}L_1}{2}\right)^2-R_1\bar{R}D} \qquad (36.14)$$

бўлади.

(36.14) дан $D>0$ бўлганда характеристик тенглама ё иккита манфий ҳақиқий илдизга, ёки ҳақиқий қисмлари манфий бўлган иккита комплекс илдизга эга бўлади. Бу ҳолда (36.13) бир жинсли системанинг i_1 туташув электратокини аниқловчи умумий ечими t

ўсиши билан электраток тебраниш характерига [(36.14) комплекс илдизлар] ёки нодаврийлик характерига (ҳақиқий илдизлар) эга бўлишидан қатъий назар тез камаяди. Барқарор жараённи ўрганишда ечимнинг бу қисмини эътиборга олмаса ҳам бўлади, шунинг учун умумий ҳолда уни ёзмаймиз.

Қаралаётган схеманинг *идеал трансформатор* деб аталувчи хусусий ҳоли алоҳида қизиқиш уйғотади. Идеал трасформатор ўзининг ички R_1 ва R_2 қаршиликлари кичиклиги билан характерланади, бу қаршиликларни ташқи истеъмолчи R ва тақрибан нолга тенг бўлган D нинг қийматига нисбатан амалда нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин, бу ердан қуйидаги тақрибий тенглик келиб чиқади: $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$. Бундай фаразларда $\overline{R} = R$ деб ҳисоблаш мумкин ва (36.14) дан $r_1 \approx 0$, $r_2 \approx -RL_1$ келиб чиқади, демак, (36.13) бир жинсли системанинг умумий ечимини идеал трансформатор бўлган ҳол учун қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$I_1 = C_1^{(1)} + C_2^{(1)} e^{-RL_1 t}, \quad I_2 = C_1^{(2)} + C_2^{(2)} e^{-RL_1 t}$$

Иккинчи қўшилувчилар t ўсиши билан тез камаяди, барқарор жараён биринчи қўшилувчилар ва бир жинсли бўлмаган (36.12) системанинг хусусий ечими билан биргаликда характерланади.

$U(t) = u \cos \omega t$ бўлгани учун бу хусусий ечимларни

$$\left.\begin{aligned} \overline{i}_1 &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ \overline{i}_2 &= P \cos \omega t + Q \sin \omega t \end{aligned}\right\} \qquad (36.15)$$

кўринишда излаймиз. (36.15) ни (36.12) га қўйиб топамиз:

$$\begin{gathered} D(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) = -R_1 L_2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \\ + M\overline{R}(P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + L_2 u \cos \omega t, \\ D(-P\omega \sin \omega t + Q\omega \cos \omega t) = R_1 M (A \cos \omega t + B \sin \omega t) - \\ - L_1 \overline{R}(P \cos \omega t + Q \sin \omega t) - M u \cos \omega t. \end{gathered}$$

Ёзилган тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларидаги $\cos \omega t$ ва $\sin \omega t$ олдидаги коэффициентларни ўзаро тенглаб, тўртта A, B, P, Q номаълумли тўртта чизиқли тенгламадан иборат қуйидаги системага келамиз:

$$\left.\begin{aligned} BD\omega &= -AR_1 L_2 + PM\overline{R} + L_2 u, \\ -AD\omega &= -BR_1 L_2 + QM\overline{R}, \\ QD\omega &= AR_1 M + PL_1 \overline{R} - Mu, \\ -PD\omega &= BR_1 M + QL_1 \overline{R}. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг ечими (36.15) хусусий ечимнинг ифодасини беради.

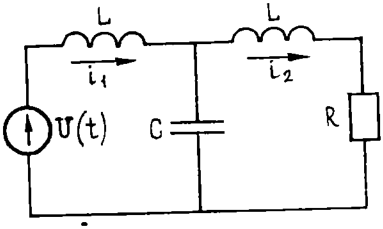
Бу умумий ҳолга тўхталиб ўтмасдан, яна идеал трансформатор бўлган хусусий ҳолга қайтамиз. Унинг учун ($R_1 \approx R_2 \approx 0$, $\overline{R} \approx R$, $D \approx 0$, $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$) қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$PR\sqrt{L_1 L_2} + L_2 u = 0, \quad QR\sqrt{L_1 L_2} = 0.$$

$$Q = 0 \text{ ва } P = -\sqrt{L_2/L_1}u/R.$$

P нинг топилган қиймати истеъмолчи занжиридаги ток амплитудасини аниқлайди. У ҳолда истеъмолчидаги кучланиш пасайишининг амплитудаси $u_2 = \sqrt{L_2/L_1} \cdot u$ га (u — манба кучланишининг амплитудаси) тенг бўлишини қайд қиламиз. Шундай қилиб, $\sqrt{L_2/L_1}$ катталик истеъмолчи занжиридаги ва манба занжиридаги кучланишлар нисбатини ифодалайди. Уни *трансформация коэффициенти* дейилади. Бироқ электротехникада трансформация коэффициенти кўпинча бошқача кўринишда ёзилади. Цилиндрик чулғамли ғалтакнинг индуктивлиги чулгамлар сони квадратига пропорционал бўлгани учун трансформация коэффициенти трансформатор ўрамининг бирламчи ва иккиламчи чулғамлари сони нисбатига тенг бўлади.

36.6. Паст частоталар фильтри. 52-шаклда электр схемаси келтирилган: ўзаро тенг иккита L индуктивлик, C сиғим ва R истеъмолчи кучланиши $U(t) = u\cos\omega t$ қонун бўйича ўзгарадиган кучланиш манбаига уланган. Истеъмолчидаги кучланиш пасайиши тебранишларининг характерини аниқланг. Бунда барқарор жараён билан чекланинг.



52- шакл

Ечиш. Чап ва ўнг контурлардаги токларни мос равишда i_1 ва i_2 орқали белгилаб, сиғим орқали ўтувчи ток $i_2 - i_1$ га тенг эканлигини топамиз. Кирхгоф қонунига кўра i_1 ва i_2 ларга нисбатан ушбу дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} & L\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = U(t), \\ & L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C}\int_0^t (t_2 - t_1)\,d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (36.16)$$

(36.16) нинг иккинчи тенгламасини t бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L\frac{d^2i_2}{dt^2} + R\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0,$$

бу ердан

$$i_1 = LC\frac{d^2i_2}{dt^2} + RC\frac{di_2}{dt} + i_2.$$

i_1 нинг ифодасини t бўйича яна дифференциаллаш ва (36.16) нинг биринчи тенгламасига қўйиш мумкин, у ҳолда тенглама

$$L^2C\frac{d^3i_2}{dt^3} + LRC\frac{d^2i_2}{dt^2} + 2L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = U(t) \qquad (36.17)$$

кўринишни олади.

(36.17) га мос келувчи бир жинсли тенглама барча коэффициентлари мусбат бўлган

$$L^2Cr^3 + LRCr^2 + 2Lr + R = 0$$

куб тенгламадан иборат бўлади.

Бу тенглама мусбат ҳақиқий илдизга эга эмас, чунки $r > 0$ да чап қисмдаги барча қўшилувчилар мусбат ва уларнинг йиғиндиси нолга тенг бўла олмайди. Бундан ташқари, бундай тенгламанинг мавҳум илдизларининг ҳақиқий қисмлари манфий бўлишини исбот қилиш мумкин.

Шундай қилиб, (36.17) мос бир жинсли тенглама умумий ечимининг барча қўшилувчилари манфий кўрсаткичли экспонентларга эга ва шу сабабли t ўсиши билан тез камаяди. Бизни қизиқтирадиган барқарор жараён шунинг учун бир жинсли бўлмаган (36.17) тенгламанинг хусусий ечими билан тўла аниқланади, уни $U = u\cos\omega t$ бўлгани учун

$$i_2 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

кўринишда излаймиз.

Бу ифодани дифференциаллаб ва i_2 ни ҳамда унинг ҳосиласини (36.17) га қўйиб, қуйидаги тенгламалар системасига келамиз:

$$\left.\begin{aligned} &A(-2L\omega + L^2C\omega^3) + B(R - LRC\omega^2) = 0, \\ &A(R - LRC\omega^2) + B(2L\omega - L^2C\omega^3) = u \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$-2L\omega + L^2C\omega^3 = \alpha, \quad R - LRC\omega^2 = \beta$$

белгилашлар киритсак:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha A + \beta B = 0, \\ &\beta A - \alpha B = u. \end{aligned}\right\}$$

Бу системадан

$$A = \beta u/(\alpha^2 + \beta^2), \quad B = -\alpha u/(\alpha^2 + \beta^2).$$

i_2 ечимнинг амплитудаси $|v| = \sqrt{A^2 + B^2} = |u|/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ муносабат орқали ифодаланади ёки α ва β ларнинг қийматини эътиборга олсак:

$$|v| = \frac{|u|}{\sqrt{L^2\omega^2(LC\omega^2 - 2)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}. \qquad (36.18)$$

Истеъмолчидаги кучланиш пасайишини (36.18) дан тенгликнинг иккала қисмини R га кўпайтириб топиш мумкин, чунки $U_2 = Ri_2$. ω частоталар кичик бўлганда ω^2 ва ундан юқори тартибли катталикларни эътиборга олмаса ҳам бўлади. У ҳолда (36.18) нинг махражида ω бўлмаган ҳадларгина қолади, демак, радикал остидаги ифода R^2 га тенг бўлади. Демак, $|v| \approx |u|/R$ ва талаб этилаётган нисбат $|v| \cdot R/|u| \approx 1$.

Бу паст частотали тебранишлар берилган схемадан амплитудани амалда (деярли) ўзгартирмасдан ўтишини билдиради. Аксинча, катта ω частоталар учун (36.18) да илдиз остидаги ифоданинг бош ҳади ω нинг юқори даражали ҳади бўлади. Шу сабабли бундай частоталар учун $|v| \approx |u|/(L^2C\omega^3)$, у ҳолда

$$\frac{|v|R}{|u|} \approx \frac{R}{L^2C\omega^3} \approx 0,$$

яъни юқори частотали тебранишлар берилган схемадан амалда ўтмайди, у паст частоталарни ўтказади ва юқори частоталарни деярли ўтказмайди. Худди ана шу сабабга кўра бундай схема *паст частотали фильтр* дейилади.

36.7. Ҳарбий ҳаракатлар динамикаси. Математика татбиқларининг кенг ривожланиши математик методлар, хусусан, дифференциал тенгламалар ёрдамида илгари фақат миқдорий мулоҳазалардан нарига ўтиб бўлмайдиган соҳаларга тегишли кўпгина масалаларни ҳал этишга имкон яратди. Шундай соҳалардан бири ҳарбий ишдир. Ҳарбий ҳаракатларнинг энг содда моделидан иборат масалалардан бирини қараб чиқайлик, бундай ҳаракатларда иккита гуруҳ иштирок этади. (Биз уларни шартли равишда яшиллар ва кўклар гуруҳи деб атадик.)

Яшилларнинг гуруҳи ҳисобида N_1 та, кўкларникида эса N_2 та бир хилдаги ҳарбий бирликлар (танклар, самолётлар, кемалар, ракета қурилмалари ва ҳоказо) бўлсин, шу билан бирга уларнинг тавсифлари турли гуруҳларда турлича бўлиши мумкин; масалан, самолётларнинг танклар билан, ракета қурилмаларининг кемалар билан жангини қараш мумкин.

Вақтнинг t пайтида яшилларнинг ҳарбий бирликлари ўртача сонини m_1 орқали, кўкларникини эса m_2 орқали белгилаймиз ва вақтнинг кичик Δt оралиғида уларнинг ўзгаришини ҳисоблаймиз. Δm_1 ўзгариш кўкларнинг ўққа тутиши туфайли шикастланган ҳарбий бирликларнинг сафдан чиқиш ҳисобига бўлади. Δt вақт ичида кўкларнинг m_2 та ҳарбий бирлигидан ҳар қайсиси $k_2 \Delta t$ та муваффақиятли ўқ узади. Бу ерда $k_2 = \lambda_2 p_2$ ўртача ўқ отиш тезлиги (кўкларнинг ҳарбий бирликлари вақт бирлиги ичида ўқ узишлар сони) p_2 — айрим отишда нишонни мўлжалга олиш эҳтимоли.

Шунинг учун

$$\Delta m_1 = -k_2 m_2 \Delta t.$$

Тенгликнинг иккала қисмини Δt га бўлиб, $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтсак, қуйидаги дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dm_1}{dt} = -k_2 m_2.$$

Юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар юритиб, қуйидаги иккинчи тенгламани ҳам ҳосил қиламиз:

$$\frac{dm_2}{dt} = -k_1 m_1.$$

Шундай қилиб, бошланғич шартлари $m_1(0) = N_1$, $m_2(0) = N_2$ бўлган дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қилдик.

Бу тенгламалар *жанг динамикаси тенгламалари* ёки *Ланчестр тенгламалари* дейилади.

Системани ечиш учун биринчи тенгламанинг иккала қисмини t бўйича дифференциаллаймиз ва ўнг томондаги $\frac{dm_2}{dt}$ ни унинг иккинчи тенгламадаги ифодаси билан алмаштирамиз. У ҳолда

$$\frac{d^2m_1}{dt^2}=k_1k_2m_1.$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$m_1=C_1e^{\sqrt{k_1k_2}\,t}+C_2e^{-\sqrt{k_1k_2}\,t}$$

кўринишга эга ёки гиперболик функциялардан фойдалансак,

$$m_1=C_3\operatorname{ch}\sqrt{k_1\,k_2}\;t+C_4\operatorname{sh}\sqrt{k_1\,k_2}\;t$$

кўринишга эга. m_1 ни дифференциаллаб биринчи тенгламадан қуйидагини топамиз:

$$m_2=-C_3\sqrt{k_1/k_2}\operatorname{sh}\sqrt{k_1k_2}\;t-C_4\sqrt{k_1/k_2}\operatorname{ch}\sqrt{k_1k_2}\;t.$$

Ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун бошланғич шартлардан фойдаланиб, қуйидаги кийматларни ҳосил қиламиз: $C_3=N_1$, $C_4=-$ $-\sqrt{k_2/k_1}\;N_2$, бу ердан Ланчестр тенгламалари системасининг ечими қуйидаги кўринишда ҳосил бўлади:

$$m_1=N_2\operatorname{ch}\sqrt{k_1k_2}\,t-N_2\sqrt{k_2/k_1}\operatorname{sh}\sqrt{k_1\,k_2}\,t,$$

$$m_2=-N_1\sqrt{k_1/k_2}\operatorname{sh}\sqrt{k_1k_2}\;t+N_2\operatorname{ch}\sqrt{k_1k_2}\,t.$$

Бу формулаларни абсолют миқдордан нисбий миқдорга, яъни сақланиб қолган бирликлар улушига ўтиб, соддалаштириш мумкин. Бунинг учун $\mu_1=m_1/N_1$, $\mu_2=m_2/N_2$ деб белгилаймиз ва система тенгламаларининг иккала қисмини мос равишда N_1 ва N_2 га бўламиз, у ҳолда тенгламаларнинг янги системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_1}{dt}&=-k_2\frac{N_2}{N_1}\mu_2,\\ \frac{d\mu_2}{dt}&=-k_1\frac{N_1}{N_2}\mu_1.\end{aligned}\right\}$$

Бу системани бошланғич шартлар: $t=0$ бўлганда $\mu_1=\mu_2=1$ да интеграллаш керак. Юқоридаги системани $u_1=k_1\,N_1/N_2$, $u_2=$ $=k_2\,N_2/N_1$ параметрлар киритиб, ихчамроқ кўринишга келтириш мумкин. У ҳолда

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_1}{dt}&=-u_2\mu_2,\\ \frac{d\mu_2}{dt}&=-u_1\,\mu_1.\end{aligned}\right\}$$

u_1 ва u_2 параметрлар оддий физик маънога эга. $u_1 = k_1N_1/N_2$ ифоданинг сурати яшиллар ўзларининг дастлабки таркибида вақт бирлиги ичида мумкин бўлган ўқ узишлари сони, яъни кўкларнинг вақт бирлиги ичида яшиллар томонидан яксон қилиниши мумкин бўлган бирликларининг ўртача сони. Бу сонни N_2 га бўлиб, кўкларнинг яшиллар вақт бирлиги ичида яксон қилиш мумкин бўлган бирликларининг ўртача миқдорларини ҳосил қиламиз. u_1 катталик *яшилларнинг кўкларга таъсир этиш интенсивлигининг характеристикаси* дейилади.

u_2 катталик ҳам шундай маънога эга бўлиб, бунда фақат томонларнинг ўрни алмашган бўлади, у кўкларнинг яшилларга таъсир этиш интенсивлигининг характеристикаси дейилади. Энг кейинги тенгламалар системаси ушбу кўринишдаги ечимга эга бўлади:

$$\mu_1 = \operatorname{ch} \sqrt{u_1 u_2}\, t - \sqrt{u_2/u_1}\, \operatorname{sh} \sqrt{u_1 u_2}\, t,$$

$$\mu_2 = \operatorname{ch} \sqrt{u_1 u_2}\, t - \sqrt{u_1/u_2}\, \operatorname{sh} \sqrt{u_1 u_2}\, t$$

(у юқоридаги системани ўзгарувчиларни тегишлича алмаштириб ечишдан ҳосил бўлган). Бу формулаларни янада соддалаштириш мумкин, бунинг учун «келтирилган вақт» $\tilde{t} = \sqrt{u_1 u_2}\, t$ ни киритиш ва $\sqrt{u_1/u_2} = \varkappa$ деб белгилаш керак. У ҳолда

$$\mu_1 = \operatorname{ch} \tilde{t} - \frac{1}{\varkappa} \operatorname{ch} \tilde{t}, \quad \mu_2 = \operatorname{ch} \tilde{t} - \varkappa \operatorname{sh} \tilde{t}.$$

Агар томонларнинг **кучлари** тенг, яъни $\varkappa = 1$ бўлса,

$$\mu_1 = \mu_2 = e^{-\tilde{t}}.$$

Бу формулалардан сақланиб қолган ҳарбий бирликларнинг ўртача миқдорлари μ_1 ва μ_2 фақат келтирилган вақт $\tilde{t}$ **га эмас, балки** $\varkappa$ параметрга ҳам боғлиқлиги келиб чиқади. $\varkappa$ параметр **кучлар** нисбатини белгилайди.

$$\varkappa = \sqrt{u_1/u_2} = (N_1/N_2) \sqrt{k_1/k_2}.$$

Бу параметр бир томоннинг иккинчи томон олдида устунлигини аниқлайди. $\varkappa > 1$ бўлганда яшиллар кўклардан кучли бўлади ва жанг бир қанча вақтдан сўнг яшилларнинг ғалабаси билан тугайди. $\varkappa < 1$ бўлганда эса аксинча бўлади $\varkappa = 1$ бўлганда ҳеч бир томон устунликка эриша олмайди.

$\varkappa$ параметрнинг ифодасидан у кучларнинг муносабати N_1/N_2 га эффектив ўқ узиш муносабати k_1/k_2 га нисбатан кўпроқ боғлиқ эканлиги кўринади. Масалан, N_1 нинг икки марта ортиши $\varkappa$ параметрни икки марта орттиради, эффектив тез отиш k_1 нинг икки марта орттирилиши эса $\varkappa$ параметрни фақат $\sqrt{2} = 1{,}4$ марта орттиради.

Қуйидаги масалани қараймиз.

Яшиллар ва кўкларнинг икки гуруҳ танклари ўртасида жанг кетаяпти. Яшилларнинг 50 та танки бўлиб, уларнинг ўртача тез отиши минутига $\lambda_1 = 0{,}25$ ўқ узишдан ва нишонга тekказишнинг ўртача эҳтимоли $P_1 = 0{,}56$ дан иборат. Кўкларда 25 танк бўлиб, уларнинг ўртача тез отиши минутига $\lambda_2 = 0{,}5$ ўқ узишга, нишонга текказишнинг ўртача эҳтимоли $P_2 = 0{,}5$ га тенг.

Жанг қайси томоннинг ғалабаси билан ва тахминан қанча вақтдан сўнг тугашини ҳамда голиб чиққан томоннинг йўқотишлари тақрибан қанча бўлишини кўрсатайлик.

Дастлаб қуйидаги коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$u_1 = \frac{\lambda_1 N_1}{N_2} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}56 \cdot 50}{25} = 0{,}28,$$

$$u_2 = \frac{\lambda_2 N_2}{N_1} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 25}{50} = 0{,}125.$$

$u_1 > u_2$ бўлгани учун яшиллар ғалаба қозонади. $\tilde{t} = \sqrt{0{,}28 \cdot 0{,}125}\, t = 0{,}187\, t$ «келтирилган вақт» га ўтамиз ва устунлик коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$\varkappa = \sqrt{0{,}28/0{,}125} \simeq 1{,}5.$$

Жанг тугаши пайтида $\mu_2 = 0$, демак,

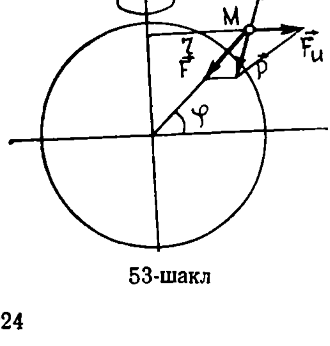
$$\operatorname{ch} \tilde{t} - \varkappa \operatorname{sh} \tilde{t} = 0,$$

бу ердан $\operatorname{th} \tilde{t} = 1/\varkappa = 1/1{,}5 = 0{,}667$. Гиперболик тангенслар жадвалидан $\tilde{t} = 0{,}8$ ни топамиз, ҳақиқий вақтга (минутларда) ўтиб, $t = \tilde{t}/0{,}187 = 4{,}28$ (мин) ни топамиз. Жанг тугаганда яшилларнинг сақланиб қолган танклари улушини аниқлаймиз:

$$\mu_1 = \operatorname{ch} 0{,}8 - 0{,}667 \cdot \operatorname{sh} 0{,}8 = 1{,}337 - 0{,}667 \cdot 0{,}881 = 1{,}337 - 0{,}585 = 0{,}752.$$

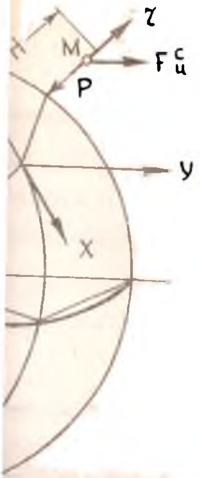
Шундай қилиб, танклар жанги тахминан 4,5 мин дан кейин яшилларнинг ғалабаси билан тугайди, бунда ғалаба қозонган томон дастлаб ўзида бор бўлган танкларнинг 25 % га яқинидан, яъни тахминан 12 та танкидан ажралади.

36. 8. Тушаётган жисмларнинг шарққа оғиши. Бошланғич тезликсиз тушаётган жисм Ернинг айланиши сабабли вертикал бўйича эмас, балки ундан бироз шарққа томон оғиб ҳаракатланади. Тушаётган жисмларнинг бу шарқий оғишини ҳисоблаш талаб этилади. Энг аввало Ернинг тайин жойида вертикал деб нимани айтилишига тўхталиб ўтамиз. Ер сиртининг кенглиги φ га тенг бўлган бирор жойида ипга осилган ва мувозанат вазиятида турган M юкни тасаввур этайлик (53-расм). Ипнинг мувозанатли йўналиши мазкур жойдаги осма чизиқ ёки *вертикал* деб аталади.



53-шакл

Шуни айтиб ўтамизки, вертикалнинг йўналиши M жисмга ер шари томонидан таъсир этувчи тортишиш ку-



Энди Ер сиртидан H баландликда тинч турган M моддий нуқта (биз ер шарига нисбатан нисбий тинчлик ҳақида гапирамиз, албатта) бошланғич тезликсиз тушмоқда деб тасаввур этайлик (54- шакл). Тушаётган жисмнинг биз кузатаётган ҳаракати унинг айланаётган ер шарига нисбатан нисбий ҳаракатидан бошқа нарса эмас. Биз бу ерда масаланинг Ер айланишининг бурчак тезлиги қиёсий кичиклигига асосланган тақрибий ечимини баён этамиз.

M моддий нуқтага унинг ҳаракат вақтида Ернинг тортиш кучи $\vec{F}$ таъсир этади. Бу куч қаторига марказдан қочма инерция кучи $\vec{F}_{и}^{п}$ ва кориолис инерция кучи $\vec{F}_{и}^{c}$ ни киритамиз. Биз била-
и $\vec{F}$ ва марказдан қочма куч $\vec{F}_{и}^{п}$ нинг тенг таъсир
уқтанинг оғирлиги $\vec{P}$ бўлиб, у вертикал бўйлаб йў-
инерция кучи $\vec{F}_{и}^{c}$ нинг миқдорини ва йўналишини
лумки,

$$\vec{F}_{и}^{c} = 2\, m\vec{u},$$

нг шундай нуқтасининг айланиш тезлигики, бу
нинг бирор нуқтасидан қўйилган ва M нуқта-
и $\vec{v}_r$ га тенг векторнинг охири билан устма-уст
кучи $\vec{F}$ нинг йўналиши $\vec{u}$ тезлик йўналишига
$\vec{u}$ — айланиш тезлигини ҳисоблаймиз. Бунинг
инг бирор нуқтасидан масалан, Ер маркази
нисбий тезлиги $\vec{v}_r$ га тенг вектор қўямиз.
шаётган жисмнинг биз кузатаётган тезлиги.
аракатини аниқламагунимизча $\vec{v}_r$ тезликнинг
ши бизга номаълум.

ланма бурчак тезлигининг кичиклиги сабабли
нг траекторияси вертикал тўғри чизиқдан жу-
(кузатишлар ҳам шуни тасдиқлайди). Бун-

чи йўналиши билан устма
айланиши натижасида M
нисбийдир, M жисм ер
лади,

M жисмга (уни модд
усулини татбиқ этамиз.
шиш кучи ва ипнинг ре
тика усули бўйича бу ку
мувозанатланиши лозим.
инерция кучи марказга

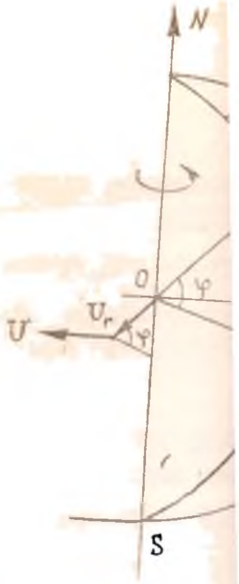
га тенг, бу ерда ω Ер
тадан Ернинг айланиш
ер шари ўқидан r перп
кучлар ўзаро мувозанат
тенг таъсир этувчиси
ши керак.

Шундай қилиб, $\vec{F}$
жисмнинг биз кузатаёт
нинг йўналиши мазкур

Шунга ишонч хоси
нинг миқдори жисм о

чунки $r = R\cos\varphi$, бу
катта қийматга экват
$= 1$ айл/сутка $= \frac{}{24}$
$= 9{,}78$ м/с^2 деб эква

Марказдан қочма
тиладиган $\vec{P}$ оғирли
вертикал йўналиш б
лади. Энди тушаётг
тайлик.



54- шак

мизки, тортиш куч
этувчиси моддий н
палган. Кориолис
топамиз. Бизга маъ

бу ерда $\vec{u}$ — Ерни
нуқта ер шари ўқи
нинг нисбий тезлиг
тушади. Кориолис
қарама-қаршидир.
учун Ер шари ўқин
O дан M нуқтанинг
$\vec{v}_r$ нисбий тезлик ту
Биз M нуқтанинг
катталиги ва йўнали

Бироқ Ернинг ай
тушаётган жисмни
да кам фарқ қилади

дан келиб чиқадики, $\vec{v}_r$ тезликнинг йўналиши вертикалнинг йўналишидан ва, демак, кузатиш жойи A ни Ер маркази O билан туташтирадигаи тўғри чизиқдан ҳам жуда кам фарқ қилади.

$\vec{u}$ тезликни ҳисоблашда биз биринчи яқинлашишда $\vec{v}_r$ нисбий тезлик AO тўғри чизиқ бўйлаб йўналган деб ҳисоблашимиз мумкин.

$\vec{v}_r$ векторни O нуқтадан AO тўғри чизиқ давомида қўйиб ва $\vec{u}$ тезликни бу вектор охирининг айланма тезлиги сифатида аниқлаб,

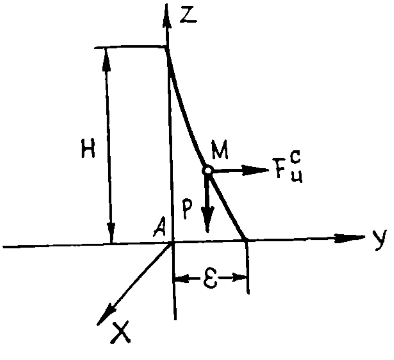
$$u = v_r\,\omega\cos\varphi$$

ни топамиз, шу билан бирга $\vec{u}$ тезлик Ернинг айланиш томонига Ер ўқи ва OA радиус орқали ўтувчи текисликка (яъни шу жойнинг медианалар текислигига) перпендикуляр равишда йўналган. Бу ердан

$$F_u^c = 2mv_r\,\omega\cos\varphi$$

эканлиги келиб чиқади, шу билан бирга $\vec{F}_u^c$ кучнинг йўналиши $\vec{u}$ тезлик йўналишига қарама-қарши; кўриш осонки, кориолис кучи $\vec{F}_u^c$ медианалар текислигига перпендикуляр бўлиб шарққа йўналган. Ана шу кучнинг мавжудлиги тушаётган жисмнинг шарққа оғишига олиб келади.

Энди M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини Ер шари билан боғланган x, y, z тўғри бурчакли ўқлардаги проекцияларда тузамиз. Координата бошини A нуқтада оламиз, z ўқни вертикал юқорига, x ўқни медиана текислигида жанубга, y ўқни эса медиана текислигига перпендикуляр равишда шарққа йўналтирамиз (x, y, z ўқлар 55- шаклда кўрсатилган).



55- шакл

$\vec{P}$ ва $\vec{F}_u^c$ кучлар z ва y ўқлар бўйича йўналганлигини назарда тутиб, ушбу ҳаракат дифференциал тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= 0,\\ my'' &= 2mv_r\,\omega\cos\varphi,\\ mz'' &= -P. \end{aligned}\right\} \qquad (36.19)$$

Бундан ташқари

$$t = 0 \text{ да}$$
$$x = 0,\ y = 0,\ z = H,$$
$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = 0$$

бошланғич шартларга эгамиз.

(36. 19) нинг биринчи тенгламасини интеграллаб ва бошланғич шартларни ($t = 0$ да $x = 0$ ва $x' = 0$ ни) назарда тутиб,

$$x = 0$$

ни топамиз, яъни M нуқтанинг ҳаракати yz текисликда содир бўлади.

$P = mg$ ни (36. 19) нинг учинчи теигламасига қўйиб,

$$z'' = -g$$

га эга бўламиз, бу ердан

$$z' = -gt + C_1,$$
$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармасларни бошланғич маълумотлар бўйича топамиз: $C_1 = 0$, $C_2 = H$. Демак,

$$z' = -gt, \tag{36.20}$$
$$z = H - \frac{gt^2}{2}.$$

(36. 19) нинг иккинчи тенгламасини қарайлик. Бу тенгламанинг ўнг томонида бизга номаълум v_r катталик турибди. v_r тезликнинг йўналиши вертикалнинг, яъни z ўқнинг йўналишидан кам фарқ қилганлиги учун биз биринчи яқинлашишда v_r тезликнинг миқдори унинг z ўқдаги проекциясига тенг деб ҳисоблашимиз мумкин, яъни

$$v_r = |z'| = gt.$$

Бундай ҳолда (36. 19) нинг иккинчи тенгламаси ушбу кўринишни олади:

$$my'' = 2mgt\,\omega \cos\varphi$$

ёки

$$y'' = 2g\,\omega\, t \cos\varphi.$$

Интеграллаб, топамиз:

$$y' = g\,\omega\, t^2 \cos\varphi + C_3,$$
$$y = \frac{1}{3}\, g\,\omega\, t^3 \cos\varphi + C_3 t + C_4.$$

Бошланғич шартлардан $C_3 = 0$ ва $C_4 = 0$ ни топамиз.

Демак,

$$y' = g\omega t^2 \cos\varphi,$$
$$y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi. \qquad (36.\ 21)$$

Энди H баландликдан тушаётган жисмнинг шарқий оғиш миқдорини топиш қийин эмас; y t нинг z нолга айланадиган пайтига мос келадиган қийматига тенг. (36. 20) да $z = 0$ деб,

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

ни топамиз. t нинг бу қийматини (36.21) тенгламага қўйиб ва M нуқтанинг шарқий оғишини ε орқали белгилаб,

$$\varepsilon = \frac{1}{3} g\omega \sqrt{\frac{8H^3}{g^3}} \cos\varphi = \frac{1}{3} \omega \sqrt{\frac{8H^3}{g}} \cos\varphi \qquad (36.\ 22)$$

ни ҳосил қиламиз.

Санкт-Петербург кенглигида 100 м баландликдан тушаётган жисмнинг шарқий оғишини бу формула бўйича ҳисоблаймиз. $H = 100$ м, $\varphi = 60°$ деб,

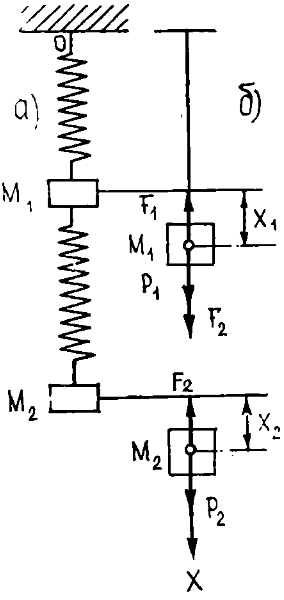
$$\varepsilon = 1{,}1 \text{ см}$$

ни топамиз. Кутилганидек, ε миқдор жуда кичик бўлиб чиқди.

36. 9. Эластик боғланган иккита массанинг хусусий тебранишлари. Энди бир неча эркинлик даражаларига эга бўлган системаларни қарайлик.

Қўзғалмас O нуқтага илинган винтли пружинага осилган M_1 юкни тасаввур этайлик; M_1 юкка иккинчи пружина воситасида M_2 юк осилган (56-шакл). Бу системанинг ўзининг мувозанат вазияти атрофидаги хусусий тебранишларини кўрайлик.

M_1 ва M_2 юкларнинг массаларини m_1 ва m_2 орқали, уларнинг оғирликларини P_1 ва P_2 орқали белгилайлик, пружиналарнинг массаларини ҳисобга олмаймиз. 56-а шаклда бу системанинг мувозанат вазияти тасвирланган. Бу система ўз мувозанат вазиятидан чиқарилган ва ўз ҳолига қўйилган деб фараз этайлик. Пружинанинг эластиклик кучлари таъсири остида системанинг хусусий тебранишлари содир бўла бошлайди. Системанинг бу тебраниш вақтининг бирор пайтидаги вазияти 56-б шаклда кўрсатилган. Бу система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузамиз.



56- шакл

M_1 ва M_2 юкларнинг (уларни моддий нуқталар деб қараймиз) ўзларининг мувозанат вазиятларидан оғишларини x_1 ва x_2 орқали белгилаймиз. Системанинг ҳолати x_1 ва x_2 орқали тўла аниқланганлиги учун (юклар фақат вертикал кўчади деб фараз қиламиз) биз система иккита эркинлик даражасига эга деб фараз қиламиз. Устки пружинанинг M_1 юкка қўйилган эластик реакция кучи миқдорини F_1 орқали, пастки пружинанинг иккала юкка қўйилган эластик реакция кучлари миқдорини F_2 орқали белгилаб ва иккала юк ҳаракатининг вертикал ўқ x га проекцияларда дифференциал тенгламаларини тузиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= P_1 + F_2 - F_1 \\ m_2 x_2'' &= P_2 - F_2. \end{aligned}$$

Устки ва пастки пружиналарнинг бикрлик коэффициентларини мос равишда c_1 ва c_2 орқали, бу пружиналарнинг мувозанат вазиятдаги чўзилишларини f_1 ва f_2 орқали белгилаймиз. Системанинг мувозанат вазият (a) дан ($б$) вазиятга ўтишида (56-шакл) иккала пружина мос равишда x_1 ва $x_2—x_1$ миқдорда қўшимча чўзилишини ҳисобга олиб,

$$\begin{aligned} F_1 &= c_1 (f_2 + x_1), \\ F_2 &= c_2 (f_2 + x_2 - x_1) \end{aligned}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу қийматларни олдинги тенгламаларга қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= P_1 + c_2 f_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 - c_1 f_1 - c_1 x_1, \\ m_2 x_2'' &= P_2 - c_2 f_2 - c_2 x_2 + c_2 x_1. \end{aligned}$$

Системанинг мувозанат ҳолатида M_1 ва M_2 юкларнинг ҳар бирига қўйилган кучлар ўзаро мувозанатлашувини қайд этамиз. Мувозанат вазиятда пружиналарнинг эластик реакция кучлари $F_1 = c_1 f_1$ ва $F_2 = c_2 f_2$ қийматларга эга эканлигини назарда тутиб, ушбу мувозанат шартини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} P_1 + c_2 f_2 - c_1 f_2 &= 0, \\ P_2 - c_2 f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Бу мувозанат шартлари асосида биз тузган ҳаракат дифференциал тенгламалариииииг ўзгармас ҳадлари қисқаради.

Ушбу

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = 2a, \quad \frac{c_2}{m_1} = 2b, \quad \frac{c_2}{m_2} = 2c \qquad (36.23)$$

белгилашларни киритиб, система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини узил-кесил ушбу кўринишга келтирамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1'' + 2a x_1 - 2b x_2 &= 0, \\ x_2'' - 2c x_1 + 2c x_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (36.24)$$

Биз ўзгармас коэффициентли иккита бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама системасини ҳосил қилдик. Бу системани интеграллашга киришиб, унинг хусусий ечимини

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha^{(1)} \sin(\lambda t + \beta), \\ x_2 &= \alpha^{(2)} \sin(\lambda t + \beta) \end{aligned}\right\} \qquad (36.25)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, λ ва β — ўзгармас сонлар.

Бу x_1 ва x_2 қийматларни (36. 24) тенгламаларга қўйиб ва $\sin(\lambda t + \beta)$ га қисқартириб, ушбу $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ ва λ ўзгармаслар қаноатлантириши лозим бўлган тенгламаларни оламиз:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda^2\alpha^{(1)} + 2a\alpha^{(1)} - 2b\alpha^{(2)} &= 0, \\ -\lambda^2\alpha^{(2)} - 2c\alpha^{(1)} + 2c\alpha^{(2)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} (2a - \lambda^2)\,\alpha^{(1)} - 2b\alpha^{(2)} &= 0, \\ -2c\alpha^{(1)} + (2c - \lambda^2)\,\alpha^{(2)} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (36.26)$$

Бу тенгламалар $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$ ечимга эга бўлиб, у (36. 24) тенгламаларнинг $x_1 = x_2 = 0$ хусусий ечимига олиб келади, яъни бизни системанинг мувозанат вазиятига қайтаради. $\alpha^{(1)}$ ва $\alpha^{(2)}$ ўзгармасларга нисбатан чизиқли ва бир жинсли бўлган (36. 26) тенгламалар нолдан фарқли ечимга бу системанинг детерминанти нолдан фарқли, яъни

$$\begin{vmatrix} 2a - \lambda^2 & -2b \\ -2c & 2c - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (36.27)$$

тенглик ўринли бўлгандагина эга бўлади.

Биз (36. 24) тенгламалар (36. 25) кўринишдаги хусусий ечимларга эга бўлиши учун λ катталик қаноатлантириши лозим бўлган тенгламани ҳосил қилдик. Ҳосил бўлган детерминантни очиб,

$$\lambda^4 - 2(a + c)\lambda^2 + 4(a - b)c = 0$$

га эга бўламиз. λ^2 га нисбатан квадрат тенгламадан иборат бу тенглама

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 &= a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4(a - b)\,c}, \\ \lambda_2^2 &= a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4(a - b)\,c} \end{aligned}\right\} \qquad (36.28)$$

илдизларга эга. Бу иккала илдиз ҳам ҳақиқий ва мусбат эканлигига ишонч ҳосил қилиш осон. Улар ҳақиқий эканлигини кўрсатиш учун уларни;

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 &= a + c - \sqrt{(a - c)^2 + 4\,bc} \\ \lambda_2^2 &= a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4\,bc} \end{aligned}\right\} \qquad (36.29)$$

кўринишда ифодалаймиз ҳамда a, b ва c миқдорлар (36. 23) формуладан кўриниб турганидек, мусбат сонлар эканига эътибор берамиз.

λ_2^2 илдиз мусбат албатта. λ_1^2 илдизнинг ҳам мусбатлигига ишонч ҳосил қилиш учун $a > b$ эканлигини кўрсатиш кифоядир, бу ҳам

(36. 23) формулалардан кўриниб турибди, ва демак, (36. 28) формулалардаги радикал сон жиҳатидан $a+c$ дан кичик.

λ_1^2 ва λ_2^2 мусбат сонлардан квадрат илдиз чиқариб, иккита ҳақиқий қиймат $\lambda=\lambda_1$ ва $\lambda=\lambda_2$ ни ҳосил қиламиз, бу қийматларда (36. 24) система (36. 25) кўринишдаги хусусий ечимга эга бўлади. Шундай қилиб, (36. 24) тенгламалар қуйидаги иккита хусусий чизиқли ечимга эга:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^{(1)} \sin(\lambda_1 t+\beta_1), \\ x_2 &= \alpha_1^{(2)} \sin(\lambda_1 t+\beta_1) \end{aligned}\right\} \qquad (36.\ 30)$$

ва

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_2^{(1)} \sin(\lambda_2 t+\beta_2), \\ x_2 &= \alpha_2^{(2)} \sin(\lambda_2 t+\beta_2). \end{aligned}\right\} \qquad (36.\ 31)$$

Бу хусусий ечимларнинг ҳар бирига M_1 ва M_2 юкларнинг бирор гармоник тебранма ҳаракати мос келади. (36. 30) ечимга M_1 ва M_2 юкларнинг λ_1 частотали гармоник тебраниши мос келади, (36.31) ечим эса шу юкларнинг λ_2 частотали гармоник тебранишини беради.

Системамизнинг бу иккита гармоник тебранма ҳаракати унинг *бош асосий тебранишлари* деб аталади; λ_1 ва λ_2 частоталар системанинг *хусусий частоталари* деб ном олган.

Биз (36. 25) хусусий ечимдаги β ўзгармаснинг танланишига қўйиладиган ҳеч қандай шартни ҳосил қилмадик. Бу ердан системанинг бош тебранишларининг β_1 ва β_2 бошланғич фазалари мутлақо ихтиёрийлигича қолиши келиб чиқади. M_1 ва M_2 юкларнинг биринчи бош тебранишлари амплитудалари $\alpha_1^{(1)}$ ва $\alpha_1^{(2)}$ ҳамда шу юкларнинг иккинчи бош тебранишлари амплитудалари $\alpha_2^{(1)}$ ва $\alpha_2^{(2)}$ ҳақида бундай деб бўлмайди.

Биз кўрдикки, (36. 25) ечимдаги $\alpha^{(1)}$ ва $\alpha^{(2)}$ ўзгармаслар (36.26) тенгламаларни қаноатлантириши лозим. Бу ерда $\lambda=\lambda_1$, $\alpha^{(1)} = \alpha_1^{(1)}$ ва $\alpha^{(2)}=\alpha_1^{(2)}$ деб,

$$\begin{aligned} (2a-\lambda_1^2)\alpha_1^{(1)} - 2b\,\alpha_1^{(2)} &= 0, \\ -2c\,\alpha_1^{(1)} + (2c-\lambda_2^2)\,\alpha_1^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз, буларни $\alpha_1^{(1)}$ ва $\alpha_1^{(2)}$ амплитудалар қаноатлантиради. $\lambda=\lambda_1$ (36. 37) тенгламанинг илдизи, ва демак, ҳозиргина ёзилган системанинг детерминанти нолга тенг бўлганлиги учун, бу тенгламалардан бири иккинчисининг натижасидир.

Бу тенгламалардан

$$\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}} = \frac{2a-\lambda_1^2}{2b} = \frac{2c}{2c-\lambda_1^2}$$

ни топамиз. Худди шу каби, иккинчи бош тебранишга мурожаат этиб,

$$\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_2^{(1)}} = \frac{2a-\lambda_2^{(2)}}{2b} = \frac{2e}{2c-\lambda_2^{(2)}}$$

ни топамиз.

Шундай қилиб, M_1 ва M_2 юкларнинг тебраниш амплитудалари абсолют қийматлари аниқмас бўлиб қолса-да, бироқ ҳар бир бош тебранишда бу амплитудаларнинг нисбатлари тўла аниқ қийматларга эга бўлади.

M_1 юкнинг ҳар бир бош тебраниш амплитудасини ихтиёрий бериб, яъни

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1, \quad \alpha_2^{(1)} = \alpha_2$$

деб (бу ерда α_1 ва α_2 ихтиёрий ўзгармаслар), M_1 юкнинг тебраниш амплитудалари учун мос равишда

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{2a - \lambda_1^2}{2b}\alpha_1, \quad \alpha_2^2 = \frac{2a - \lambda_2^2}{2b}\alpha_2$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб (36. 30) ва (36. 31) бош тебраниш тенгламалари узил-кесил ушбу кўринишга келтирилади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ x_2 &= \frac{2a - \lambda_1^2}{2b}\alpha_2 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) \end{aligned}\right\} \qquad (36.\ 32)$$

ва

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ x_2 &= \frac{2a - \lambda_2^2}{2b}\alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \qquad (36.\ 33)$$

Энди (36. 32) тенгламаларга мурожаат этадиган бўлсак, кўрамизки, биринчи бош тебранишда иккала x_1 ва x_2 массаларнинг кўчиши бир вақтда нолга айланади ва бир вақтда максимал қийматларига эришади; бу деган сўз, иккала M_1 ва M_2 юк ўзларининг мувозанат вазиятларидан бир вақтда ўтади ва мувозанат вазиятдан энг катта оғишга бир вақтда эришади. Шу фикрларни (36. 33) тенгламалар асосида иккинчи бош тебраниш учун ҳам айтишимиз мумкин.

Яна шуни ҳам таъкидлаймизки, (36. 29) формулалар асосида

$$2a - \lambda_1^2 = a - c + \sqrt{(a-c)^2 + 4bc} > 0,$$
$$2a - \lambda_2^2 = a - c - \sqrt{(a-c)^2 + 4bc} < 0$$

га ҳам эгамиз. Бундан келиб чиқадики, биринчи бош тебранишда x_1 ва x_2 кўчишлар ҳар доим бир хил ишорали, иккинчи бош тебранишда эса улар қарама-қарши ишоралидир. Демак, биринчи бош тебранишда иккала M_1 ва M_2 юк бир хил йўналишларда ҳаракатланади (яъни бир хил фазада бўлади); иккинчи бош тебранишда эса қарама-қарши йўналишларда ҳаракатланади (яъни қарама-қарши фазаларда бўлади).

Шундай қилиб, системамиз ҳаракатининг дифференциал тенгламалари иккита хусусий ечим (36. 32) ва (36. 33) га эга. (36. 24) тенгламалар чизиқли бўлганлиги учун бу ечимларни қўшиб, биз ушбу янги ечимни оламиз:

$$x_1 = \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + \alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2),$$

$$x_2 = \frac{2a - \lambda_1^2}{2b} \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + \frac{2a - \lambda_2^2}{2b} \alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \qquad (36.34)$$

Бу ечимга кирган α_1, α_2, β_1, β_2 ўзгармаслар мутлақо ихтиёрий эканлигини таъкидлаб ўтамиз. (36. 24) система тўртинчи тартибли бўлганлиги учун тўртта ихтиёрий ўзгармас α_1, α_2, β_1, β_2 ни ўз ичига олган (36. 34) ечим (36. 24) тенгламаларнинг умумий ечимидир.

Бундан, системамизнинг умумий тебранма ҳаракати унинг иккита бош тебранишининг қўшилишидан иборат бўлади. Ўз-ўзидан тушунарлики, α_1, α_2, β_1, β_2 ихтиёрий ўзгармаслар бошланғич шартлар бўйича, яъни x_1 ва x_2 миқдорлар ва улар ҳосилаларининг бошланғич қийматлари бўйича аниқланиши зарур.

Хусусан, биз бошланғич шартларни $\alpha_2 = 0$ бўладиган қилиб танлашимиз мумкин, у ҳолда (36. 34) тенгламалар (36. 32) тенгламаларга айланади ва биз системанинг биринчи бош тебранишига қайтамиз. Иккинчи бош тебранишни амалга ошириш учун бошланғич шартларни $\alpha_1 = 0$ бўладиган қилиб танлаш мумкин.

Пировардида битта хусусий ҳол учун энг содда ҳисоблашларни бажарамиз. M_1 ва M_2 юкларнинг массалари тенг ва пружиналар бикрликлари ҳам тенг деб фараз қиламиз, яъни

$$m_1 = m_2, \; c_1 = c_2$$

деб оламиз.

(36. 23) формулаларга асосан

$$a = \frac{c_1}{m_1}, \; b = \frac{c_1}{2m_1}, \; c = \frac{c_1}{2m_1}$$

Сўнгра (36. 29) формулалар бўйича қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\lambda_1^2 = \frac{3}{2}\frac{c_1}{m_1} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4m^2{}_1} + \frac{c_1^2}{m^2{}_1}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\frac{c_1}{m_1} \approx 0{,}382 \frac{c_1}{m_1},$$

$$\lambda_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\frac{c_1}{m_1} \approx 2{,}618 \frac{c_1}{m_1}.$$

Бундан

$$\lambda_1 = 0{,}618 \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}, \; \lambda_2 = 1{,}62 \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}.$$

Ушбу

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$$

белгилашни киритамиз ва λ_0 биринчи пружинадаги M_1 юкнинг иккинчи пружина ва ундаги юк бўлмаган ҳолатда хусусий тебранишлари частотасидан бошқа нарса эмаслигини айтиб ўтамиз. Шундай қилиб, системанинг хусусий тебранишлари учун биз ушбу қийматларни ҳосил қиламиз:

$$\lambda_2 = 0{,}618 \lambda_0, \; \lambda_2 = 1{,}62 \lambda_0.$$

Сўнгра

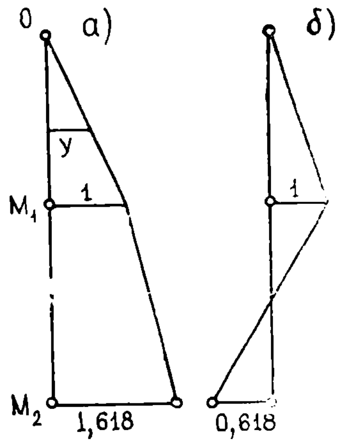
$$\frac{2a-\lambda_1^2}{2b} = 2-0{,}382 = 1{,}618,$$

$$\frac{2a-\lambda_2^2}{2b} = 2-2{,}618 = -0{,}618$$

га эгамиз.

Демак, биринчи бош тебранишда M_2 юкнинг тебранишлар амплитудаси M_1 юкнинг тебраниш амплитудасидан 1,618 марта катта, иккинчи бош тебранишда M_2 юкнинг тебраниш амплитудаси M_1 юк тебраниш амплитудасининг 0,618 қисмини ташкил этади.

Олинган бу натижаларни график кўринишда тасвирлаш фойдалидир. Системамизнинг биринчи бош тебранишини оламиз. 57- шаклда системамизни мувозанат вазиятида тасвирлаймиз, ҳамда M_1 ва M_2 юкларнинг мувозанат вазиятларидан бу юкларнинг тебраниш амплитудаларини ихтиёрий масштабда (масалан, M_1 юк амплитудасини бирлик қилиб) қўямиз. Қўзғалмас *О* нуқтани M_1 юк амплитудасининг охири билан ҳамда M_1 ва M_2 юклар амплитудаларининг охирларини ўзаро туташтириб, устки ёки остки пружиналар ихтиёрий нуқтасининг тебраниш амплитудасини осон топишга имкон берувчи графикни ҳосил қиламиз. Бу амплитуда қабул қилинган масштабда у ёки бу тўғри чизиқнинг мос нуқтасининг горизонтал координатаси орқали график кўринишда тасвирланади. 57- *а* шаклда тасвирланган график системанинг биринчи бош тебраниш шаклини беради.



57- шакл

57- *б* шаклда иккинчи бош тебраниш шаклини берувчи график ясалган. Бу ҳолда M_2 ва M_1 юклар амплитудаларининг нисбати манфий сон —0,618 га тенг бўлганлиги учун графикни ясашда биз амплитудани қарама-қарши томонларга қўямиз. Кўриш осонки, остки пружинанинг битта нуқтаси нолга тенг амплитудага эга; бундай нуқта *тугун нуқта* ёки *тугун* дейилади.

Шундай қилиб, биринчи бош тебраниш тугунга эга эмас; иккинчи бош тебранишда битта тугун бор. Яна бир марта таъкидлаймизки, бош тебранишнинг шакли M_1 ва M_2 юклар амплитудаларининг абсолют қийматларига боғлиқ эмас, бош тебранишнинг шакли бу амплитудаларнинг нисбати билан тўла аниқланади.

37- §. Дифференциал тенгламалар системаси ечимининг геометрик талқини. Фазалар фазоси ҳақида тушунча. «Йиртқич—ўлжа» масаласи

Юқорида кўрганимиздек, биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама $y' = f(x, y)$ содда геометрик талқинга эга бўлиб, Oxy текисликда йўналишлар майдонини аниқлар эди.

Дифференциал тенгламанинг нормал системаси ҳам худди шунга ўхшаш геометрик маънога эга. Соддалик учун иккита: $y(x)$ ва $z(x)$ номаълум функцияли иккита оддий дифференциал тенгламадан иборат ушбу системани қараш билан чекланамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (37.1)$$

Бу системанинг умумий ечими қуйидаги функциялар жуфтидан иборатдир:

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x, C_1, C_2), \\ z &= z(x, C_1, C_2). \end{aligned}\right\} \qquad (37.2)$$

(37.2) функцияларнинг ҳар бири уч ўлчовли $Oxyz$ текисликда цилиндрик сиртнинг тенгламасини ифодалайди, улар биргаликда эса бу фазода (37.1) системанинг интеграл эгри чизиғи бўлган эгри чизиқни ифодалайди. Ўз навбатида (37.1) система фазодаги бирорта соҳанинг ҳар бир (x, y, z) нуқтасида интеграл эгри чизиқ уринадиган йўналишини аниқлайдиган $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{dz}{dx}$ қийматларни аниқлайди.

Шундай қилиб, дифференциал тенгламанинг (37.1) нормал системаси фазода йўналишлар майдонини беради, бу системанинг умумий ечимини топиш геометрик жиҳатдан ўзининг ҳар бир нуқтасида майдон аниқлайдиган йўналишга уринадиган икки параметрли эгри чизиқлар оиласини топишни билдиради.

Юқорида айтилганларни номаълум функциялар сони катта бўлган ҳолда ҳам бемалол такрорлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, n та номаълум функцияли n та оддий дифференциал тенгламанинг

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \qquad y_n), \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, \qquad y_n), \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \qquad , y_n) \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

системаси $(n+1)$ ўлчовли $Oxy_1, \qquad , y_n$ фазода йўналишлар майдонини аниқлайди. Унинг

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, C_1, \qquad C_n), \\ y_2 &= y_2(x, C_1, \qquad C_n), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad \cdot\ \cdot \\ y_n &= y_n(x, C_1, \qquad , C_n) \end{aligned}\right\} \qquad (Б)$$

ечими n та C_1,   , C_n параметрли эгри чизиқлар оиласи бўлиб, уларнинг ҳар бири ўз нуқтасида майдон аниқлайдиган йўналишга уринади.

Кўпгина физик масалаларда, хусусан, механикага доир бир қатор масалаларда дифференциал тенгламалар системасида эркли ўзгарувчи ролини t вақт бажаради. Бундай масалалар учун фақат юқорида келтирилган геометрик талқин (унда t вақт фазовий координаталардан бирининг ролини ўйнар эди) қулай бўлмасдан, бошқача, яъни масалага кирадиган ўзгарувчиларнинг турлича табиатларини тўсиб қўймасдан, балки, аксинча, таъкидланадиган ва тўла аниқланадиган талқини қулайдир.

Бу янги геометрик талқин билан танишишни қуйидаги мисолларни қарашдан бошлаймиз.

1-мисол. Қуйидаги

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \tag{37. 3}$$

гармоник осциляторнинг тенгламасини кўрайлик. Маълумки, унинг умумий ечими

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

$t = 0$ да берилган бошланғич шартлар $x \Big|_{t=0} = x_0$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$ кўринишда бўлсин. У ҳолда ихтиёрий ўзгармаслар учун $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0/k$. Бошланғич шартларнинг берилган системасини қаноатлантирадиган хусусий ечим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \tag{37. 4}$$

(37. 4) функция гармоник тебранаётган моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонунини ифодалайди. (37. 3) тенглама иккинчи тартибли, уни $v = \dfrac{dx}{dt}$ функция киритиб биринчи тартибли иккита дифференциал тенгламадан иборат нормал система кўринишига келтириш мумкин. У ҳолда бошланғич шартлари $x|_{t=0} = x_0$, $v\,|_{t=0} = v_0$ бўлган қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x' &= v, \\ v' &= -k^2x. \end{aligned}\right\} \tag{37.5}$$

Бошланғич шартлари берилган (37. 5) системанинг ечими

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cos kt + (v_0/k) \sin kt, \\ v &= -x_0k \sin kt + v_0 \cos kt \end{aligned}\right\} \tag{37. 6}$$

бўлади.

(37. 6) тебранаётган моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини ва тезликнинг ўзгариш қонунини ифодалайди.

Юқорида айтилганларга биноан (37. 6) ечим геометрик нуқтаи назардан уч ўлчовли $Otxv$ фазода эгри чизиқ билан тасвирланади. t нинг қиймати эгри чизиқда шундай нуқтани аниқлайдики, унинг координаталари мувозанат ҳолатидан x масофа қийматига ва моддий нуқтанинг берилган t моментидаги тезлиги v нинг қийматига мос келади.

Агар (37. 6) тенгламани уч ўлчовли $Otxv$ фазонинг t, x, v ўқларида эмас, балки t ни параметр деб ҳисоблаб, Oxv текисликнинг x, v ўқларида қарасак, ҳаракатга бошқача геометрик маъно бериш мумкин. Бу ҳолда (37. 6) система системадаги тенгламалардан t параметрни йўқотиб ҳосил қилиш мумкин бўлган эгри чизиқни аниқлайди. Шу мақсадда иккинчи тенгламанинг иккала қисмини k га бўламиз, сўнгра иккала тенгламани квадратга оширамиз ва қўшамиз, у ҳолда

$$x^2 + (v/k)^2 = x_0{}^2 + (v_0/k)^2$$

ёки $\rho^2{}_0 = x^2{}_0 + (v_0k)^2$ белгилаш киритиб ва тенгламанинг иккала қисмини ρ_0 га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2/\rho_0^2 + v^2/(k\rho_0)^2 = 1. \qquad (37.7)$$

Бу ерда $\rho_0 = \pm\sqrt{x_0^2 + (v_0/k)^2} > 0$, чунки бошланғич $x_0 = v_0 = 0$ шартларда ечим айнан ноль бўлиб қолар эди. (37.7) тенглама Oxv текисликда ярим ўқлари ρ_0 ва $k\rho_0$ бўлган каноник жойлашган эллипсни ифодалашини кўриш осон.

Oxv текислик (37.5) нормал система учун фазалар текислиги, фазалар текислигидаги (37.7) эгри чизиқ эса системанинг фазавий траекторияси дейилади. Равшанки, бу траектория фақат (37.5) дифференциал тенгламалар системаси билангина эмас, балки яна мос бошланғич шартлар билан ҳам аниқланади. Бошланғич шартларнинг ҳар бир мумкин бўлган системасига ўз фазавий траекторияси мос келади.

Мазкур мисолда (37.4) тенглама билан тавсифланадиган нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатига системанинг фазалар текислигидаги фазавий траектория, яъни (37.7) эллипс бўйича ҳаракат мос келади.

Фазалар текислигининг фазавий траекториялар билан тўлган қисми системанинг *фазавий портрети* дейилади. Бизнинг ҳолда фазавий портрет бутун текисликни тўлдиради, чунки бошланғич шартлар тегишлича танлаб олинганда фазалар текислигининг исталган нуқтаси орқали фазавий траектория —(37.7) эллипс ўтади.

Умуман (37.1) дифференциал тангламанинг нормал системаси учун фазалар текислиги деб, Oyz текислик олинади, фазавий траектория деб Oyz текисликнинг y, z ўқларига нисбатан келтирилган (37.2) ечим ҳисобланади, бу ечимда x аргумент параметр ролини ўйнайди, интеграллаш ўзгармаслари C_1 ва C_2 эса бошланғич шартлардан аниқланади. x параметрни (37.2) системадан йўқотиш фазавий траекториянинг одатдаги тенгламасига олиб келади.

Нормал системанинг ечимини фазалар текислигида траектория ёрдамида тасвирлаш ўнг томони аргументга ёки юқорида механикага доир масалаларда тилга олинганидек, t вақтга боғлиқ бўлмаган системалар учун айниқса муҳимдир.

2-мисол. Ана шу нуқтаи назардан ушбу сўнувчи тебранишлар тенгламасини қараб чиқамиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0, \tag{37.8}$$

унинг характеристик тенгламасининг $r_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$ илдизлари $n^2-k^2<0$ шартда, яъни $k^2-n^2=k_1^2$ бўлганда $r_{1,2}=-n\pm$ $\pm k_1 i$ бўлиб, тегишли умумий ечимни эса

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t) \tag{37.9}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин: $x|_{=0}=x_0$, $x'|_{t=0}=v_0$. У ҳолда (37.9) дан дарҳол $C_1=x_0$ келиб чиқади. C_2 ни топиш учун (37.9) ечимни дифференциаллаймиз:

$$x'=e^{-nt}[(-nC_1+k_1C_2)\cos k_1t+(C_1k_1-nC_2)\sin k_1t],$$

бу ердан $t=0$ да $v_0=-nC_1+k_1C_2$. Демак, $C_2=(v_0+nx_0)/k_1$ ва хусусий ечим

$$x=e^{-nt}\left(x_0\cos k_1t+\frac{v_0+nx_0}{k_1}\sin k_1t\right) \tag{37.10}$$

кўринишини олади.

Янги $v=x'$ функцияни киритсак, (37.8) тенглама ушбу нормал системага келади:

$$\left.\begin{aligned} x'&=v,\\ v'&=-2nv-k^2x,\end{aligned}\right\} \tag{37.11}$$

унинг ечими қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{-nt}\left(x_0\cos k_1t+\frac{v_0+nx_0}{k_1}\sin k_1t\right),\\ v&=e^{-nt}\left(v_0\cos k_1t-\frac{nv_0+(n^2+k_1^2)x_0}{k_1}\sin k_1t\right),\end{aligned}\right| \tag{37.12}$$

бу ердаги биринчи тенглама (37.10) билан бир хил, иккинчи тенглама эса биринчисини дифференциаллашдан ҳосил бўлади.

Олдинги мисолдагига ўхшаш, (37.11) системанинг фазавий траекторияси Oxv текисликнинг x, v ўқларига нисбатан ёзилган (37.12) тенгламалар системасидан иборат бўлади (бу ерда t параметр ролини ўйнайди). Бу ерда параметрни йўқотиш (37.6) системадагига қараганда анча мураккаб масаладир. Шунга қарамай (37.12) система аниқлайдиган фазавий траекторияларнинг характерини уларнинг ошкор тенгламаларини ҳосил қилиб ўтирмасдан ҳам аниқлаш мумкин.

Фазавий траекторияларнинг кўринишини аниқлашни енгиллаштириш учун дастлаб $v+nx$ ифодани тузамиз, бунинг учун (37.12) нинг биринчи тенгламасини n га кўпайтириб, иккинчи тенгламаси билан қўшамиз:

$$v+nx=e^{-nt}((v_0+nx_0)\cos k_1t-x_0k_1\sin k_1t),$$

бу тенгликни k_1 га бўлиб ва уни (37.12) нинг иккинчи тенгламаси ўрнига қўйиб, системани қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{-nt}\left(x_0\cos k_1t+\frac{v_0+nx_0}{k_1}\sin k_1t\right),\\ \frac{v_0+nx}{k_1}&=e^{-nt}\left(\frac{v_0+nx_0}{k_1}\cos k_1t-x_0\sin k_1t\right). \end{aligned}\right\} \qquad (37.13)$$

(37.13) нинг иккала тенгламасини квадратга ошириб, уларни қўшамиз:

$$x^2+\left(\frac{v+nx}{k_1}\right)^2=e^{-2nt}\left[x_0^2+\left(\frac{v_0+nx_0}{k_1}\right)^2\right]$$

ёки $x_0^2+(v_0+nx_0)^2/k_1=\rho^2$ белгилаш киритсак,

$$x^2+\left(\frac{v+nx}{k_2}\right)^2=\rho^2e^{-2nt} \qquad (37.14)$$

ни ҳосил қиламиз, шу билан бирга $\rho\neq0$ эканлиги равшан, чунки бошланғич шартлар соф ноль шартлардан фарқли.

(37.14) тенгламадан фазавий траекториянинг тенгламасини ҳосил қилиш учун фойдаланиш мумкин. Бунинг учун (37.14) дан t нинг қийматини топиш ва бу қийматни (37.12) ёки (37.13) тенгламаларнинг бирига қўйиш кифоя. Бироқ, олдиндан маълумки, ҳосил қилинадиган ифода ҳаддан ташқари узун бўлади, бинобарин, бошқача йўл тутганимиз маъқул.

(37.14) тенгламани

$$\frac{x^2}{(\rho e^{-nt})^2}+\frac{(v+nx)^2}{(k_1\rho e^{-nt})^2}=1$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенглама эллипс тенгламасини эслатади. Агар махражлар ўзгармас $\rho e^{-nt}=A$, $k_1\rho e^{-nt}=B$ бўлганда эди, у ҳолда тенгламани

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{(v+nx)^2}{B^2}=1$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлар эди, бу координата ўқларига нисбатан бурилган эллипсни ифодалайди, чунки қўшилувчида v ўрнига $v+nx$ турибди. Бироқ, аслида юқоридаги ифодадан кўринишича A ва B махражлар вақтга боғлиқ. Шунинг учун фазалар текислигида $B/A=k$ бўлган бундай эллипсларни чизадиган бўлсак, фазавий траектория бўйича ҳаракатланаётган нуқта бир эллипсдан иккинчисига ўтгандай бўлади ва спираль (эллиптик — логарифмик спираль) бўйича марказ томон ҳаракатланади. Масаланинг физик маъносига кўра, $n > 0$, шу сабабли $e^{-nt} \to 0$, эллипсларнииг ярим ўқлари камаяди ва фазавий траектория бўйича ҳаракат марказ томон спираль бўйлаб (мувозанат ҳолати) бўлади. Аксинча бўлганда, эллипснинг ярим ўқлари катталашади ва фазавий траектория бўйича ҳаракат марказдан бошқа томонга қараб бўлади.

Шу пайтга қадар икки номаълумли иккита тенглама системасини қараш билан чекланган эдик. Киритилган тушунчалар функциялар сони катта бўлган ҳол учун ҳам ўз кучини сақлайди, (А) кўринишдаги ўнг томони x аргументга боғлиқ бўлмаган системалар (механикада t вақтга боғлиқ бўлмаган, бундай системалар автоном системалар дейилади) учун ечимга геометрик маъно беришда $n+1$ ўлчовли Oxy_1, , y_n фазода фақат интеграл эгри чизиқларни эмас, балки n ўлчовли бўлган Oy_1, , y_n фазалар фазосида фазавий траекторияларни ҳам қуриш мумкин. Фазавий траекториялар тенгламаларини ҳосил қилиш учун (Б) ечимни уларнинг параметрик берилиши деб қараш керак, бу ерда x аргумент (t вақт) параметр ролини ўйнайди.

Чизиқли бўлмаган системалар учун, ва умуман, системанинг аниқ ечимини чекли кўринишда ҳосил қилиб бўлмаган ҳамма ҳолларда фазавий портретларни ўрганиш айниқса муҳимдир. Фазавий портретни таҳлил қилиш берилган система тавсифлайдиган ҳаракат характерини, унинг барқарорлигини (турғунлигини) ва бир қатор махсус масалаларни ҳар томонлама аниқлашга имкон беради. Мисол тариқасида «йиртқич—ўлжа» масаласини келтирамиз.

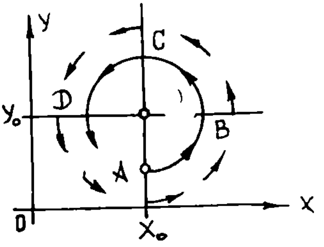
Икки тур—йиртқич ва унинг ўлжаси курашини тавсифловчи энг содда модель қуйидагидан иборат. Икки тур балиқ — товонбалиқ ва чўртанбалиқ яшайдиган ҳавзани қарайлик. Агар чўртанбалиқлар бўлмаганида эди, товонбалиқлар ўзларининг сони x га пропорционал бўлган $\dot{x} = kx$ тезлик билан экспоненциал қонун бўйича кўпайган бўлар эди (биз товонбалиқлар жами массаси ҳавзадаги сув массасидан жуда ҳам кичик деб ҳисоблаймиз). Агар чўртанбалиқлар сони y бўлса, у ҳолда чўртанбалиқлар еб қўйган товонбалиқлар сонини ҳисобга олиш лозим. Биз товонбалиқлар ва чўртанбалиқларнинг бирбирига дуч келиш сони товонбалиқлар сонига ҳам, чўртанбалиқлар сонига ҳам пропорционал деб ҳисоблаймиз, у ҳолда товонбалиқлар сонининг ўзгариш тезлиги учун $\dot{x}' = kx - axy$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Товонбалиқлар бўлмаганида, чўртанбалиқлар қирилиб кетар эди: $\dot{y} = -ly$, товонбалиқлар бўлганда эса чўртанбалиқлар ўзлари еган товонбалиқлар сонига пропорционал тезлик билан кўпаяди: $\dot{y} = -$ $- ly + bxy$.

Шундай қилиб, биз йиртқич ва унинг ўлжаси системаси энг содда моделининг дифференциал тенгламалари системасига келдик.

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ y = -ly + bxy. \end{cases}$$

Бу модель *Лотка—Вольтерр модели* деб аталади. Системанинг ўнг қисми текисликда вектор майдонни аниқлайди. (x, y) нуқтага қўйилган вектор $(kx - axy, \ -ly + bxy)$ компоненталарга эга. Бу фазавий тезлик майдонидир: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ бурчак эса фазавий фазодир.



58- шакл

Фазавий тезликнинг вектор майдони компоненталарининг ўзгаришини кузатиб чизиш осон. Буни 58- шаклда келтирилган йиртқич ва унинг ўлжаси моделининг фазавий тезлик майдони мисолида кўриб чиқайлик. Майдоннинг махсус нуқтаси $(x_0 = l/b, \ y_0 = k/a)$ товонбалиқлар ва чўртанбалиқларнинг мувозанат сонига мос келади, бунда товонбалиқларнинг кўпайиши чўртанбалиқлар фаолияти билан, чўртанбалиқларнинг кўпайиши эса уларнинг табиий ўлими билан мувозанатлашади. Агар чўртанбалиқларнинг бошланғич сони y_0 дан кичик бўлса (шаклдаги A нуқта), у ҳолда товонбалиқлар ва чўртанбалиқлар сонлари, токи кўпайиб кетган чўртанбалиқлар товонбалиқларни уларнинг кўпайиши сонидан ортиқ еб қўя бошлагунча ўса боради (B нуқта), сўнгра товонбалиқлар сони камая боради, чўртанбалиқлар сони эса токи озиқ етишмаслиги чўртанбалиқларнинг қирилишига олиб келмагунча, ўса боради (C нуқта); энди чўртанбалиқлар сони шунчалик камаядики, товонбалиқлар яна кўпая бошлайди (D нуқта); товонбалиқларнинг кўпайиши эса маълум вақтга келиб чўртанбалиқларнинг кўпайишига олиб келади.

Шундай қилиб, товонбалиқ ва чўртанбалиқ сонларининг уларнинг мувозанат сонлари яқинида тебранишлари содир бўлади. Энди бу тебранишлар даврийми ёки нодаврийми деган савол тугилади. Фазавий тезлик майдонининг биз чизган манзараси бу саволга жавоб бериш имконини бермайди.

Бу масалани ҳал қилишда Пуанкаре акслантиришлари ва Ламерей диаграммалари қўлланилади.

38-§. Турғунлик назарияси элементлари. Ляпунов теоремалари

38.1. Бирор физик жараён ҳаракат дифференциал тенгламаларининг берилган кучлар ва бошланғич шартларга мос ечимини аниқлайлик. Баъзи амалий муҳим масалаларнинг ечимларини топишда берилган бошланғич шартлар бир оз ўзгариши мумкин бўлган ҳолларни ҳам қарашга тўғри келади. Масалан, снаряд, ракета ёки самолётнинг бошланғич тезлиги ҳар доим ҳам ҳисобланган бошланғич тезлик билан устма-уст тушавермайди. Ундан ташқари ҳаракатни содир қилган кучлардан ташқари кўзда тутилмаган оний ёки вақтинча таъсир қиладиган кучларни эътиборга олиш лозим бўлган ҳоллар ҳам учрайди. Масалан, самолёт учаётганда ҳавонинг зичлиги ўзғариши натижасида қаршилик кучи ўзгариши ёки бошқа қўшимча кучлар таъсир этиши мумкин.

Шу сабабли кўпгина масалаларда берилган бошланғич шартларга жавоб берадиган битта тайин ечимни билибгина қолмай, балки унинг бошланғич шартлар ва аргумент ўзгаргандаги характерини билиш муҳимдир. Бу масалалар билан дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси шуғулланади. Унинг асосий бўлимларидан бири ечимнинг турғунлиги назарияси ёки ҳаракатнинг турғунлик назарияси ҳисобланади.

Бирор ҳодиса бошланғич шартлари

$$y_i(t_0) = y_{i0} \quad (i = 1,\ 2, \qquad n) \tag{38.1}$$

дан иборат ушбу

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t,\ y_1,\ y_2, \qquad y_n)\ (i = 1,\ 2. \qquad n) \tag{38.2}$$

дифференциал тенгламалар системаси билан тавсифланаётган бўлсин.

(38.1) шартлар одатда ўлчашлар натижаси бўлиб, бинобарин, маълум аниқликда олинган бўлади.

Агар бошланғич маълумотларнинг ҳар қандай кичик ўзгаришлари ечимни анчайин ўзгартира олса, у ҳолда (38.2) системанинг биз танлаб олган аниқ бўлмаган бошланғич маълумотлар аниқлайдиган ечимлари ҳеч қандай қийматга эга бўлмайди ва ҳатто ҳодисани тақрибан бўлса-да тавсифлай олмайди.

Шунинг учун (38.1) шартларнинг жуда кичик ўзгариши (38.2) система ечимини ҳам кичик ўзгаришларга олиб келадиган шартларни билиш муҳимдир.

Агар t етарлича кичик чекли $|t_0 - t| \leqslant T$ оралиқда ўзгарса, бу саволга қуйидаги мавжудлик ва ягоналик теоремаси асосида жавоб топиш мумкин, уни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. (Ечимнинг бошланғич шартларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақида.) *Агар*

$$\frac{dy}{dt} = f(t,\ y) \tag{38.3}$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томони узлуксиз ва $D = \{t_0 - a \leqslant t \leqslant t_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$ тўғри тўртбурчакда y ўзгарувчи бўйича *чекли* ($|f'_y| \leqslant N$) *хусусий ҳосилага эга бўлса,* (38.3) *тенгламанинг* $y(t_0) = y_0$ *бошланғич шартни қаноатлантирувчи* $y(t) = y(t,\ t_0,\ y_0)$ *ечими бошланғич маълумотларга узлуксиз боғлиқ бўлади.* Аниқроғи, *ҳар қандай* $\varepsilon > 0$ *учун шундай* $\delta > 0$ *топиладики,* $|y_0 - \overline{y}_0| < \delta$ *бўлса,*

$$|t_0 - t| < T,\ T < T_0,\ T_0 = \min\left\{a,\ \frac{1}{N},\ \frac{b}{N}\right\},$$

$$M = \max_{(t,\ y) \in D} |f(t,\ y)|$$

бўлганда $|y(t,\ t_0,\ y_0) - y(t,\ t_0,\ \overline{y}_0)| < \varepsilon$ *бўлади.*

Бу теорема (38.2) система учун ҳам ўринлидир. Теореманинг барча шартлари бажарилса, масала *тўғри қўйилган* (коррект) дейилади.

Биз ечимнинг турғунлигини t нинг етарлича кичик қийматлари оралиғида текширамиз.

Агар $t \in [t_0,\ \infty)$ аргумент исталган қийматларни қабул қила олса, ечимнинг бошланғич маълумотларга боғлиқлиги масаласи билан турғунлик назарияси шуғулланади.

Таъриф. Айтайлик, $\varphi(t) = \{\varphi_1(t),\qquad ,\ \varphi_n(t)\}$ — (38.2) системанинг ечими бўлсин. Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шу системанинг бошланғич шартлари бўлган

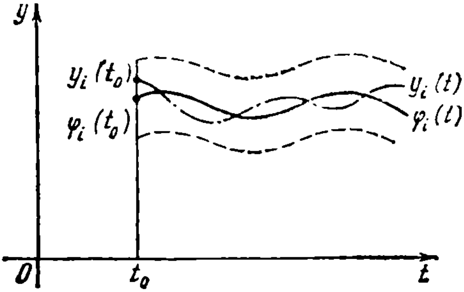
$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta \tag{38.4}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай $\delta > 0$ мавжуд бўлсаки,

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \forall\, t \in [t_0,\ \infty) \tag{38.5}$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, $\varphi(t)$ ечим *Ляпунов бўйича турғун* дейилади.

Шундай қилиб, $\varphi(t)$ ечимга бошланғич шартлар бўйича аниқ ечимлар барча $t \geqslant t_0$ лар учун ҳам яқин бўлса, $\varphi(t)$ ечим Ляпунов бўйича турғун бўлади (59-шакл).



59- шакл

Агар $\varphi(t)$ ечим Ляпунов бўйича турғун бўлса ва бундан ташқари

$$\lim_{t \to \infty} |y(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1,\ 2,\qquad n) \tag{38.6}$$

бўлса, *у асимптотик турғун* дейилади.

(38.6) дан Ляпунов бўйича турғунлик келиб чиқмаслигини қайд этиб ўтамиз.

1-мисол. $\frac{dy}{dx} = -y,\ y(x_0) = y_0$. Ечимнинг асимптотик турғунлигини текширинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг умумий ечими: $y = Ce^{-x}$. Бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим ушбу кўринишга эга:

$$y = y_0\, e^{x_0 - x}.$$

Агар бошқа $\overline{y}(x_0) = \overline{y}_0$ бошланғич шарт киритадиган бўлсак, ечим қуйидагича бўлади:

$$\bar{y} = \bar{y}_0 \, e^{x_0 - x}$$

Бу ердан, $x \geqslant x_0$ да

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \, e^{x_0 - x} \leqslant |y - \bar{y}_0|.$$

Шунинг учун, агар $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta = \varepsilon$ бўлса, у ҳолда $|y - \bar{y}| \leqslant \varepsilon$, яъни $x \geqslant x_0$ да $y = y_0 \, e^{x_0 - x}$ ечим Ляпунов бўйича турғун. Бу ечим асимптотик турғун ҳамдир, чунки

$$\lim_{x \to +\infty} |y - \bar{y}| = \lim_{x \to +\infty} |y_0 - \bar{y}_0| \, e^{x_0 - x} = 0.$$

2-мисол. $y' = y$ тенглама ечимининг турғунлигини текширинг.

Ечиш. Исталган x_0 да $x \geqslant x_0$ учун $|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \, e^{x - x_0}$ эканини кўрсатиш мумкин.

$x \geqslant x_0$ бўлганда, x_0 қандай бўлмасин, у ечим турғун эмас, чунки $x \to +\infty$ да $e^{x - x_0} \to +\infty$.

(38.2) системанинг исталган $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \qquad \varphi_n(t)\}$ ечимини Ляпунов бўйича турғунликка текширишни бирорта бошқа системанинг айнан нолга тенг (тривиал) ечимини турғунликка текширишга келтириш мумкин. Бунинг учун янги номаълум функцияларга ўтиш керак:

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \qquad n). \tag{38.7}$$

Бу ердан

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Натижада (38.2) система қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1 + \varphi_1(t), \qquad, x_n + \varphi_n(t)] - f_i[t, \varphi_1(t), \qquad \varphi_n(t)] \quad (t = 1, 2, \qquad n) \tag{38.8}$$

Бу система ушбу тривиал ечимга эга:

$$x_i(t) \equiv 0 \quad (t = 1, 2, \quad, n). \tag{38.9}$$

Айтилганлардан қуйидаги теоремага келамиз.

2-теорема. (38.8) *системанинг тривиал ечими (осойишталик нуқтаси) Ляпунов бўйича турғун (асимптотик турғун) бўлганда ва фақат шундагина* (38.2) *системанинг* $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \qquad, \varphi_n(t)\}$ *ечими Ляпунов бўйича турғун (асимптотик турғун) бўлади.*

Бу ечим шундай хоссага эга: $(x_1(t), \qquad, x_n(t))$ нуқта аслида t ўзгариши билан ҳаракат қилмай, бир жойда туради. Бу ҳолда (38.9) ечим ва $(0; \qquad, 0)$ нуқта (38.2) нуқтанинг мувозанатлик ҳолати ёки *осойишталик нуқтаси* дейилади.

Осойишталик нуқтаси $x_i = 0 \, (i = 1, 2, \qquad n)$ га нисбатан турғунлик шартларини бундай ифодалаш мумкин: агар $\forall \, \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ ни топиш мумкин бўлсаки, унинг учун $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)(i = 1, 2, \quad , n)$ тенгсизликдан $|x_i(t)| < \varepsilon$ $(i=1, 2, \quad , n, \forall\ t \geqslant t_0)$ келиб чиқса, $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \quad n)$ осойишталик нуқтаси Ляпунов бўйича турғундир, яъни бошланғич нуқтаси координаталар бошининг бирор δ атрофида бўлган траектория $t \geqslant t_0$ да координаталар бошининг исталган ε-атрофидан ташқарига чиқмайди. Биз бу ерда тўғри тўртбурчак атрофлар тўғрисида сўз юритаяпмиз, бироқ сферик атрофларга ҳам ўтиш мумкин, бу айниқса, $\vec{x}(t) = \{x_1(t), \quad x_n(t)\}$ ечимнинг вектор шаклидаги ёзуви учун қулайдир:

$$\|\vec{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\vec{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad (t \geqslant t_0).$$

1-изоҳ. Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар системаси

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11} y_1 + \qquad + a_{1n} y_n + f_1(t) \\ &\qquad\qquad\qquad . \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1} y_1 + \qquad + a_{nn} y_n + f_n(t) \end{aligned}\right\} \tag{38.10}$$

нинг ихтиёрий хусусий ечими $y_0(t)$ бу системага мос бир жинсли

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 + \qquad + a_{1n} x_n \\ &\qquad\qquad\qquad . \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} x_1 + \qquad + a_{nn} x_n \end{aligned}\right\} \tag{38.11}$$

системанинг осойишталик нуқтаси Ляпунов бўйича турғун (асимптотик турғун) бўлганда ва фақат шунда Ляпунов бўйича турғун (асимптотик тургун) бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (38.10) система (38.2) системанинг хусусий ҳолидир, (38.11) эса (38.8) системанинг хусусий ҳолидир. Бу ерда озод ҳадлар йўқ, чунки $f(t)$ функция фақат t га боғлиқ бўлиб, бошланғич функцияларга боғлиқ эмас.

3-теорема (Ляпунов). *Тривиал* $y_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \quad , n)$ *ечимга эга*

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \quad , y_n) \quad (i = 1, 2, \quad , n) \tag{38.2}$$

система берилган бўлсин.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи дифференциалланувчи $v(y_1, \quad , y_n)$ *функция мавжуд бўлсин:*

1) $v(y_1, \quad , y_n) \geqslant 0$ *ва* $v = 0$, *фақат* $y_1 = \quad = y_n = 0$ *бўлгандагина ўринли, яъни* v *функция координаталар бошида қатъий минимумга эга;*

2) *v функциянинг фазавий траектория бўйлаб (яъни* (38.1) *система ечими $y_i(t)$ бўйлаб) тўлиқ дифференциали*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t_1, y_1, \qquad y_n) \leqslant 0, \cdot \; t \geqslant t_0 \text{ да}$$

бўлсин.

У ҳолда $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \qquad n$) осойишталик нуқтаси Ляпунов бўйича турғун бўлади. Агар қўшимча равишда координаталар бошининг жуда кичик атрофида ($y_1^2 + \qquad + y_n^2 \geqslant \delta$)

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0 \quad (t \geqslant t_0)$$

(бу ерда β — ўзгармас катталик) бўлсин деб талаб қўйилса, $y_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \qquad n$) осойишталик нуқтаси асимптотик турғун бўлади.

v функция *Ляпунов функцияси* дейилади.

3-мисол. Ушбу

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1^5 - y_2;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2^3$$

система ечимининг турғунлигини текширинг.

Ечиш. Кўриш осонки, $y_1 = y_2 \equiv 0$ осойишталик нуқтаси берилган системанинг ечимидир. Унинг турғунлигини аниқлаймиз.

$v(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ функцияни қараймиз. У теореманинг барча шартларини қаноатлантиради:

1) $v(y_1, y_2) \geqslant 0$ ва $v = 0$, фақат $y_1 = y_2 = 0$ бўлганда.

2) Фазавий траектория бўйлаб:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} = 2y_1(y_1{}^5 - y_2) + 2y_2(y_1 - y_2^3) =$$

$$= -2(y_1^6 + y_2^4) \leqslant 0.$$

Бундан ташқари, координаталар бошининг атрофидан ташқарида ($y_1^2 + y_2^3 \geqslant \delta > 0$ да)

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$$

бу ерда β катталик $2(y_1^6 + y_2^4)$ функциянинг $y^2{}_1 + y_2^2 = \delta$ доирадан ташқаридаги минимуми).

Демак, $y_1 = y_2 \equiv 0$ ечим асимптотик турғун.

2-изоҳ. Ляпунов функциясини $y_1, \qquad y_n$ аргументларнинг квадратик формаси шаклида, яъни

$$v = \sum_{i,j} [a_{ij} y_i y_j$$

кўринишда излаш керак.

Биринчи талаб v функция мусбат аниқланган квадратик форма бўлишини ифодалайди, яъни

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

38.2. Осойишталик нуқталарининг турлари. Биринчи тартибли ўзгармас коэффициентли иккита чизиқли тенглама системаси

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{21}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{38.12}$$

ни турғунликка текширишни Ляпунов теоремаси асосида олиб бориш мумкин. Бироқ, (38.12) системани ечиш унча қийин бўлмагани учун уни турғунликка бевосита текшириш ҳам мумкин.

Система детерминантини

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{38.13}$$

деб фараз қиламиз.

$y(t) = x(t) \equiv 0$ — (38.12) системанинг бошланғич шартлари ноль бўлган ечими эканини кўриш осон.

Умумий ечимни топиш учун

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0] \tag{38.14}$$

характеристик тенгламанинг умумий ечимларини топишимиз керак.

$\Delta \neq 0$ шартдан $\lambda = 0$ (38.14) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаслиги келиб чиқади.

1. *Характеристик тенгламанинг илдизлари λ_1 ва λ_2 ҳақиқий ва ҳар хил бўлсин.*

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ лар (38.12) тенглама матрицасининг мос ҳолда λ_1 ва λ_2 илдизларга тегишли хос векторлари бўлсин, яъни

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_1)\alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_2)\beta_1 + a_{12}\beta_2 &= 0 \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - \lambda_2)\beta_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{38.15}$$

У ҳолда, маълумки, (38.12) системанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t} \\ y &= C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}\right\} \tag{38.16}$$

бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ бўлса, (38.16) дан кўринишича $x = y \equiv 0$ осойишталик нуқтаси асимптотик турғундир.

Ҳақиқатан ҳам, масалан, $t_0 = 0$ деб олсак, вақтнинг t_0 пайтида (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи (38.16) ечим C_1 ва C_2 ўзгармаслар орқали аниқланади. Уларнинг қийматлари

$$x_0 = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1,$$
$$y_0 = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2,$$

тенгламалардан топилади, бу ерда $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Бироқ, у ҳолда

$$C_1 = Ax_0 + By_0, \quad C_2 = Dx_0 + Ey_0,$$

A, B, C, D, E — ўзгармаслар. Демак,

$$|x(t)| \leqslant |Ax_0 + By_0| |\alpha_1| + |Dx_0 + Ey_0| |\beta_1|,$$
$$|y(t)| \leqslant |Ax_0 + By_0| |\alpha_2| + |Dx_0 + Ey_0| |\beta_2|,$$

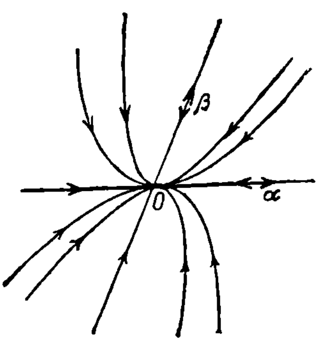
чунки $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ бўлганда $|e^{\lambda_1 t}| \leqslant 1$, $|e^{\lambda_2 t}| \leqslant 1$. Бу ердан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, унинг учун $|x_0|$, $|y_0| < \delta$ бўлганда $|x(t)|$, $|y(t)| < \varepsilon$ $(t > 0)$ тенгсизлик бажарилиши келиб чиқади, яъни (0, 0) нуқта Ляпунов бўйича турғундир. Бундан ташқари $e^{\lambda t} \to 0$ $(t \to +\infty)$ бўлгани учун (38.16) дан (0,0) нуқта асимптотик турғун эканлиги ҳам келиб чиқади.

Агар (38.16) системадан t аргументни чиқариб ташласак, ҳосил бўлган $y = \varphi(x)$ функция xOy системадаги ҳаракат траекториясини беради.

Вақтнинг $t = t_0$ бошланғич пайтида координаталар бошининг δ-атрофида етарлича катта t да координаталар бошининг ε-атрофида ётувчи нуқтасига ўтади ва $t \to +\infty$ да координаталар бошига интилади.

Бундай осойишталик нуқтаси *турғун тугун нуқтаси* дейилади (60-шакл).

60-шаклда мазкур ҳолга мос келувчи траекторияларнинг жойлашиши тасвирланган. → белгилар орқали нуқтанинг $t \to +\infty$ даги траекториялар бўйича ҳаракат йўналиши кўрсатилган. Биттасидан ташқари барча траекториялар (0.0) нуқтада умумий уринмага эга. Агар $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ деб олинса, уринманинг бурчак коэффициенти α_2/α_1 га тенг бўлади.



60- шакл

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{21}\,(C_1\,\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\,\beta_1 e^{\lambda_2 t})+a_{22}\,(C_1\,\alpha_2 e^{\lambda_1 t}+C_2\,\beta_2\,e^{\lambda_2 t}}{a_{11}\,(C_1\,\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\,\beta_1 e^{\lambda_2 t})+a_{12}\,(C_1\,\alpha_2 e^{\lambda_1 t}+C_2\,\beta_2 e^{\lambda_2 t})}=$$

$$=\frac{a_{21}\,(C_1\,\alpha_1+C_2\,\beta_1\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)\,t}+a_{22}\,(C_1\,\alpha_2+C_2\,\beta_2\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)\,t}}{a_{11}\,(C_1\,\alpha_1+C_2\,\beta_1\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+a_{12}\,(C_1\,\alpha_2+C_2\,\beta_2\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}\to$$

$$\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{a_{21}C_1\,\alpha_1+a_{22}C_1\,\alpha_2}{a_{11}C_1\,\alpha_1+a_{12}C_1\,\alpha_2}=\frac{a_{21}\,\alpha_1+a_{22}\,\alpha_2}{a_{11}\,\alpha_1+a_{12}\,\alpha_2}=\frac{\lambda_1\alpha_2}{\lambda_1\alpha_1}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

бу ерда $\alpha_1\neq0$, чунки

$$a_{22}\,\alpha_1+a_{22}\,\alpha_2=\lambda\alpha_2,\quad a_{11}\,\alpha_1+a_{12}\,\alpha_2=\lambda_1\alpha_1.$$

Агар $\alpha_1=0$ бўлса, худди юқоридагига ўхшаш мулоҳаза юритиб, $\frac{dx}{dy}\to\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=0\,(\lambda_1\neq0)$ ни ҳосил қиламиз.

Агар $C_1=0$ бўлса, (38.16) дан битта

$$y=\frac{\beta_2}{\beta_1}x$$

траекторияни ҳосил қиламиз. Бу траекторияга уринма β_2/β_1 бурчак коэффициентига эга бўлади.

Шундай қилиб, $C_1\neq0$ бўлган траекторияларга уринмалар абсолют қиймати бўйича энг кичик λ_1 хос сонга мос келувчи $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2)$ хос векторга параллелдир ($\alpha_1=0$ бўлганда вектор y ўқ бўйича йўналган).

Бундан ташқари, ($C_1=0$ да) яна битта траектория мавжуд, чунончи у $y=\frac{\beta_2}{\beta_1}x$ тўғри чизиқ бўлиб, модули бўйича катта бўлган λ_2 хос сонга мос $\vec{\beta}=(\beta_1,\ \beta_2)$ хос векторга параллелдир.

Агар энди $\lambda_1>0$ ва $\lambda_2>0$ бўлса, (38.16) дан кўринишича $x=y\equiv0$ осойишталик нуқтаси турғун эмас, чунки $t\to+\infty$ да $e^{\lambda_i t}\to+\infty$. Бундай осойишталик нуқтаси *турғун бўлмаган тугун нуқтаси* дейилади. Бу ҳол аввалги ҳолдан t ни $(-t)$ га алмаштириш орқали ҳосил қилинади. Шунинг учун траектория олдинги кўринишга эга бўлади, бироқ нуқтанинг траектория бўйича ҳаракати қарама-қарши йўналишда бўлади (61-шакл).

Ниҳоят, агар $\lambda_1<0$ ва $\lambda_2>0$ (ёки аксинча $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$) бўлса, осойишталик нуқтаси бу гал ҳам турғун бўлмайди, чунки $t\to+\infty$ да $e^{\lambda_2 t}\to+\infty$. Координаталар бошининг δ-атрофида жойлашган нуқталар

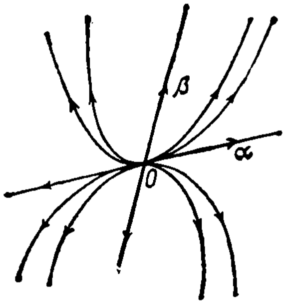
$$x=C_2\,\beta_1\,e^{\lambda_2 t},\quad y=C_2\,\beta_2\,e^{\lambda_2 t}$$

траектория бўйича чексизликка кетади. Мазкур ҳолда шундай бир траектория мавжудки, нуқтанинг у бўйича ҳаракати $t\to+\infty$ да координаталар боши томон йўналган бўлишини қайд қилиб ўтамиз:

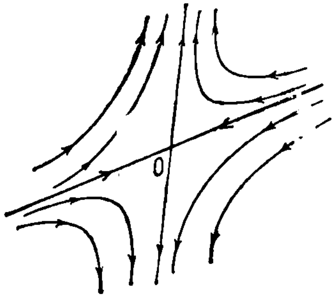
$$x=C_2\,\alpha_1\,e^{\lambda_1 t},\quad y=C_2\,\alpha_2\,e^{\lambda_1 t}$$

Бу траектория $\alpha_1\,y-\alpha_2\,x=0$ тўғри чизиқдан иборат. Бундай кўринишдаги осойишталик нуқтаси *эгар* дейилади (62-шакл).

2. λ_1 *ва* λ_2 *илдизлар комплекс бўлсин* (a_{kl} — ҳақиқий):



61- шакл



62- шакл

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq \quad (q \neq 0).$$

(38.2) системанинг умумий ечимини (38.16) кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\vec{\alpha}$ ва $\vec{\beta} = \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ векторларнинг координаталари энди комплекс бўлади.

Бу ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари ҳам системанинг ечими бўлади. Шунинг учун (38.12) системанинг умумий ечимини бу ечимларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt}(a \cos qt + b \sin qt), \end{aligned}\right\} \qquad (38.17)$$

бу ерда C_1 ва C_2—ихтиёрий ўзгармаслар, a ва b — бу ўзгармасларнинг қандайдир чизиқли комбинациялари:

$$a = kC_1 + lC_2, \quad b = mC_1 + nC_2.$$

Айтилганларни мисол ёрдамида тушунтирамиз.

4-мисол. Ушбу системанинг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Ечиш. Характеристик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2 + 1 = 0.$$

Унинг илдизлари: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

$\vec{\alpha}$ ва $\vec{\beta}$ векторларнинг координаталарини

$$(1 - i)\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad (1 + i)\beta_1 - \beta_2 = 0$$

тенгликлардан топамиз, яъни $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1 - i$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 + i$ деб олиш мумкин.

У ҳолда

$$x = \alpha_1 e^{it} = \cos t + i \sin t,$$
$$y = \alpha_2 e^{it} = (1 - i)(\cos t + i \sin t) = (\cos t + \sin t) + i (\sin t - \cos t) -$$

системанинг ечими бўлади.

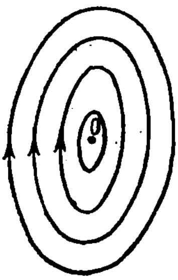
Бу ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари ҳам системанинг ечимлари бўлади, шу билан бирга улар чизиқли эркли бўлади. Шунинг учун уларнинг чизиқли комбинацияси системамизнинг умумий ечимини беради:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$
$$y = C_1 (\cos t + \sin t) + C_2 (\sin t - \cos t) =$$
$$= (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t.$$

Шундай қилиб, мазкур ҳолда:

$$a = C_1 - C_2, \quad b = C_1 + C_2.$$

$p = 0$ да (38.17) траекториялар турли C_1, C_2 лар учун қавслардаги кўпайтувчиларнинг даврийлиги сабабли ёпиқ эгри чизиқлар—маркази (0, 0) нуқтада бўлган эллипслардан иборат бўлади (63-шакл). Бу нуқта *марказ* деб аталади. $p=0$ да асимптотик турғунлик йўқ — $(x(t), y(t))$ нуқта кўрсатилган оила эллипсларининг бири бўйича уни чексиз сон марта айланиб ҳаракатланади. У $t \to +\infty$ да ҳеч қандай лимитга интилмаслиги равшан. Иккинчи томондан, $p = 0$ да (0, 0) осойишталик нуқтаси Ляпунов бўйича турғундир. Бу тасдиқни юқорида қаралган 4-мисол ёрдамида текширамиз. Бу мисолда системанинг $t_0 = 0$ пайтда (x_0, y_0) нуқта орқали ўтувчи ечимини топамиз. Равшанки,



63- шакл

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_1 - C_2,$$

демак, $C_1 = x_0$, $C_2 = x - y_0$ ва ечим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x(t) = x_0 \cos t + (x_0 - y_0) \sin t,$$
$$y(t) = y_0 \cos t + (2 x_0 - y_0) \sin t.$$

Сўнгра қуйидагига эгамиз:

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + |x_0| + |y_0| = 2|x_0| + |y_0|,$$
$$|y(t)| \leqslant |y_0| + 2|x_0| + |y_0| = 2|x_0| + 2|y_0|.$$

$\varepsilon > 0$ оламиз ва $\delta = \varepsilon/4$ бўлсин. У ҳолда, равшанки, агар $|x_0|$, $|y_0| < \delta$ бўлса, у ҳолда барча t лар учун:

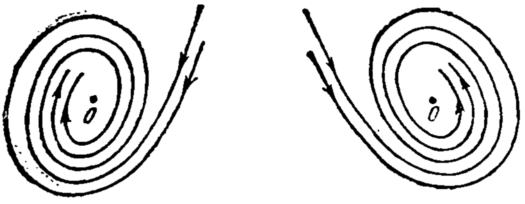
$$|x(t)| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

$$|y(t)| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Осойишталик нуқтасининг Ляпунов бўйича турғунлигини исбот қилдик.

(38.17) дан кўриниб турибдики, $p<0$ бўлганда (x, y) нуқта $t\to+\infty$ да *турғун фокус* деб аталувчи $x=0$, $y=0$ ноль нуқтага интилади. $e^{p(t)}\to 0$ $(t\to+\infty)$ кўпайтувчининг иштироки ёпиқ эгри чизиқларни $t\to+\infty$ да координаталар бошига асимптотик яқинлашувчи спиралларга айлантиради (64-шакл).

$t=t_0$ да координаталар бошининг ихтиёрий δ атрофида жойлашган нуқталар етарлича катта t ларда (0, 0) нуқтанинг берилган ε-атрофига тушадилар.



64- шакл

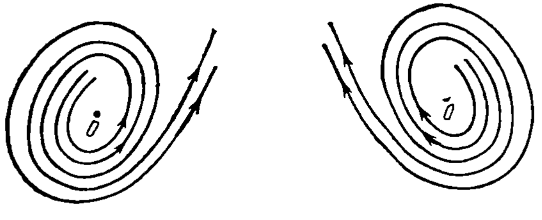
Фокусга интилувчи траекториялар уларга ўтказилган уринмалар $t\to+\infty$ да ҳеч қандай лимитга интилмасликлари каби хоссага эгадирлар. Фокус тугундан шуниси билан фарқланади.

$p<0$ бўлган ҳолда $x=y=0$ нуқта асимптотик турғун.

Агар λ_1 ва λ_2 илдизларнинг ҳақиқий қисми p мусбат бўлса, бу ҳол t ни $(-t)$ га алмаштиришда олдинги ҳолга ўтади. Бинобарин, траекториялар 64-шаклдаги кўринишларини сақлаб қоладилар, фақат нуқта ҳаракати қарама-қарши йўналишда бўлади.

$t\to+\infty$ да $e^{p(t)}\to+\infty$ бўлгани сабабли вақтнинг бошланғич пайтида координаталар бошининг атрофида жойлашган нуқталар кейинчалик чексизликка кетади. Бундай нуқта *турғун фокус* номи билан юритилади (65-шакл).

3. λ_1, λ_2 *илдизлар бир-бирига тенг бўлсин* ($\lambda_1=\lambda_2$, a_{kl} — ҳақиқий!) У ҳолда улар ҳақиқий бўлиб, (38.2) системанинг умумий ечими



65- шакл

$$\left.\begin{aligned} x&=(A+Bt)e^{\lambda_1 t}\\ y&=(C+Dt)e^{\lambda_1 t}\end{aligned}\right\}\tag{38.18}$$

кўринишда бўлади, бу ерда A, B, C, D лар ўзгармаслар бўлиб, улар ўзаро иккита чизиқли тенглама ёрдамида боғланган. Бу тенгламаларни x ва y функцияларни системага қўйиб, сўнгра $e^{\lambda_1 t}$ кўпайтувчига қисқартириб ҳосил қилиш мумкин.

Агар $\lambda_1 < 0$ бўлса, $t \to +\infty$ да $e^{\lambda_1 t} \to 0$, $te^{\lambda_1 t} \to 0$ ва демак, $x = 0$, $y = 0$ сокинлик нуқтаси асимптотик турғундир. Уни *турғун тугун* дейилади (1-б даги каби).

Агар $\lambda_1 > 0$ бўлса, $x = 0$, $y = 0$ нуқта турғун эмас ва у *турғун бўлмаган тугун* дейилади.

3-изоҳ. Агар $\Delta = 0$ бўлса, (38.14) характеристик тенглама $\lambda_1 = 0$ ва $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ илдизларга эга бўлади. $\lambda_2 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (38.2) системанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t},$$
$$y = C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар ва $a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 = 0$, $-a_{22} \beta_1 + a_{12} \beta_2 = 0$. t параметрни йўқотиб, қуйидаги параллел тўғри чизиқлар оиласини ҳосил қиламиз:

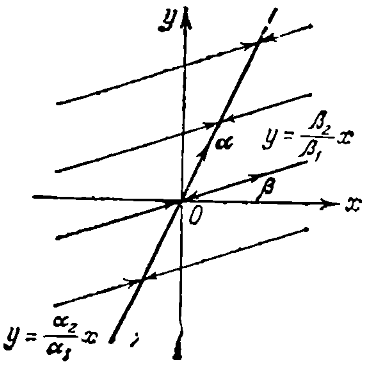
$$y - C_1 \alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}(x - C_1 \alpha_1).$$

Агар $\lambda_2 < 0$ бўлса, у ҳолда $t \to +\infty$ да ҳар бир траекторияда (параллел нурларнинг бирида) нуқталар шу траекторияда ётувчи $x = C_1 \alpha_1$ $y = C_1 \alpha_2 \left(y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x\right)$ осойишталик нуқтасига яқинлашади (66-чизма).

(0,0) нуқта $y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x$ тўғри чизиқнинг исталган нуқтаси каби $\lambda_2 < 0$ да Ляпунов бўйича турғун, лекин асимптотик турғун эмас.

Агар $\lambda_2 > 0$ бўлса, сокинлик нуқтаси турғун эмас. Агар $\lambda_1 = -\lambda_2 = 0$ бўлса, икки ҳол бўлиши мумкин:

а) (38.12) системанинг умумий ечими $x = C_1$, $y = C_2$ кўринишга эга. Бу ҳолда $x = y \equiv 0$ осойишталик нуқтаси Ляпунов бўйича турғун, бироқ асимптотик турғун эмас. Мазкур вазият A матрица ноль бўлганда: $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$ да содир бўлишини қайд қиламиз. Бу ҳолда (x, y) текисликнинг барча нуқталари осойишталик нуқталари бўлиб, Ляпунов бўйича турғун бўлади.



66- шакл

б) (38.12) системанинг умумий ечими

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = a + bt$$

кўринишга эга. $x = y \equiv 0$ осойишталик нуқтаси турғун эмас.

Бу ҳолда $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12}a_{21} \leqslant 0$.

5-мисол. Ушбу системанинг осойишталик нуқталари тавсифини аниқланг:

$$\begin{cases} x = -x + ay, \\ \dot{y} = -2y. \end{cases}$$

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Илдизлари: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Демак, $x = y \equiv 0$ осойишталик нуқтаси турғун тугундан иборат.

6-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = x - y, \\ y = 2x + 3y \end{cases}$$

система қандай турдаги осойишталик нуқтасига эга?

Ечиш. Характеристик

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

тенглама $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$ комплекс илдизларга эга. Бу қўшма илдизларнинг ҳақиқий қисми мусбат, шунинг учун $x = y \equiv 0$ осойишталик нуқтаси турғун бўлмаган тугундир.

4-изоҳ. Агар система коэффициентларидан тузилган A матрица симметрик бўлса, бизга маълумки, характеристик тенглама фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлади. Бундан ташқари

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2$$

эканлиги ҳам маълум.

Симметрик матрица эллиптик, гиперболик ёки параболик турдаги квадратик формани пайдо қилгани учун бундай ҳолларда дифференциал тенгламалар системасини ҳам мос ҳолда қуйидагича атаймиз:

агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ бўлса — эллиптик,

агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$ бўлса — гиперболик,

агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 = 0$ бўлса — параболик.

Юқорида айтилганлардан равшанки, агар (38.12) система эллиптик бўлса, осойишталик нуқтаси $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ бўлганда, турғун тугун бўлади. Бу $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ бўлганда мумкиндир.

Агар $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ бўлса, осойишталик нуқтаси турғун бўлмаган тугун бўлади ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$).

Эллиптик ҳолда a_{11} ва a_{22} сонлар бир хил ишорали бўлишини айтиб ўтамиз.

Агар (38.12) система гиперболик бўлса, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ осойишталик нуқтаси ҳар доим турғун бўлмайди (эгар). Агар (38.12) система параболик бўлса, осойишталик нуқтаси $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} \leqslant 0$ бўлганда турғун, $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} > 0$ бўлганда эса турғун эмас.

7-мисол. Қуйидаги системаларнинг осойишталик нуқталари тавсифини аниқланг:

$$\text{а)}\ \dot{x} = -3x + 2y,\quad \text{б)}\ \dot{x} = x + 2y,\quad \text{в)}\ \dot{x} = x - \sqrt{3}\,y,$$
$$\dot{y} = 2x - 5y;\qquad \dot{y} = 2x + 3y;\qquad \dot{y} = \sqrt{3}\,x + y.$$

Ечиш. Барча мисолларда A матрица симметрик. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 11 > 0$ бўлгани учун а) система эллиптик. $a_{11} = -3 < 0$, $a_{22} = -5 < 0$ бўлгани учун осойишталик нуқтаси турғун тугун. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$ бўлгани учун б) система гиперболик. Осойишталик нуқтаси — эгар. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлгани учун в) система параболик. $a_{11} + a_{22} = 4 > 0$, демак, осойишталик нуқтаси турғун эмас.

5-изоҳ. Ўзгармас коэффициентли $n \geqslant 1$ та тенгламадан иборат чизиқли бир жинсли

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \qquad + a_{1n}y_n \\ \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \qquad + a_{nn}y_n \end{cases}$$

система характеристик тенгламасининг барча илдизлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, бу система учун осойишталик нуқтаси олдиндан Ляпунов бўйича турғун (асимптотик турғун) бўлишини ($n = 2$ ҳол учун бўлганидек) исбот қилиш мумкин.

Системанинг характеристик тенгламасининг барча илдизлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлишининг шартлари қуйидаги Раус—Гурвиц теоремасида келтирилган.

4-теорема (Раус — Гурвиц теоремаси). *n-тартибли ҳақиқий коэффициентли*

$$a_0x^s + a_1x^{s-1} + a_2x^{s-2} + \qquad + a_s = 0$$

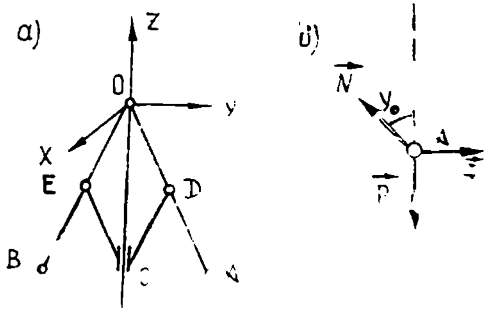
тенгламанинг барча илдизлари манфий ҳақиқий қисмга эга бўлиши учун қуйидаги

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 0 \\ & & & & & . \\ a_{2s-1} & a_{2s-2} & & & & a_s \end{vmatrix}$$

детерминантларнинг барчаси мусбат бўлиши зарур ва етарлидир. Бунда $i > s$ бўлса, $a_i = 0$.

8-масала. Уатт регулятори узунликлари l га тенг ва O нуқтада шарнирли бириктирилган OA ва OB стерженлардан



67- шакл

ташкил топган бўлиб, бу стерженларнинг учига m массали шарчалар бириктирилган (67-*а* шакл). Вертикал ўқ бўйича сирпана оладиган C муфта CE ва CD стерженлар воситасида шарлар ўрнатилган стерженларга шарнирлар билан бириктирилган. Шарлар моддий нуқталар деб қаралсин. Бурчак тезлик ортган сари шарлар бир-биридан қочади ва C муфта юқорига кўтарилади, бурчак тезлик камайса, шарлар бир-бирига яқинлашади ва C муфта пастга тушади.

Муфта ва стерженларнинг оғирлигини эътиборга олмай регулятор ҳаракатининг турғунлигини аниқланг. Айланувчи қисмларнинг (шарлар бу ҳисобга кирмайди) вертикал ўққа нисбатан инерция моменти I_0 га тенг.

φ_0 бурчак билан аниқланадиган асосий ҳаракатдан регуляторни φ бурчакка оғиши натижасида ҳосил бўладиган тикловчи момент

$$M_z = -k(\varphi - \varphi_0)$$

га тенг. Бунда k — ўзгармас мусбат коэффициент.

Ечиш. Регуляторнинг эркинлик даражаси иккига тенг. Умумлашган координаталар учун OC ўқ атрофида айланиш бурчаги β ва OA, OB стерженларнинг OAB текисликка перпендикуляр горизонтал ўқ атрофидаги айланиш бурчаги φ ни оламиз. Регулятор ўзгармас $\dot{\beta} = \omega_0$ бурчак тезлик билан айланганда φ_0 бурчакни аниқлаймиз. Бунинг учун шарларнинг нисбий мувозанатини текшириш кифоя (67-*б* шакл). Шарларга таъсир этувчи оғирлик кучи $\vec{P}$ ($\vec{P} = m\vec{g}$) ва реакция кучи $\vec{N}$ қаторига нормал инерция кучи $\vec{\Phi}_n$ ($\Phi_n = ml\omega_0^2)\sin\varphi_0$ ни қўшсак, бундай кучлар системасини мувозанатда деб қараш мумкин.

Бу кучларни $\vec{N}$ га перпендикуляр ўққа проекцияласак,

$$\Phi_n \cos\varphi_0 - mg\sin\varphi_0 = 0$$

ёки Φ_n нинг қийматини қўйсак,

$$ml\,\omega_0^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 - mg\sin\varphi_0 = 0$$

Бундан

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l\cos\varphi_0} \tag{38.19}$$

Шундай қилиб, регулятор OC ўқ атрофида берилган ω_0 бурчак тезлик билан айланса, у ҳолда OA ва OB стерженлар вертикалга φ_0 бурчак остида оғган ҳолда ҳаракатланади.

Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаларидан фойдаланамиз.

Умумлашган кучларни ҳисоблаймиз. Регуляторга шарларнинг оғирлик кучлари ва M_z тикловчи момент таъсир этади.

Шарлар оғирлик кучларининг потенциал энергияси ихтиёрий ўзгармасларгача аниқлик билан

$$П = -2mgl\cos\varphi$$

формула ёрдамида аниқланади. Шу сабабли шарларнинг оғирлик кучларига мос бўлган Q_φ умумлашған куч манфий ишора билан олинган потенциал энергиянинг φ бўйича хусусий ҳосиласига тенг бўлади:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial П}{\partial \varphi} = -2mgl\sin\varphi. \qquad (38.20)$$

Тикловчи M_z моментга мос умумлашган кучни Q_β билан белгиласак, Q_β ни элементар иш ифодасидаги $\delta\beta$ мумкин бўлган кўчиш олдидаги коэффициентга тенг деб қараш мумкин:

$$\delta A_1 = M_z\,\delta\beta.$$

Бинобарин,

$$Q_\beta = M_z = -k(\varphi - \varphi_0). \qquad (38.21)$$

Системанинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\beta}^2 + I_2\dot{\varphi}^2).$$

Бунда I_1 регулятор айланувчи қисмларининг (шарлар бу ҳисобга кирмайди) z ўққа нисбатан инерция моменти I_0 билан φ бурчакка боғлиқ шарларнинг z ўққа нисбатан инерция моментлари йиғиндисига тенг:

$$I_1 = I_0 + 2ml^2\sin^2\varphi$$

Шарларнинг x ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_2 = 2ml^2.$$

Шундай қилиб, системанинг кинетик энергияси умумлашган координаталар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$T = \frac{1}{2}\left[(I_0 + 2ml^2\sin^2\varphi)\dot{\beta}^2 + 2ml^2\dot{\varphi}^2\right].$$

Берилган система учун

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= Q_\beta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (38.22)$$

кўринишдаги Лаграижнинг II тур тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \beta} = (I_0 + 2\,ml^2\cdot\sin^2\varphi)\,\dot\beta\,, \quad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot\beta} = \\ &= 4\,ml^2\sin\varphi\cos\varphi\,\varphi\,\dot\beta + (I_0 + 2\,ml^2\sin^2\varphi)\,\ddot\beta\,, \\ &\frac{\partial T}{\partial \beta} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = 2\,ml^2\,\varphi\,, \quad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = 2\,ml^2\,\varphi\,, \\ &\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 2\,ml^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\beta^2. \end{aligned}\right\} \tag{38.23}$$

(38.20), (38.21) ва (38.23) ни (38.22) га қўйсак,

$$\left.\begin{aligned} &4\,ml^2\sin\varphi\cos\varphi\,\varphi\,\dot\beta + (I_0 + 2\,ml^2\sin^2\varphi)\,\ddot\beta = -k\,(\varphi - \varphi_0), \\ &2\,ml^2\,\varphi - 2\,ml^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\beta^2 = -2\,mg\,l\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{38.24}$$

Системанинг (38.18) асосий ҳаракат атрофидаги кичик тебранишларини қараймиз. Бунинг учун қуйидаги алмаштиришни киритамиз:

$$\varphi = \varphi_0 + x, \qquad \dot\beta = \dot\beta_0 + y = \omega_0 + y\,. \tag{38.25}$$

Бунда x ва y лар φ ва β ўзгарувчиларнинг кичик орттирмаларини ифодалайди. (38.25) ни (38.24) га киритиб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left.\begin{aligned} &4\,ml^2\sin(\varphi_0 + x)\cos(\varphi_0 + x)\,\dot x\,(\omega_0 + y) + \\ &+ [I_0 + 2\,ml^2\sin^2(\varphi_0 + x)]\,\ddot y = -\,kx, \\ &\ddot x - \frac{1}{2}\,(\dot\beta_0 + \dot y)^2\sin(2\,\varphi_0 + 2\,x) + \\ &+ \frac{g}{l}\,\sin(\varphi_0 + x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38.26}$$

Асосий ҳаракат атрофидаги кичик ҳаракатларни текшириш учун барча ҳадларни биринчи тартибли кичик миқдоргача аниқлик билан ҳисоблаймиз. Бунинг учун $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ деб фараз қиламиз. Натижада (38.26) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} &(I_0 + 2\,ml^2\sin^2\varphi_0)\,y + 2\,ml^2\sin^2\varphi_0\cdot\dot\beta_0\,x + kx = 0, \\ &x - \dot\beta_0\sin 2\varphi_0 y + \left(\frac{g}{l}\cos\varphi_0 - \dot\beta_0^2\cos 2\,\varphi_0\right)x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38.27}$$

Шундай қилиб, системанинг асосий ҳаракати атрофидаги кичик ҳаракатлари учун (38.27) кўринишидаги иккита ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системасини оламиз. Уларнинг ечимини

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \qquad y = C_2 e^{\lambda t}$$

кўринишда излаймиз. Бунда C_1, C_2 лар ўзгармас миқдорлар. У ҳолда (38.27) га мос характеристик тенглама

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{I_0}{2ml^2}+\sin^2\varphi_0\right)\lambda^3+\dot{\beta}_0^2\sin^2\varphi_0\,(1+2\cos^2\varphi_0+\\&+\frac{I_0}{2ml^3}\Big)\lambda+\frac{k}{2ml^2}\dot{\beta}_0\sin 2\varphi_0=0\end{aligned}\right\}\qquad(38.28)$$

кўринишда ёзилади. Бунда

$$a_0=\frac{I_0}{2ml^2}+\sin^2\varphi_0,\ a_1=0,$$

$$a_2=\dot{\beta}_0^2\varphi_0\left(1+2\cos^2\varphi_0+\frac{I_0}{2ml^2}\right),$$

$$a_3=\frac{k}{2ml^2}\dot{\beta}_0\sin 2\varphi_0$$

белгилашларни киритсак, $a_0\lambda^3+a_2\lambda+a_3=0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу характеристик тенглама илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлишини ифодаловчи Раус — Гурвиц шартлари

$$a_1>0,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0,$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ 0 & 0 & a_3\end{vmatrix}=a_3(a_1a_2-a_3a_6)>0$$

кўринишида ёзилади. Қўрилаётган ҳолда $a_0>0$, $a_2>0$, $a_3>0$, $a_1=0$ бўлгани учун Раус — Гурвиц шартлари қаноатланмайди, бинобарин, регуляторнинг ҳаракати турғун бўлмайди.

39-§. Ҳаракатни оптимал бошқариш ҳақида умумий тушунча

Техникада объектларнинг ҳаракатини бошқариш ва бошқаришнинг энг яхши усулини танлаш алоҳида аҳамиятга эга. Ҳозирги кунда бошқариладиган объектлар деярли ҳар қадамда учрайди; автомобиль, самолёт, регуляторлар билан жиҳозланган турли электр асбоблари ана шулар жумласидандир.

Бошқарилувчи объектни бир ҳолатдан бошқа ҳолатга турлича усулларда ўтказиш мумкин. Бундай ҳолларда энг қулай йўл билан ўтишни аниқлашга олиб келадиган оптимал бошқариш масаласига дуч келинади.

Механик система нуқталарига таъсир этувчи баъзи кучлар воситасида содир бўладиган ҳаракатлар бошқарувчи — одам (ёки автоматик қурилмалар) воситасида бошқарилиши мумкин. Масалан, самолётнинг ҳаракатини учувчи ёки автопилот воситасида бошқариш мумкин. Техникада учрайдиган бундай масалалар *бошқариш функцияси қатнашадиган масалалар* дейилади. Агар бошқариш функцияси ва таъсир этувчи кучлар маълум бўлса, у ҳолда ҳаракатни бошқариш берилган объектнинг мазкур кучлар таъсиридаги ҳаракатини аниқлашга доир оддий масалага келтирилади.

Бошқаришнинг (ҳаракатнинг) оптималлиги олдиндан белгиланган сифат белгисига қараб аниқланади. Масалан, икки пункт орасида учадиган самолётнинг энг қисқа вақтда манзилга етишини бошқариш масаласида сифат мезони учишга сарф бўлган вақт, максимал юк ташиш масаласида эса сифат мезони ташилган юкнинг оғирлиги билан ифодаланади Кўпинча механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари

$$\frac{dx_j}{dt} = f(x_1, x_2, \quad x_n, u_1, u_2, \quad u_k), \ (j = 1, 2, \quad n) \quad (39.1)$$

ёки

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (39.2)$$

кўринишдаги тенгламалар системасини таҳлил қилишга келтирилади. Бунда $x_1, x_2, \quad x_n$ лар системанинг берилган ондаги ҳолати, x_j тезлигини ифодаловчи миқдорлар, $u_1, u_2, \quad , u_k$ лар эса бошқариш параметрларини ифодалайди. Масалан, тўғри чизиқли ҳаракатдаги автомобилнинг ҳаракатини унинг босиб ўтган йўли s ва ҳаракат тезлиги v билан характерлаш мумкин. Бу катталиклар вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради ва улар двигателнинг тортиш кучи F ни ҳайдовчи томондан ўзгартириш орқали бошқарилади. Бу масалада F бошқарувчи параметрни ифодалайди.

Одатда, бошқариш $u_1, u_2, \quad , u_k$ параметрлари ихтиёрий бўлмай, уларга маълум шартлар қўйилади. Масалан, u — автомобиль двигателининг тортиш кучи бўлса, u параметр $0 \leqslant u \leqslant u_1$ кўринишдаги шартни қаноатлантириши керак.

Бошланғич $t = t_0$ пайтда система x_0 ҳолатда бўлиб, $t = t_1$ пайтда уни x_1 ҳолатга олиб келиш талаб қилинса, бошқариш масаласи

$$\frac{dx}{dt} = f[x, u(t)]$$

дифференциал тенгламаларни ушбу

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1$$

чегаравий шартларда ечимга эга бўладиган $u(t)$ бошқариш функциясини танлашга келтирилади. Бу масаланинг ечими $x(t)$ бўлса, бошқаришнинг сифат мезони

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0[x(t), u(t)]\, dt \quad (39.3)$$

формула бўйича ҳисобланади.

Ҳаракат дифференциал тенгламалари (39.1) ёки (39.2) тенгламалар билан ифодаланадиган, механик системанинг ҳаракатини оптимал бошқариш масаласи (39.3) функционалнинг мумкин бўлган энг кичик қийматини аниқлашга келтирилади.

Мисол тариқасида ҳолати иккинчи тартибли

$$x = f(x, \ x, \ u) \quad (39.4)$$

дифференциал тенглама билан тавсифланадиган объектнинг ҳаракатини бошқариш масаласининг қўйилишини келтирамиз.

(39.4) да u — бошқарувчи ҳақиқий параметр бўлиб, у

$$-1 \leqslant u \leqslant 1 \tag{39.5}$$

шартларга бўйсунади.

$x = x$, $x = \dot{x}$ фазавий координаталарда (39.4) тенглама қуйидаги нормал система кўринишида ёзилади:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ y = f(x,\ y,\ u). \end{cases} \tag{39.6}$$

f функцияга баъзи чеклашлар қўямиз, чунончи бу функция барча аргументлари бўйича узлуксиз дифференциалланувчи ва ушбу тенгсизликларни қаноатлантиради деб фараз қиламиз:

$$f(\dot{x},\ y,\ +1) > 0,\quad f(x,\ y,\ -1) < 0,\ \text{барча}\ x,\ y\ \text{лар учун} \tag{39.7}$$

$$\frac{\partial f\,(x,\ y,\ u)}{\partial u} = 0,\quad \frac{\partial f\,(x,\ y,\ u)}{\partial x} \geqslant 0,\ \text{барча}\ x,\ y,\ u\ \text{лар учун} \tag{39.8}$$

(39.4) бошқариладиган объект учун берилган бошланғич ҳолатдан ноль тезликли $x = 0$ нуқтага энг тез тушиш масаласини қараймиз, бошқача айтганда, (39.6) объект учун координаталар бошига тушиш масаласини қараймиз.

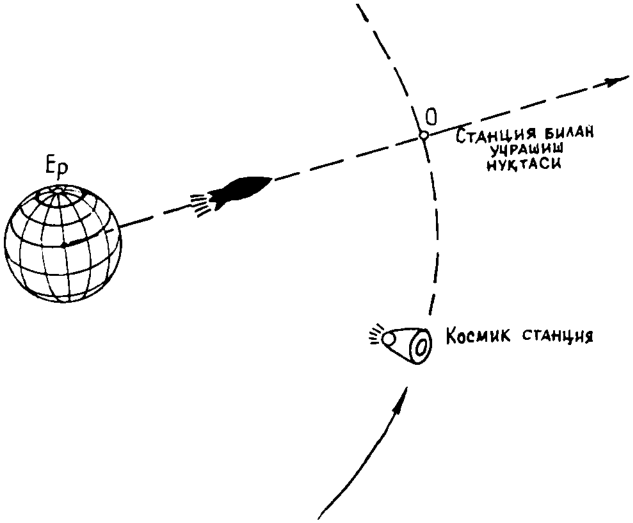
Барча қўйилган шартларни қаноатлантирадиган чизиқли объект сифатида $\ddot{x} = u$ тенглама билан тавсифланадиган объектни кўрсатиш мумкин. Бу чизиқли объектдан «кам фарқланадиган» ночизиқли объектлар ҳам юқорида қўйилган шартларни қаноатлантиради.

Қўйилган масалага олиб келадиган ушбу «квазиамалий» масалани кўрсатиш мумкин. Ер атрофида доиравий орбита бўйлаб ҳаракатланаётган космик станцияда ҳалокат ҳолати юз беради ва тез ёрдам бериш талаб қилинади.

Ёрдам бериш учун Ердан ракета кўтарилиб, у станция томонтўғри чизиқли ҳаракатланмоқда (станциянинг кўчишини ҳисобга олган ҳолда, 68-шакл). Айтайлик, бу тўғри чизиқда саноқ боши $x = 0$ сифатида ракетанинг станция билан мўлжалланаётган учрашиш нуқтасини олиб, координаталар киритамиз. У ҳолда ракетанинг ҳаракат тенгламаси (агар ракета массасининг ёқилғи ёниш ҳисобига ўзгаришини ҳисобга олинмаса)

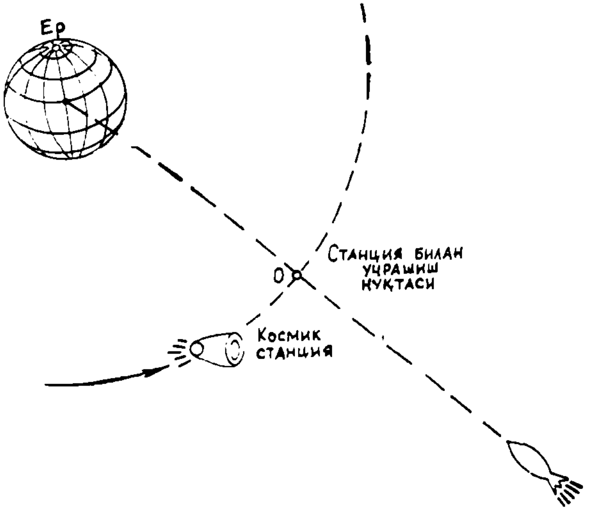
$$m x = \varphi(\dot{x},\ u) + \frac{k}{(x + r)^2}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда ўнг томондаги биринчи қўшилувчи — тортиш кучи, иккинчи қўшилувчи эса Ернинг тортиш кучи (r — станциядан Ер марказигача бўлган масофа). (39.7) шартларнинг бажарилиши мутлақо табиийдир. $u = +1$ да («тўла олға») ўнг томон f мусбат, $u = -1$ да эса (тормозлаш двигателларининг ишга туширилиши) эса манфий.



68- шакл

(39.8) даги биринчи тенгсизликнинг $x > -r$ да (яъни ракета нинг ҳаракат зонасида) бажарилиши ҳам худди шундай табиийдир, бу бевосита текширилади. Шундай қилиб, (39.7), (39.8) шартлар бажарилади, улар ракета станцияга етиб келиб, Ерга қайтиш пайтида ҳам худди шундай бажарилади (69- шакл).



69- шакл

Б. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1-§. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар

Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламаларга доир бир нечта мисол кўрайлик.

1-мисол. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг ўнг томони $(-\infty, 0)$ ва $(0, \infty)$ очиқ оралиқларда узлуксиз. Биринчи интеграл учун $x_0>0$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}+y_0=\ln\frac{x}{x_0}+y_0.$$

Бу ечим $0<x<\infty$ оралиқдаги барча x ларда аниқланган. $-\infty<x<0$ оралиқ учун $x_0<0$ бошланғич қийматда қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}+y_0=\ln|x|-\ln|x_0|+y_0=\ln\frac{x}{x_0}+y_0$$

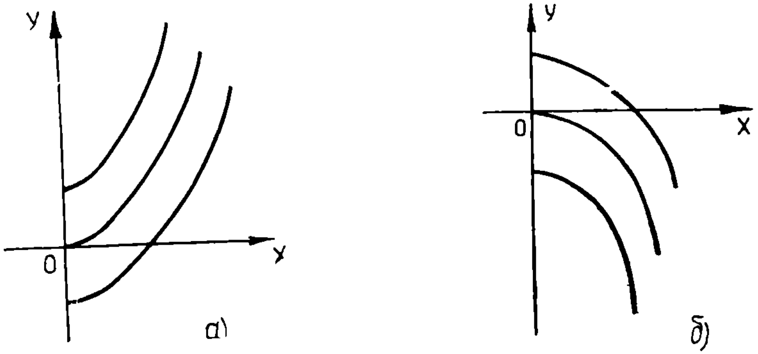
2-мисол. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Ҳосилага нисбатан ечиб, қуйидаги иккита тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx}=+\sqrt{x},\quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{x},\quad 0\leqslant x<\infty.$$

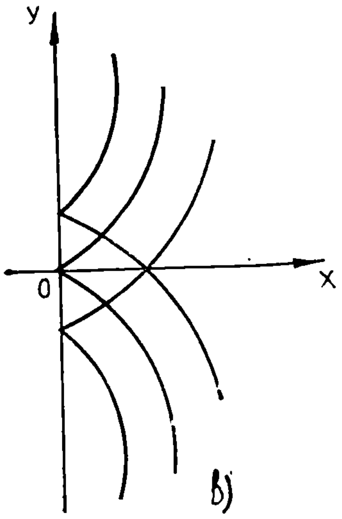
Бу тенгламаларни интеграллаймиз: $y=+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$, $y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+$ $+C$. Биринчи тенглама $y=+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ярим кубик параболанинг битта тармоғидан y ўққа нисбатан параллел кўчириш билан ҳосил бўладиган ярим кубик параболаларнинг кўтарилиб борувчи оиласи (битта параметр) ни аниқлайди (70-*а* шакл); шунга ўхшаш, иккинчи тенглама пасайиб борувчи тармоқлар оиласини аниқлайди (70-*б* шакл).

Равшанки, $x\geqslant 0$, $-\infty<y<+\infty$ ярим текисликнинг ҳар бир нуқтаси орқали ҳар бир тенгламанинг битта ва фақат битта интеграл эгри чизиғи ўтади.



70- шакл

Агарда биз берилган тенгламани ўнг томонлари бир қийматли бўлган иккита тенгламага ажратмаганимизда эди, у ҳолда тўла ярим кубик параболалар оиласини ҳосил қилган бўлар эдик, бироқ бу ҳолда қаралаётган соҳанинг ҳар бир нуқтаси орқали иккитадан эгри чизиқ ўтган бўлар эди (70- *в* шакл).



3-мисол. $\frac{dy}{dx} = y^2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$dx = \frac{dy}{y^2}$$

ёки буни интеграллаб,

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y^2} + x_0, \quad x - x_0 = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0}, \quad y = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x + x_0}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу умумий ечимдир, бундан ташқари $y = 0$ хусусий ечим ҳам мавжуд. Уни умумий ечимнинг алмаштирилган шакли $y = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$ дан ҳосил қилиш мумкин, бироқ $y_0 = 0$ да оралиқ ҳисоблашлар қонуний бўлмаслигини кўриш осон. Агар умумий ечимни $x = -\frac{1}{y} + C$, $y = -\frac{1}{x+C}$ кўринишда олсак ҳам $y = 0$ хусусий ечим бу умумий ечимдан C нинг ҳеч бир қийматида ҳосил бўлмайди.

4-мисол. $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Ўзгарувчиларни ажратамиз, бунинг учун тенгламанинг иккала томонини $(y^2-1)(x^2-1)$ га бўламиз:

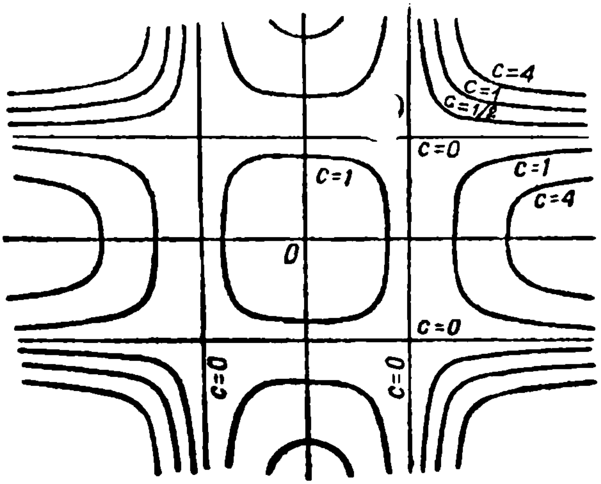
$$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0.$$

Иккита дифференциал йиғиндисини интеграллаймиз:

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|$$

ёки потенцирласак,

$$(x^2-1)(y^2-1)=C.$$



71- шакл

Умумий интеграл билан ифодаланадиган эгри чизиқлар оиласининг умумий кўриниши 71-шаклда кўрсатилган. Хусусан, $C=0$ да ушбу 4 та тўғри чизиқни ҳосил қиламиз: $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ ($x=\pm 1$ ва $y=\pm 1$ қийматлар ўзгарувчилар ажратилганидан кейин махражларни нолга айлантиради); улар квадратурадан ҳосил бўлиши мумкин эмас эди, чунки унда $\ln|C|$ интеграл ўзгармаси ҳосил бўлар эди, демак, $C\neq 0$.

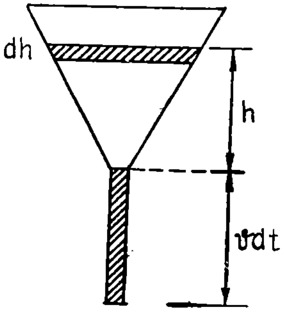
5-мисол. *Идишдан суюқликнинг оқиб чиқиши.* Гидравликада сувнинг эркин сиртидан h чуқурликда жойлашган тешикдан сувнинг v тезлик билан оқиб чиқиш қонуни

$$v=0{,}6\sqrt{2gh}\ \text{см/с}$$

формула билан берилиши келтириб чиқарилади, бу ерда g — оғирлик кучи тезланиши.

Баландлиги 10 см, учидаги бурчаги $\alpha=60^\circ$ бўлган ва сув билан тўлдирилган конус воронка берилган. Унинг пастида юзи 0,5 см^2

бўлган тешик бўлсин (72-шакл). Сувнинг оқиб чиқиш тезлиги топилсин.



72- шакл

Ечиш. Изланаётган функция вақтнинг исталган t пайтида сувнинг баландлигидан иборат. Сувнинг оқиб чиқиш тезлиги v ҳамма вақт h билан биргаликда ўзгариб боради. Бироқ, агар чексиз кичик вақт оралиғи dt олинса, у ҳолда уни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин (биз $\Delta t \to 0$ да Δt га нисбатан юқори тартибли кичик миқдорларни ташлаб юборамиз). Вақтнинг t дан $t + dt$ гача оралиғида оқиб чиқадиган сувнинг ҳажмини икки усул билан ҳисоблаймиз. Бир томондан, тешик орқали асоси 0,5 см² ва баландлиги vdt бўлган цилиндр ҳажмидаги сув оқиб чиқади; унинг учун изланаётган ҳажм бундай бўлади:

$$-dV = -0{,}5vdt = -0{,}3\sqrt{2gh}\,dt.$$

Иккинчи томондан, сувнинг оқиб кетиши сабабли h баландлик dh манфий орттирма ҳосил қилади, оқиб чиққан сув ҳажмининг дифференциали бундай ифодаланади:

$$-dV = \pi r^2 dh = \pi (h\,\mathrm{tg}\,30^\circ)^2 dh = \frac{\pi}{3} h^2 dh.$$

$-dV$ учун топилган иккала ифодани тенглаб, h ва t ни боғловчи қуйидаги дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\pi}{3} h^2 dh = -0{,}3\sqrt{2g}\,h^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

Бу тенгламага t эркли ўзгарувчи ошкор кирмайди. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dt = -\frac{\pi}{0{,}9\sqrt{2g}}\,h^{\frac{3}{2}}\,dh.$$

$$t = -\frac{\pi}{0{,}9\sqrt{2g}}\,\frac{2}{5}\,h^{\frac{5}{2}} + C \approx -0{,}0314h^{\frac{5}{2}} + C.$$

C ихтиёрий ўзгармас бошланғич шартлардан аниқланади: $t = 0$ да $h = 10$ га эгамиз, бу ердан $C \approx 0{,}0314 \cdot 10^{5/2}$ ва изланаётган хусусий ечим бундай бўлади (t га нисбатан ечилган):

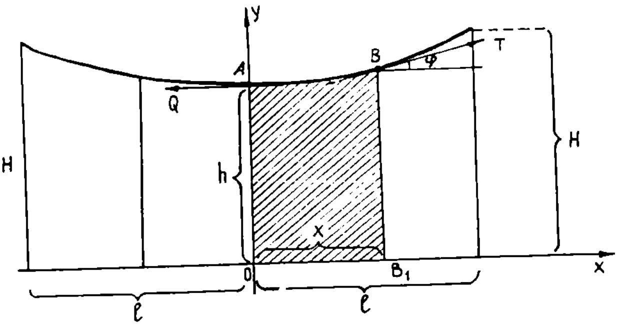
$$t \approx 0{,}0314\left(10^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right).$$

Сувнинг идишдан тўла оқиб чиқиб кетиш вақти t_1 ни $h = 0$ шартдан топиш мумкин:

$$t_1 = 0{,}0314 \cdot 10^{5/2} \approx 16 \text{ с}.$$

6-мисол. Агар пўлат арқон (канат) осма кўприкнинг учларидан $H = 5$ м баландликда, ўртасидан эса $h = 4$ м баландликда жойлашган бўлса, у қандай эгри чизиқ бўйлаб осилиб туради (кўприкнинг узунлиги $2l = 20$ м)?

Ечиш. Пўлат арқон текислигида кўприкнинг бўйлама кесими бўйлаб x ўқни ўтказамиз, y ўқни эса пўлат арқоннинг ўртаси орқали вертикал ўтказамиз (73-шакл).



73- шакл

Пўлат арқоннинг AB қисми қуйидаги учта куч таъсири остида мувозанатда бўлади: A нуқтадаги таранглик кучи Q, B нуқтада пўлат арқон бўйлаб йўналган таранглик кучи ва кўприкнинг A ва B орасидаги қисмининг оғирлиги. Кўприкнинг оғирлигига нисбатан пўлат арқоннинг оғирлиги жуда кичик бўлганлиги учун уни ҳисобга олмаслик мумкин.

Кўприкнинг O ва B_1 орасидаги қисмининг оғирлиги P узунлик x га пропорционал: $P = kx$.

Бу кучлар ўзаро мувозанатда бўлганлиги учун улар проекцияларининг

$$Q_x = -Q, \quad T_x = T\cos\varphi.$$

$$Q_y = 0, \quad P_y = P = -kx, \quad T_y = T\sin\varphi.$$

алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши лозим. Бу ташкил этувчиларни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} T\cos\varphi - Q &= 0, \\ T\sin\varphi - kx &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} T\cos\varphi &= Q, \\ T\sin\varphi &= kx, \end{aligned}\right\}$$

Иккинчи тенгламани биринчи тенгламага бўлсак,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{Q}x.$$

Бироқ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ бўлганлиги учун бу ердан осилиш чизиғи дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{Q}x \qquad (1.1)$$

(1.1) тенгламани ечиб,

$$y = \frac{k}{2Q}x^2 + C \qquad (1.2)$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартлар:

1) $x = 0$ да $y = h = 4$.

2) $x = \pm l$ да $y = H = 5$.

Бундан

$$4 = \frac{k}{2Q}\cdot 0^2 + C, \text{ у ҳолда } C = 4$$

ва

$$5 = \frac{k}{2Q}l^2 + 4, \quad \frac{k}{2Q} = \frac{1}{l^2} = \frac{1}{100}.$$

Топилган ўзгармасларни (1.2) умумий ечимга қўйиб, эгри чизиқнинг изланаётган қуйидаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y = \frac{1}{100}x^2 + 4$$

ёки

$$y - 4 = \frac{x^2}{100}.$$

Бу учи (0; 4) нуқтада бўлган параболадир.

1-дарсхона топшириқлари.

Тенгламаларни ечинг:

1. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0.$
   Ж: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = C.$
2. $\sqrt{1 - x^2}\, dy + \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0.$
   Ж: $\arcsin x + \arcsin y = C.$
3. $y(1 + e^x)dy - e^x dx = 0.$
   Ж: $y^2 - 2 \ln (1 + e^x) = C.$
4. $(1 - y)dx + xdy = 0.$
   Ж: $x - (1 - y)\cdot C = 0.$

5. Радийнинг парчаланиш қонуни қуйидагидан иборат: парчаланиш тезлиги радийнинг мавжуд миқдори R га пропорционал. R нинг

t га боғлиқлигини топинг. Дифференциал тенглама тузиб, 1600 йилдан кейин радийнинг бошланғич миқдоридан ярми қолади деган тажриба маълумотларидан пропорционаллик коэффициентини аниқланг.

Ж: $R = R_0 e^{-0{,}000433}\ t$; вақт йил ҳисобида.

1-мустақил иш топшириқлари

Тенгламаларни ечинг:

1. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$

   Ж: $\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = C.$

2. $\sin^2 x dy + \sin^2 y dx = 0.$

   Ж: $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = C.$

3. $dy - \cos(x+y)\,dx = 0.$

   Ж: $x + C = \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$

4. $y'\cos^2 x - 5\sqrt{1-y^2} = 0.$

   Ж: $y = \sin(5\operatorname{tg} x + C).$

5. Шундай эгри чизиқларни топингки, улар учун абсциссалар ўқи, эгри чизиқнинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасидан ўзгарувчи ординатагача бўлган ёйи ва бу ордината билан чегараланган юзи ордината узунлигининг n-даражасига ($n > 1$) пропорционал бўлсин. Ихтиёрий ўзгармас қандай геометрик маънога эга?

   Ж: $y = k(x - x_0)^{\frac{1}{n-1}}$, k — маълум катталик; x_0 — абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтаси (ихтиёрий ўзгармас).

2-§. Бир жинсли дифференциал тенгламалар

Аввало бир жинсли дифференциал тенгламаларни ечишга мисоллар келтирайлик.

1-мисол. Бир жинсли

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш: $y = u\cdot x$ белгилашни киритсак, $\frac{dy}{dx} = u + x\cdot\frac{du}{dx}$ тенглама

$$u + x\cdot\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2}$$

ёки

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{1-u^2}$$

кўринишга ўтади. $u \neq 0$, $x \neq 0$ деб фараз қилиб, охирги тенгламадан ўзгарувчилари ажралган

$$\frac{(1-u^2)\,du}{u+u^3}=\frac{dx}{x}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Тенгликнинг чап томонидаги ифодани содда касрларга ёйиб ва интеграллаб,

$$\ln x+\ln (u^2+1)-\ln u=\ln C \text{ ёки } \frac{x\,(u^2+1)}{u}=C$$

ечимни топамиз, $u=\frac{y}{x}$ бўлганлиги учун, ўрнига қўйиб $x^2+y^2=$ $=Cy$ ечимга эга бўламиз.

Энди $x=0$ ва $u=0$ ҳолларни алоҳида текширамиз.

$x=0$ бўлгани учун $dx=0$ бўлади, лекин уни тенгламага қўйиб бўлмайди, чунки dx махражда қатнашяпти. $u=0$, ёки $\frac{y}{x}=0$, ёки $y=0$ бўлгани учун $dy=0$ бўлади, уни тенгламага қўйиб $y=0$ нинг махсус ечим эканига ишонч ҳосил қиламиз.

2-мисол. $9y\frac{dy}{dx}-18xy+4x^3=0$ дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш. $y=z^2$, $\frac{dy}{dx}=2z\frac{dz}{dx}$ алмаштиришни бажарсак, берилган тенглама

$$9z^2\cdot 2z\frac{dz}{dx}-18xz^2+4x^3=0$$

ёки

$$9z^2\frac{dz}{dx}-9xz^2+2x^3=0$$

кўринишга ўтади. Бу бир жинсли тенглама. Шунинг учун

$$z=ux,\ \frac{dz}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

алмаштириш орқали ўзгарувчилари ажралган

$$\frac{9u^3du}{9u^4-9u^3+2}+\frac{dx}{x}=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Яна бир бора $u^2=v$ деб,

$$\frac{9vdv}{9v^2-9v+2}+\frac{2dx}{x}=0$$

ёки

$$\frac{6dv}{3v-2}-\frac{3dv}{3v-1}+\frac{2dx}{x}=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаcак,

$$\frac{(3v-2)^2\,x^2}{3v-1}=C.$$

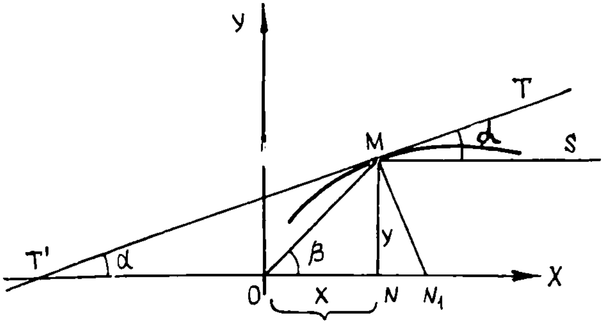
Бошланғич ўзгарувчиларга қайтиш орқали

$$\frac{(3u^2-2)^2 x^4}{3u^3-1}=C, \quad \frac{(3z^2-2x^2)^2}{3z^2-x^2}=C, \quad \frac{(3y-2x^2)}{3y-x^2}=C$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

3-мисол. *Параболик кўзгу.* Параллел нурларни битта нуқтага тўплайдиган кўзгу шаклини топинг. Кўзгунинг фокал ватари 8 га тенг эканлигини билган ҳолда кўзгу сирти тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланаётган сиртнинг *Oxy* текислик билан кесимида тенгламаси умумий кўринишда $y=f(x)$ бўлган чизиқни ҳосил қиламиз. Нурлар x ўққа параллел равишда ўнг томондан тушсин. Координаталар бошини қайтган нурлар фокусига қўямиз (74-шакл).



74- шакл

$\angle SMT=\angle T'MO$, чунки тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенг, β бурчак эса $MT'O$ учбурчакнинг ташқи бурчаги, шунинг учун у 2α га тенг:

$$\beta=2\alpha, \tag{2.1}$$

у ҳолда

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{dy}{dx},$$

демак,

$$\frac{y}{x}=\frac{2\frac{dy}{dx}}{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ ёки } \frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-y'^2}. \tag{2.2}$$

Бу масаламизнинг дифференциал тенгламасидир. Сўнгги тенгламани y' га нисбатан ечамиз:

$$y(y')^2+2xy'-y=0,$$

$$y'=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}, \tag{2.3}$$

бу бир жинсли тенглама.

Аниқлик учун плюс ишорани олиб ва y' ни $\frac{dy}{dx}$ га алмаштириб, умумий махражга келтирамиз:

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + y\,\frac{dy}{dx}.$$

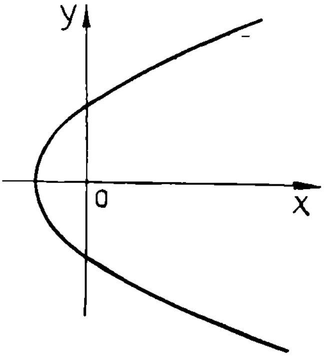
Уни $y = ux$ алмаштириш ёрдамида ечиб, (2.3) тенгламанинг қуйидаги умумий ечимини оламиз:

$$\left.\begin{aligned} &y^2 = 2Cx + C^2, \\ \text{ёки}\quad &y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Биз параметри $p = C$ ва умумий фокуси координаталар бошида бўлган параболалар оиласини ҳосил қилдик. Шартга кўра изланаётган параболанинг фокал ватари $2p = 8$, бундан $p = C = 4$, у ҳолда изланаётган кесим тенгламаси бундай бўлади (75- шакл):

$y^2 = 8(x+2)$— парабола.

Oxy текислик ихтиёрий олинганлиги учун, биз шундай кесимларни x ўқ орқали ўтказилган исталган текисликда ҳосил қиламиз. Бу ердан изланаётган кўзгу сирт x ўқи атрофида айланиш параболоиди бўлади, унинг тенгламаси эса



75 шакл-

$y^2 + z^2 = 8(x+2)$ дан иборат.

2- дарсхона топшириқлари

Тенгламаларни интегралланг.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2yx}{x^2+y^2}$. Ж: $x^2 - y^2 = Cy$, $y = 0$.
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$. Ж: $y = xe^{Cx}$.
3. $y^2 + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$. Ж: $e^{\frac{y}{x}} = Cy$, $y = 0$.
4. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$. Ж: $\sin\frac{y}{x} = \ln x + C$.

2- мустақил иш топшириқлари.

Тенгламаларни интегралланг:

1. $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\,\frac{dy}{dx}$.

   Ж: $(y + x - 1)^5(y - x + 1)^2 = C$.

2. $(x+2y+1)\frac{dy}{dx}=2x+4x+3.$

Ж: $e^{10y-20x}=c(5x+10y+7).$

3. $\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

Ж: $e^{-2\,\mathrm{arc\,ctg}}\ \frac{y+2}{x-3}=C(y+2)$

4. $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2.$

Ж: $x=-y+\mathrm{arctg}\,\frac{y+c}{a}.$

3-§. Бир жинсли тенгламага келтириладиган дифференциал тенгламалар

Бир жинсли тенгламага келтириладиган дифференциал тенгламаларни ечишга доир мисоллар қарайлик.

1-мисол. Ушбу тенглама ечилсин:

$$(x-y-1)\,dy=(x+y-5)\,dx.$$

Ечиш. Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-5}{x-y-1}.$$

Бу ерда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0.$$

Уни бир жинсли тенгламага айлантириш учун қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$x=\xi+h,\quad y=\eta+k,\qquad dx=d\xi,\ dy=d\eta,$$

у ҳолда

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta+h+k-5}{\xi-\eta+h-k-1}.$$

h ва k ни қуйидаги шартлардан топамиз:

$$\left.\begin{aligned} h+k-5&=0,\\ h-k-1&=0\end{aligned}\right\},\ \text{бундан}\quad \begin{aligned} h&=3,\\ k&=2,\end{aligned}\quad \text{у ҳолда}\quad \begin{aligned} x&=\xi+3,\\ y&=\eta+2.\end{aligned}$$

Натижада қуйидаги бир жинсли тенгламани оламиз:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta},$$

уни $\eta=u\cdot\xi$ ўрнига қўйиш ёрдамида ечамиз. Ўзгарувчилари ажраладиган қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1+u^2}{1-u}\cdot d\xi=\xi\cdot du,$$

ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{(1-u)\,du}{1+u^2}.$$

Интеграллаймиз:

$$\ln\,\xi = \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\,(1+u^2) + \ln\,C, \text{ бу ерда } u = \frac{\eta}{\xi}$$

ёки

$$\ln\,(x-3) = \operatorname{arctg}\frac{y-2}{x-3} - \frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y-2}{x-3}\right)^2\right] + \ln\,C.$$

Алмаштиришлардан сўнг ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{arctg}\frac{y-2}{x-3} = \ln\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} + C.$$

2-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 6.$$

Ечиш. Бу ерда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = --2 \neq 0.$$

Тенгламани бир жинсли тенгламага айлантириш учун қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$x = \xi + h, \quad y = \eta + k, \quad dx = d\xi, \quad dy = d\eta,$$

у ҳолда

$$(\xi+\eta+h+k-2)\,d\xi + (\xi-\eta+h-k+4)\,d\xi = 0.$$

h ва k ни қуйидаги шартлардан топамиз:

$$\left.\begin{aligned} h+k-2 &= 0. \\ h-k+4 &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ бундан } h = -1, \quad k = 3$$

ва $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$. Натижада қуйидаги бир жинсли тенгламани ҳосил қиламиз: $(\xi+\eta)\,d\xi + (\xi-\eta)\,d\eta = 0$.

Буни $\eta = u\cdot\xi$ ўрнига қўйиш ёрдамида ечамиз ва ўзгарувчилари ажраладиган

$$(1+2u-u^2)\,d\xi + \xi(1-u)\,du = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{(1-u)\,du}{1+2u-u^2} = 0.$$

Интеграллаймиз:

$$\ln\,\xi + \frac{1}{2}\ln\,(1+2u-u^2) = \ln\,C$$

ёки

$$\xi^2 \cdot (1+2u-u^2) = C, \quad \text{бу ерда } u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y-3}{x+1}.$$

Узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(x+1)^2 \left[1 + \frac{2(y-3)}{x+1} - \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right] = C$$

ёки

$$(x+1)^2 + 2(y-3)(x+1) - (y-3)^2 = C.$$

3-дарсхона топшириқлари

Тенгламаларни ечинг:

1. $(2x+3y+2)\,dx + (4x+6y+3)\,dy = 0$
   Ж: $x + 2y + \ln(2x+3y) = C.$
2. $(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$
   Ж: $x - 2(x+y) - 3\ln(x+y-2) = C.$
3. $(2x-y+1)\,dx + (2y-x-1)\,dy = 0.$
   Ж: $x^2 - xy + y^2 + x - y = C.$
4. $(x-2y+3)\,dx + (2x-y+4)\,dy = 0$
   Ж: $(x+y-1)^2 = C(x-y+3).$

3-мустақил иш топшириқлари

Тенгламаларни ечинг:

1. $(2x+3y-1)\,dx + (4x+6y-5)\,dy = 0$
   Ж: $3x + 6y + 9\ln(2x+3y-7) = C.$
2. $y' = \dfrac{x+y-2}{y-x-4}$ тенгламанинг $M(1,\ 1)$ нуқтадан ўтувчи ечимини топинг.
   Ж: $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y - 6 = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-3}{x-y-1}.$
   Ж. $C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$
4. $(x-y-1)\,dy = (x+y-5)\,dx.$
   Ж: $\operatorname{arctg}\dfrac{y-2}{x-3} = \ln\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} + C.$

4-§. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларнинг ечилишига доир мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{2x}{\cos x}.$$

Ечиш. $y = uv$ алмаштиришни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - uv\,\mathrm{tg}\,x = \frac{2x}{\cos x}$$

ёки

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - u\,\mathrm{tg}\,x\right) = \frac{2x}{\cos x}.$$

u ни

$$\frac{du}{dx} - u\,\mathrm{tg}\,x = 0$$

бўладиган қилиб танлаймиз. Интегралласак,

$$\ln u = -\ln\cos x \quad \text{ёки} \quad u = \frac{1}{\cos x}.$$

v ни ўзгарувчилари ажраладиган

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{\cos x} \tag{4.1}$$

дан топиш учун

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{\cos x}$$

тенгламанинг хусусий ечимини танлаб олсак кифоя. u нинг ўрнига унинг қийматини (4.1) тенгламага қўямиз:

$$dv = 2xdx;\ v = x^2 + C.$$

Умумий ечим узил-кесил қуйидаги кўринишни олади:

$$y = \frac{1}{\cos x}(x^2 + C).$$

Бу системани ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули (Лагранж усули) билан ечиш мумкин. Унинг моҳияти қуйидагидан иборат: мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимида C ўзгармас шундай $C(x)$ функцияга алмаштириладики, натижада бир жинсли тенгламанинг умумий ечими бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимига айланади.

Бизнинг ҳолда бир жинсли тенглама ва унинг умумий ечими мос равишда бундай ёзилади:

$$\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{tg}\,x = 0$$

$$y = \frac{C}{\cos x},$$

бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас.

Энди C нинг x нинг функцияси ва $y = \frac{C}{\cos x}$ бир жинсли бўлмаган тengламанинг ечими деб ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot C + \frac{1}{\cos x} \frac{dC}{dx}.$$

y ва $\frac{dy}{dx}$ ни дастлабки тенгламага қўйиб, $C(x)$ функцияни аниқлаш учун ушбу дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} C + \frac{1}{\cos x} \frac{dC}{dx} - C \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2x}{\cos x},$$

бу ердан $dC = 2xdx$ ва $C(x) = x^2 + C_1$, бунда C_1 — ўзгармас, энди чизиқли тенгламанинг умумий ечими бундай бўлади:

$$y = \frac{x^2 + C_1}{\cos x}.$$

2-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$e^{x^2} (y' + 2xy) = 2x \text{ ёки } y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

Ечиш. $y = uv$ алмаштиришни бажарамиз:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + 2x\ uv = 2xe^{-x^2}$$

u ни

$$\frac{du}{dx} + 2xu = 0$$

бўладиган қилиб танлаймиз:

$$\frac{du}{u} + 2xdx = 0, \ \ln u + x^2 = \ln C - x^2$$

$$u = e^{-x^2}$$

Энди

$$u \frac{dv}{dx} = 2\ xe^{-x^2}$$

тенгламада u нинг ўрнига унинг қийматини қўйиб,

$$e^{-x^2} \frac{dv}{dx} = 2xe^{-x^2}$$

ни, уни интеграллаб эса, $v = x^2 + C$ ни ҳосил қиламиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = e^{-x^2} (x^2 + C)$$

кўринишга эга.

3-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$(x^2 + y^2 - 2x - 2y) dx + 2(y - 1) dy = 0.$$

Ечиш. Бу тенглама ўзгарувчини

$$y^2 - 2y = t \qquad (4.2)$$

алмаштириш йўли билан қуйидаги чизиқли тенгламага келтирилади:

$$2(y-1)\,dy = dt$$

(4. 2) алмаштириш бажарилганидан кейин тенглама

$$(x^2 + 2x + t)\,dx + dt = 0$$

ёки

$$\frac{dt}{dx} + t + x^2 + 2x = 0. \qquad (4.3)$$

кўринишга келади. Бу t га нисбатан чизиқли тенгламадир. Уни Лагранж усули билан ечамиз:

$$\frac{dt}{dx} + t = 0; \ \ln t + x = \ln C$$

$$t = Ce^{-x}$$

$$t' = C'e^{-x} - Ce^{-x}$$

t ни (4. 3) тенгламага қўямиз:

$$C'e^{-x} + x^2 + 2x = 0,$$

$$\frac{dC}{dx} + (x^2 + 2x)\,e^{x} = 0,$$

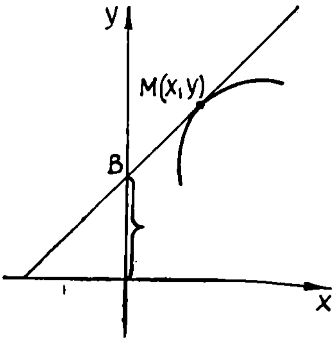
$$C = -e^{x}x^2 + C, \ t = y^2 - 2y =$$

$$= (C_1 - e^{x}x^2)\,e^{-x}$$

ёки

$$x^2 + y^2 - 2y = Ce^{-x}.$$

4-мисол. Эгри чизиқ абсциссаси 2 га тенг нуқтада уринма абсцисса ўқининг мусбат қисми билан 45° бурчак ташкил қилади. Уринманинг ординаталар ўқидан кесадиган кесмаси уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенг. Шу эгри чизиқ тенгламасини тузинг (76- шакл).



76- шакл

Ечиш. Уринма тенгламаси:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Уринманинг ординаталар ўқидан ажратадиган Y_0 кесмаси қуйидагига тенг:

$$Y_0 = +y + \frac{dy}{dx}(-x), \quad X_0 = 0.$$

ёки

$$Y_0 = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Масала шартига кўра бу кесма x^2 га тенг.

Масаланинг дифференциал тенгламаси:

$$y - x\frac{dy}{dx} = x^2. \qquad (4.4)$$

Бу чизиқли тенглама бўлиб, уни ечсак, (4. 4) тенгламанинг умумий ечими

$$x^2 - Cx + y = 0 \qquad (4.5)$$

ни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартлар: $x = 2$ да $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} 45° = 1$. (4. 5) тенгламадан:

$$2x - C + \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$C = 2x + \frac{dy}{dx} = 2\cdot 2 + 1,\ C = 5.$$

Изланаётган эгри чизиқ тенгламаси бундай бўлади:

$$y + x^2 - 5x = 0.$$

4- дарсхона топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

1. $y' - \frac{xy}{1+x^2} = x.$

Ж: $y = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}.$

2. $(x - 2xy - y^2)\cdot y' + y^2 = 0.$

Ж: кўрсатма. y — аргумент, x эса функция деб олинсин.

$$x = y^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{y}}\right).$$

3. $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xydx = 0.$

Ж: кўрсатма. Тенглама $x^2 = t$ шакл алмаштириш орқали чизиқли тенгламага келтирилади.

$y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C.$

4. $y' - y\cos x = \sin x \cos x.$

Ж: $y = -\sin x - 1 + Ce^{\sin x}.$

4- мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

1. $(1 + x^2)\,y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$

Ж: $y = (x + C)(1 + x^2).$

2. $xy' + 3y = x^2.$

Ж. $y = \frac{C}{x^3} + \frac{x^3}{5}.$

3. $y' - \frac{x}{x^2 - 1}\,y = x.$

Ж: $y = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2-1}$.

4. $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$.

Ж: $Cy^3 = y^2 - 2x$.

5- §. Бернулли тенгламаси

Бернулли тенгламасининг ечилишига мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$ Бернулли тенгламасини интегралланг.

Ечиш. $x \neq 0$, $y \neq 0$ деб фараз қилиб ва тенгламанинг иккала томонини $x\sqrt{y}$ га бўлиб,

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. У $n = \frac{1}{2}$ бўлган Бернулли тенгламасидир.

$$z = \sqrt{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$$

янги ўзгарувчини киритиш орқали

$$\frac{dz}{dx} - 2\frac{z}{x} = \frac{x}{2}$$

чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз.

Аввал чизиқли бир жинсли тенгламани ечамиз, яъни:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} \text{ ёки } \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}$$

ни интеграллаб,

$$\ln z = 2\ln x + \ln C \text{ ёки } z = cx^2$$

ни ҳосил қиламиз. Энди ўзгармасни вариациялашни қўллаймиз:

$$\frac{dz}{dx} = 2Cx + x^2\frac{dC}{dx}.$$

Буни чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламага қўйиб,

$$2Cx + \frac{x^2dC}{dx} - \frac{2Cx^2}{x} = \frac{x}{2}$$

ёки

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2x},$$

$$C = \frac{1}{2}\ln x + C_1$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$z = x^2\left(C_1 + \frac{1}{2}\ln x\right)$$

ёки

$$y = x^4\left(C_1 + \frac{1}{2}\ \ln x\right)^2$$

ечимга эга бўламиз.

2-мисол Физикада R қаршилик ва L ўзиндукцияга эга бўлган занжирда i ток кучи ва E электр юритувчи куч орасида қуйидаги муносабат ҳосил қилинади:

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Агар E ни t нинг берилган функцияси сифатида қараладиган бўлса, бу ток кучи i учун чизиқли дифференциал тенгламадир. Уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}. \qquad (5.1)$$

(5. 1) тенгламани $t = 0$ да $i = 0$ бошланғич шартларда $E = \text{const}$ деб (ток, ўзгармас электр юритувчи куч бўлмаган занжирни улаш) ечинг.

Ечиш Бир жинсли чизиқли тенгламани интегралласак

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt,\ i = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

ни беради. Ўзгармасни вариациялаш ўрнига (5.1) тенгламанинг умумий ечимини, унинг хусусий ечимини бирор ўзгармас A сифатида танлаб топамиз. Уни тенгламага қўйсак,

$$\frac{R}{L}A = \frac{E}{L},\quad A = \frac{E}{R}.$$

Шундай қилиб, (5. 1) тенгламанинг умумий ечими бундай бўлади:

$$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

C ни $t = 0$, $i = 0$ бошлангич шартлардан аниқлаймиз·

$$0 = \frac{E}{R} + C,\ C = -\frac{E}{R}.$$

Изланаётган хусусий ечим бундай бўлади:

$$i = \frac{E}{R}\left(t - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

$t = 0$ да ток кучи 0 га тенг, кейин $\frac{E}{R}$ ўзгармас қийматига тез эришади (ўзгармас токнинг қарор топиш жараёни).

3-мисол. Эгри чизиқ ўзгарувчи нуқтаси радиус-векторининг квадрати бу нуқта орқали ўтказилган нормалнинг y ўқдан ажратган кесмасига тенг. Эгри чизиқ (3, 0) нуқтадан ўтади. Унинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Ўзгарувчи нуқта радиус-векторининг квадрати x^2+y^2 га тенг. Нормал тенгламаси:

$$Y-y=-\frac{dx}{dy}(X-x).$$

Нормалнинг y ўқдан кесадиган кесмаси ($X=0$ да):

$$Y=x\frac{dx}{dy}+y.$$

Масала шартига кўра $x^2+y^2=Y$, ёки

$$x^2+y^2=x\frac{dx}{dy}+y,$$

ёки

$$\frac{dx}{dy}-x=\frac{y^2}{x}-\frac{y}{x}=(y^2-y)\,x^{-1},$$

$\frac{dx}{dy}-x=(y^2-y)\,x^{-1}$ тенглама x га нисбатан Бернулли тенгламаси.

Уни ечиб,

$$x^2+y^2=Ce^{2y}$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз. Эгри чизиқ (3, 0) нуқтадан ўтгани учун

$$C=9.$$

Изланаётган эгри чизиқ тенгламаси:

$$x^2+y^2=9e^{2y}$$

4-мисол. Нуқтанинг исталган t вақтдаги v тезлиги ва ўртача тезлиги айирмаси шу вақт ичида ўтилган йўлнинг квадратига пропорционал. $t=0$ да $s=s_0=0$ ва $v=v_0=1$ ни билган ҳолда ҳаракат қонунини топинг.

Ечиш. t пайтдаги тезлик

$$v=\frac{ds}{dt}$$

га, ҳаракат бошлангандан ўтган t вақт ичидаги ўртача тезлик

$$\bar{v}=\frac{s-s_0}{t}=\frac{s}{t}\ (\text{чунки } s_0=0)$$

га тенг. Масала шартига кўра

$$v-\bar{v}=ks^2,\ [k]=1(\text{см}\cdot\text{с})^{-1},$$

бу ердан ҳаракатнинг қуйидаги дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{ds}{dt}-\frac{s}{t}=s^2. \tag{5.2}$$

Бу Бернулли тенгламасидир. Буни ечиб, (5. 2) тенгламанинг умумий ечими

$$s = -\frac{2t}{t^2 + C} \tag{5.3}$$

ни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартлар:

$$t = 0 \text{ да } \frac{ds}{dt} = 1.$$

Бироқ

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2t^2 - 2C}{(t^2 + C)^2}.$$

Бундан

$$1 = 2 \cdot \frac{-C}{C^2},\ C = -2.$$

Буни умумий ечимга қўйиб, ҳаракат қонуни тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$s = -\frac{2t}{t^2 - 2}$$

ёки

$$s = \frac{2t}{2 - t^2}.$$

5-дарсхона топшириқлари

Тенгламаларни ечинг:

1. $\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \cos^2 x.$

Ж: $y = \frac{C}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2 \cos x}.$

2. $\frac{dy}{dx} = 2xy - x^3 + x.$ Ж: $y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2} x^2.$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1 + x^2} \cdot y = \frac{1}{x(1 + x^2)}$

Ж: $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \left(C + \ln \frac{\sqrt{1 + x^2} - 2}{x}\right).$

4. Нормал абсциссалар ўқидан ўзгарувчи нуқта радиус векторининг квадратига тенг кесма ажратади. Эгри чизиқ (0, 3) нуқтадан ўтишини билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

Ж: $x^2 + y^2 = 9e^{2x}.$

5- мустақил иш топшириқлари.

Тенгламаларни ечинг:

1. $y' + 5y = xy^2.$ Ж: $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{10}\right) + C}}.$

2. $xy' - 3y + x^2y^2 = 0$. Ж: $y = \dfrac{1}{\frac{1}{3}(x-1) + C}$.

3. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. Ж: $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

4. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$. Ж: $y = \dfrac{1}{(1+x)\,(C + \ln|1+x|)}$.

5. Уриниш нуқтаси координаталарининг ўрта геометриги уринманинг ординаталар ўқидан ажратадиган кесмасининг уриниш нуқтаси ординатасининг иккиланишига нисбатига тенг. Эгри чизиқ (1, 1) нуқтадан ўтишини билган ҳолда, унинг тенгламасини тузинг. Ж: $xy = 1$ ва $x - y(x-2)^2 = 0$.

6- §. Тўлиқ дифференциалли тенглама. Интегралловчи кўпайтувчи

Мавзуга доир мисолларнинг ечилишига намуналар келтирамиз.

1- мисол. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$ тенгламанинг чап томонини тўлиқ дифференциал эканини текширинг ва уни ечинг.

Ечиш $M = 3x^2 + 6xy^2$, $N = 6x^2y + 4y^3$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12\,xy \text{ ва } \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy.$$

Демак,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

шарт бажариляпти.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \quad U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$\varphi'(y)$ ни ҳисоблаймиз:

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - 6x^2y = N - 6x^2y = 4y^3,$$

$\varphi(y) = y^4 + C$. Демак, тўлиқ интеграл

$$u = x^3 + 3x^2\,y^2 + y^4 = C.$$

Энди интегралловчи кўпайтувчини қўллаш орқали ечиладиган дифференциал тенгламаларга доир мисоллар кўрамиз.

2- мисол. $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$

тенгламани ечинг.

Ечиш. Бунда

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1.$$

Демак,

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = 1, \quad \mu = e^{x}.$$

$$e^{x}\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^{x}(x^2 + y^2)\,dy = 0$$

тенглама тўла дифференциалли тенглама. Уни интеграллаймиз:

$$v = \int e^{v}\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \varphi(y) = y\int e^{x}(2x + x^2)\,dx +$$

$$+\frac{y^3}{3}e^{x} + \varphi(y) = ye^{x}\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) + \varphi(y).$$

$\varphi(y)$ ни топиш учун $\frac{\partial v}{\partial y}$ ни ҳиссблаймиз ва уни $M(x, y)\,N(x, y)$ га тенглаштирамиз: $e^{x}(x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^{x}(x^2 + y^2)$, бундан $\varphi'(y) = 0$ ва умумий интеграл

$$ye^{x}\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

3- мисол. $\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg}x = \cos x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенглама $e^{\int \operatorname{tg}x dx} = \cos x$ интегралловчи кўпайтувчига эга, тенгламанинг иккала томонини унга кўпайтириб

$$\cos x dy - y\sin x dx - \cos^2 x dx = 0$$

га эга бўламиз, бундаги чап томон тўла дифференциал, интеграллаб топамиз:

$$y\cos x - \int \cos^2 x dx = C$$

ёки

$$y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x = C$$ — умумий интеграл.

4- мисол. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\mu = \frac{1}{x(x - y) + y(x + y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}$ кўпайтувчига тенгламанинг ҳар иккала томонини кўпайтириб ва гуруҳлаб

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

ни оламиз, ёки

$$\frac{1}{2}\,d\ln(x^2 + y^2) + d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = 0,$$

бундан

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

4- мисол. $(x - y^2)\,dx + 2xydy = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламани иккита гуруҳга ажратамиз:

$$(xdx) + (-y^2dx + 2xydy) = 0.$$

Биринчи қавснинг интегралловчи кўпайтувчиси 1 эканлиги аён, интегралловчи кўпайтувчининг умумий ифодаси $\mu_1 = \varphi(x)$; иккинчи қавснинг интегралловчи кўпайтувчисини $\frac{1}{xy^2}$ га кўпайтириб (ўзгарувчилари ажралган

$$-\frac{dx}{x^2}+\frac{2ydy}{y^2}=0$$

тенгламага эга бўламиз. Умумий интеграл: $v_2 = \frac{y^2}{x} = C$. Иккинчи қавснинг интегралловчи кўпайтувчиси $\mu_2 = \frac{1}{xy^2}\psi\left(\frac{y^2}{x}\right)$. Энди ψ ни шундай танлаймизки, μ_2 нинг кўриниши μ_1 нинг кўринишида бўлсин, яъни фақат v нинг функцияси бўлсин. Бунинг учун $\psi(v_2) = v_2$ ни қўйиш етарли эканлиги кўриниб турибди, шундай қилиб, пировардида $\mu = \frac{1}{x^2}$. Берилган тенгламани μ га кўпайтириб

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0$$

га эга бўламиз, бундан

$$\ln x+\frac{y^2}{x}=C.$$

6- дарсхона топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларнинг чап томони тўлиқ дифференциал эканини текширинг ва уларни ечинг:

1. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$

   Ж: $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{y}{x}+x-\frac{1}{y}=C.$

2. $\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x-y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0.$

   Ж: $\frac{xy}{x-y}+\ln\frac{x}{y}=C.$

3. $(e^x\sin y+x)\,dx+(e^x\cos y+y)\,dy=0.$

   Ж: $x^2+y^2+2e^x\sin y=C.$

Қуйидаги тенгламаларни интегралловчи кўпайтувчи киритиш орқали ечинг:

4. $y^3dx+2(x^2-xy^2)\,dy=0.$

   Ж: $\mu=\frac{1}{x^2y}$; $2\ln y-\frac{y^2}{x}=C.$

5. $(x^2y^2-1)\,dy+2xy^3\,dx=0.$

   Ж: $x^2y+\frac{1}{y}=C.$

Кўрсатма $x^2y^2dy+2xy^3dx$ учун умумий интегралловчи кўпайтувчини топиб ихтиёрий функцияни шундай танлаймизки, y x га боғлиқ бўлмасин.

6. $(1-x^2y)\,dx+x^2(y-x)\,dy=0$, $(\mu=\mu(x))$.

Ж: $xy^2-2x^2y-2=Cx$.

6-мустақил иш топшириқлари

Берилган тенгламаларнинг чап томони тўла дифференциал эканлигини текширинг ва уларни ечинг:

1. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$. Ж: $\sqrt{1+x^2+y^2}+$

$+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=C$.

2. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2 3x^2}{y^n}dy=0$. Ж: $\dfrac{x^3}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$

3. $(x+\sin y)\,dx+(x\cos y+\sin y)\,dy=0$

Ж: $\dfrac{1}{2}x^2+x\sin y-\cos y=C$.

Қуйидаги тенгламаларни интегралловчи кўпайтувчи киритиш ёрдамида ечинг:

4. $(2xy^2-y)\,dx+(y^2+x+y)\,dy=0$.

Ж: $x^2-\dfrac{x}{y}+y+\ln y=C$.

5. $(2x^3+3x^2y+y^2-y^3)\,dx+(2y^3+3xy^2+x^2-x^3)\,dy=0$.

Ж: $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\dfrac{x^3+xy+y^3}{x+y}=C$.

6. $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0$.

Ж: Кўрсатма $\mu=\mu(x)=e^x$

$(x\sin y+y\cos y-\sin y)\,e^x=C$.

7-§. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли тенгламалар

1. n-даражали биринчи тартибли тенгламалар. Бундай тенгламалар умуман

$$F(x,\ y,\ y')=A_n(x,\ y)(y')^n+A_{n-1}(x,\ y)(y')^{n-1}+\qquad+A_1(x,\ y)=0$$

кўринишда берилади.

1-мисол. Қуйидаги тенгламани ечинг:

$$y'^2+yy'-x^2-xy=0.$$

Ечиш. Тенгламани y' га нисбатан ечиб ёки чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб, қуйидаги иккита тенгламани ҳосил қиламиз:

1) $y'=x$, 2) $y'=-y-x$.

Ўнг томонларнинг иккаласи ҳам бутун Oxy текисликда бир қийматли ва узлуксиз; мос равишда қуйидаги иккита ечимга эга бўламиз:

1) $y=\dfrac{x^2}{2}+C$. 2) $y=Ce^{-x}-x+1$.

2-мисол. Тенгламани ечинг: $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$.

Ечиш. Тенгламани y' га нисбатан ечамиз:

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}.$$

Радикалли битта формула билан ифодаланган иккита тенглама ҳосил бўлди. Бу тенглама бир жинсли бўлиб, у қуйидагича интегралланади:

$$\frac{y}{x} = u, \quad u + x\frac{du}{dx} = u \pm \sqrt{u^2 - 4}, \frac{du}{\pm\sqrt{u^2 - 4}} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln(u \pm \sqrt{u^2 - 4}) = \ln x - \ln C, \quad u \pm \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{C}$$

ёки

$$\pm\sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{C} - u.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга ошириб, соддалаштирсак:

$$x^2 = 2uCx - 4C^2$$

ёки дастлабки ўзгарувчиларга қайтсак,

$$x^2 = 2C(y - 2C).$$

Биз параболалар оиласини ҳосил қилдик, шу билан бирга текисликнинг $y^2 - 4x^2 > 0$ бўладиган (яъни y' учун тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўладиган) қисмининг ҳар бир нуқтасидан оиланинг иккита эгри чизиғи ўтади (77-шакл).

2. Ўзгарувчилардан бирини ошкора ўз ичига олмайдиган тенгламалар. Қуйидаги ҳолларни кўрайлик:

A) $F(x, y') = 0$

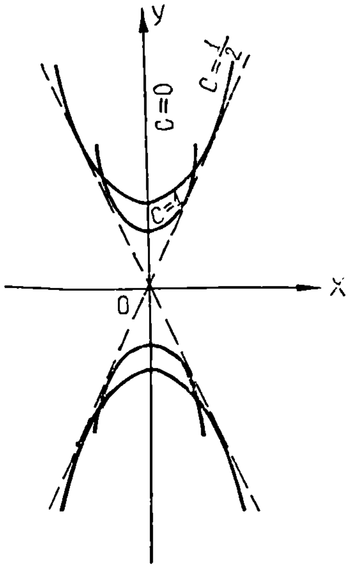
а) $x = \varphi(p), \quad p = y'$

3-мисол. $e^{y'} + y' = x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенглама y' га нисбатан элементар функциялар орқали ечилмайди, лекин у x га нисбатан ечилади:

$$x = e^p + p,$$

сўнгра



77- шакл

$$dy = pdx = p(e^p + 1)\,dp$$

ва, ниҳоят,

$$y = \int p(e^p + 1)\,dp = e^p(p - 1) + \frac{p^2}{2} + C.$$

Шундай қилиб, биз x ва y ни p нинг функцияси қилиб ифодаладик.

б) $x = \psi(t)$, $p = \chi(t)$, $y' = p$.

4-мисол. $x^3 + p^3 - 3xp = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. x ва p учун параметрик ифодани ҳосил қилиш мақсадида $p = tx$ деб оламиз. Буни берилган тенгламага қўйиб ва x^2 га қисқартириб, топамиз:

$$x(1 + t^3) = 3t, \quad x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad p = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Ушбу муносабатни ёзамиз:

$$dy = pdx = \frac{3t^2}{1 + t^3}\cdot\frac{3(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2}dt, \quad y = 3\int\frac{(1 - 2t^3)\cdot 3t^2}{(1 + t^3)^3}dt.$$

Интеграллаш учун $u = 1 + t^3$ ўзгарувчини киритамиз:

$$y = 3\int\frac{(3 - 2u)du}{u^3} = 9\int\frac{du}{u^3} - 6\int\frac{du}{u^2} =$$

$$= -\frac{9}{2(1 + t^3)^2} + \frac{6}{1 + t^3} + C.$$

Б) $F(y, y') = 0$, $y' = p$.

5-мисол. $y = p + \ln p$, $p = y'$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right)dp = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p^2}, \quad x = \ln p - \frac{1}{p} + C.$$

6-мисол. $p^3 - y^2(a - p) = 0$, $p = y'$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y = pt$ деб олиб, берилган тенгламадан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$p = \frac{at^2}{1 + t^2}, \text{ сўнгра } y = \frac{at^3}{1 + t^2}.$$

$dx = \frac{dy}{p}$ муносабатдан

$$dx = \frac{1 + t^2}{at^2}\cdot\frac{a(3t^2 + t^4)}{(1 + t^2)^2}dt = \frac{3 + t^2}{1 + t^2}dt$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$x = \int\frac{3 + t^2}{1 + t^2}dt = \int dt + 2\int\frac{dt}{1 + t^2} = t + 2\,\mathrm{arctg}\,t + C.$$

Ушбу

$$x = t + 2\operatorname{arctg} t + C, \quad y = \frac{at^2}{1+t^2}$$

тенглама берилган тенгламанинг параметрик шаклдаги тенгламасидан иборат.

7-дарсхона топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни интегралланг:

1. $(y')^2 \cdot y + y'(x - y) - x = 0.$
   Ж: $y = x + C$; $y = \sqrt{C^2 - x^2}$
2. $(y')^3 - (x^2 + xy + y^2)(y')^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^2)y' - x^2y^3 = 0.$
   Ж: $y = \frac{1}{3}x^3 + C$; $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ $y = \frac{1}{C-x}$.
3. $x(y')^3 = 1 + y'$
   Ж: $x = t^3 + t^2$, $y = \frac{3}{2}t^2 + 2t + C$.
4. $(y')^3 + y^3 - 3yy' = 0.$
   Ж: $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$; $x = -t + \ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}}$.

7-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни интегралланг:

1. $x^2(y')^2 - 2xy \cdot y' + y^3 = x^2y^2 + x^4$
   Ж: $y = x\operatorname{sh}(x + C)$.

Кўрсатма. Тенгламани y' га нисбатан ечиб, $\frac{y}{x} = u$ деб белгиланг.

2. $x(y')^2 + 2xy' - y = 0.$
   Ж: $(y - C)^2 = 4xC.$
3. $(y')^3 - x^3(1 - y') = 0.$
   Ж: $x = \frac{1}{t} - t^2$; $y = \frac{1}{t} - \frac{t^2}{2} + \frac{2t^5}{5} + C.$
4. $y^2(y' - 1) = (2 - y')^2.$
   Ж: $y = x - C - \frac{1}{x-C}$.

8-§. Клеро ва Лагранж тенгламаларига параметр киритишнинг умумий усуллари

Клеро тенгламасини ечишга доир мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$y = xy' + y'^2.$$

Ечиш. $y' = p\left(\frac{dy}{dx} = p\right)$ деб олиб,

$$y = xp + p^2.$$

га эга бўламиз. x га нисбатан дифференциаллаб топамиз:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$\frac{dp}{dx}(x+2p)=0,$$

бундан:

1) $\frac{dp}{dx}=0$ ёки 2) $x+2p=0.$

1-ҳол. $\frac{dp}{dx}=0$, $p=C$, яъни $\frac{dy}{dx}=C$ ва умумий ечим $y=Cx+C_1$.

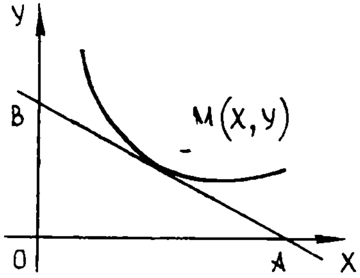
2-ҳол. $x+2p=0$, бу ерга $y=xp+p^2$ ни ҳам бириктириб ва p ни чиқариб,

$$4y+x^2=0$$

махсус ечимга эга бўламиз.

Изоҳ. Агар x ва y ни Декарт координаталари сифатида қарасак, у ҳолда умумий ечим тўғри чизиқлар оиласидан иборат, махсус ечим эса тўғри чизиқлар оиласининг ўровчисини беради. Бу ҳолда ўровчи параболадан иборат.

2-мисол. Эгри чизиққа ўтказилган уринма тўғри бурчакли координата ўқлари билан юзи ўзгармас 2 га тенг бўлган учбурчак ҳосил қилади. Бу эгри чизиқни топинг (78-шакл).



78-шакл.

Ечиш. Изланаётган эгри чизиқ уринмасининг кесмалардаги тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Шартга кўра

$$S_{\triangle}=\frac{ab}{2}=2,\quad ab=4,$$

яъни $b=\frac{4}{a}$ ва биз ушбу эгри чизиқлар оиласига эга бўламиз:

$$\frac{x}{a}+\frac{ay}{4}=1. \qquad (8.1)$$

Бу оиланинг дифференциал тенгламасини топамиз. (8.1) ни x бўйича дифференциаллаймиз ва a ни чиқарамиз:

$$\frac{1}{a}+\frac{ay'}{4}=0,\quad a^2y'+4=0,\quad a^2=-\frac{4}{y'},$$

$$a=2\sqrt{-\frac{1}{y}}=2\frac{1}{\sqrt{-y'}}$$

a ни (8.1) га қўямиз:

$$\frac{x\sqrt{-y'}}{2}+\frac{y}{2\sqrt{-y'}}=1$$

ёки

$$y = xy' + 2\sqrt{-y'}. \qquad (8.2)$$

Бу Клеро тенгламасидир. Унинг умумий ечими:

$$y = Cx + 2\sqrt{-C}. \qquad (8.3)$$

Бироқ бизни изланаётган эгри чизиқни берадиган махсус ечим қизиқтиради. Сўнгги тенгликни

$$y = px + 2\sqrt{-p}$$

кўринишда ёзиб, уни топамиз. Уни $\frac{dy}{dx} = p$ эканлигини назарда тутиб, x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + 2\frac{-\frac{dp}{dx}}{2\sqrt{-p}}$$

ёки

$$x\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{1}{\sqrt{-p}} = 0.$$

Сўнгги тенгламани

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{\sqrt{-p}}\right) = 0$$

кўринишда ёзиб, икки ҳолни кўрамиз:

1) $\frac{dp}{dx} = 0, \quad \left(x - \frac{1}{\sqrt{-p}}\right) \neq 0, \quad p = C, \quad y = Cx + C_1,$

2) $\frac{dp}{dx} \neq 0, \quad \left(x - \frac{1}{\sqrt{-p}}\right) = 0, \quad p = -\frac{1}{x^2}.$

Охирги тенгликка $y = px + 2\sqrt{-p}$ тенгликни бириктириб ҳамда p ни чиқариб

$$xy = 1$$

эканлигини топамиз. Бу тенг томонли гиперболадир.

Энди Лагранж тенгламасини ечиш усулини қараймиз.

3-мисол. $y = 2xy' - y'^2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y' = p$ деб белгилаймиз, у ҳолда

$$y = 2xp - p^2.$$

Бу тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

ёки $\frac{dy}{dx} = p$ бўлганлиги учун

$$p = 2p + 2(x - p)\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$p+2(x-p)\frac{dp}{dx}=0,$$

ёки

$$p\frac{dx}{dp}+2x=2p. \tag{8.4}$$

Бу x га нисбатан чизиқли тенглама. Уни ечамиз:

$$p\frac{dx}{dp}+2x=0, \quad \frac{dx}{x}+\frac{2dp}{p}=0, \quad \ln x+2\ln p=\ln C.$$

$$x=C/p^2, \quad x'=\frac{C'p^2-2pC}{p^4}=\frac{C'}{p^2}-\frac{2C}{p^3}$$

ни (8.4) га қўямиз:

$$\frac{C'}{p}-\frac{2C}{p^2}+\frac{2C}{p^3}=2p, \ C'=2p^2,$$

$$C=\frac{2}{3}p^3+C_1.$$

Демак, умумий ечим қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2}=\dfrac{2}{3}p+\dfrac{C_1}{p^2}, \\ y=2px-p^2. \end{cases}$$

8-дарсхона топшириқлари

1. Қуйидаги Лагранж тенгламасини ечинг:

$$y=xy'^2+y'^2.$$

Ж: $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$, $y=0$.

2. Қуйидаги Клеро тенгламаларини ечинг:

а) $y=xy'-\frac{1}{4}y'^2$.

Ж: $y=Cx-\frac{C^2}{4}$ ва $y=x^2$.

б) $y=xy'-\sqrt{1+y'^2}$.

Ж: $y=Cx-\sqrt{1+C^2}$ ва $y^2+x^2=1$.

в) $y=xy'+\frac{2y'}{y'-1}$.

Ж: $y = Cx + \frac{2C}{C-1}$ ва $(y - x - 2a)^2 = 8x$.

8-мустақил иш топшириқлари

1. Қуйидаги Лагранж тенгламасини ечинг:

$$y = x\left(\frac{1}{x} + y'\right) + y'^2.$$

Ж: $y = Cx + C^2 + 1$ ва $y = 1 - \frac{x^3}{4}$.

2. Қуйидаги Клеро тенгламаларини ечинг:

а) $y = xy' + y' - y'^2$.

Ж: $y = Cx + C - C^2$ ва $4y = (x + 1)^2$.

б) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

Ж: $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$ ва $y^2 - x^2 = 1$.

в) $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

Ж: $y = Cx + \frac{1}{C}$ ва $y^2 = 4x$.

9-§. Траектория ҳақидаги масалалар

Мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Ушбу айланалар оиласининг ортогонал траекториясини топинг:

$$x^2 + y^2 + 2Cy = 0. \tag{9.1}$$

Ечиш. Аввал C параметрни чиқариб, оиланинг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз, бунинг учун (9.1) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$2x + 2yy' + 2Cy' = 0. \tag{9.2}$$

Энди C ни (9.1) ва (9.2) тенгликлардан чиқарамиз. (9.1) тенгликдан

$$2C = -\frac{x^2 + y^2}{y}$$

ни топиб ва (9.2) тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2x + 2yy' - \frac{x^2 + y^2}{y} y' = 0$$

ёки

$$2x - \frac{x^2 - y^2}{y} y' = 0,$$

яъни

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Бу $x^2 + y^2 + 2Cy = 0$ тенглама билан берилган эгри чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламасидир. Ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

яъни

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Бир жинсли тенгламага эга бўлдик. $y = zx$ деб олиб, уни интеграллаймиз:

$$\frac{2zdz}{1 + z^2} = -\frac{dx}{x}, \text{ бундан } x(1 + z^2) = \overline{C} \text{ ёки } \overline{C} = 2C$$

деб ва z ўрнига $z = \frac{y}{x}$ ни қўйиб,

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бу $x^2 + y^2 + 2Cy = 0$ оилага нисбатан ортогонал траекториялар оиласининг тенгламасидир.

2-мисол. Ушбу тўғри чизиқлар оиласи

$$y = Cx$$

нинг бу оиланинг чизиқларини тангенси $\operatorname{tg} \alpha = k$ бўлган α бурчак остида кесиб ўтувчи изогонал траекториялари оиласини топинг.

Ечиш. Берилган оиланинг дифференциал тенгламасини ёзамиз. $y = Cx$ ни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = C$$

Иккинчи томондан, шу тенгламанинг ўзидан

$$C = \frac{y}{x}.$$

Демак, берилган оиланинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

кўринишда бўлади. Энди

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_т}{dx} - k}{k\frac{dy_т}{dx} + 1}$$

муносабатдан фойдаланиб, изогонал траекторияларнинг

$$\frac{\frac{dy_{\text{т}}}{dx}-k}{k\frac{dy_{\text{т}}}{dx}+1}=\frac{y}{x}$$

дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз. Т индексни тушириб қолдириб,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\frac{y}{x}}$$

ни топамиз. Бу бир жинсли тенгламани $y = zx$ алмаштириш ёрдамида интеграллаб,

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\ln C$$

умумий интегрални ҳосил қиламиз, у изогонал траекториялар оиласини аниқлайди. Бу оилага айнан қайси эгри чизиқлар киришини тасаввур этиш учун ушбу

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi,\quad \sqrt{x^2+y^2}=\rho$$

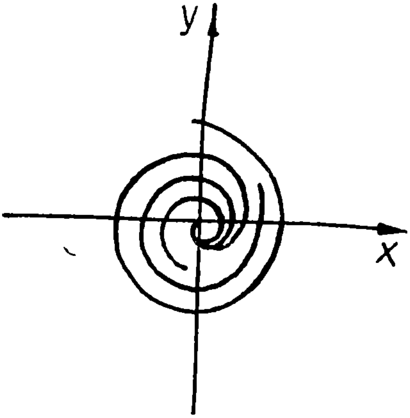
қутб координаталарга ўтамиз. Бу ифодаларни изогонал траекториялар оиласи тенгламасига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\ln\rho=\frac{1}{k}\varphi+\ln C$$

ёки

$$\rho=Ce^{\frac{\varphi}{k}}$$

Демак, изогонал траекториялар оиласи логарифмик спираллардан иборат (79-шакл).



79- шакл.

9-дарсхона топшириқлари

1. Координаталар бошидан чиқувчи ярим тўғри чизиқлар оиласи $y = ax$ нинг ортогонал траекторияларини топинг.

Ж: $x^2 + y^2 = C^2$.

2. Ушбу параболалар оиласи

$$y = Cx^2$$

нинг ортогонал траекторияларини топинг.

$$Ж:\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Демак, берилган параболалар оиласининг ортогонал траекториялари ярим ўқлари $a = 2C$, $b = C\sqrt{2}$ бўлган эллипслар оиласидан иборат.

3. $x^2 + y^2 = a^2$ айланалар оиласининг α бурчак остидаги ($\operatorname{tg}\alpha = k$) изогонал траекторияларини топинг.

Ж: $r = Ce^{k\Psi}$

9-мустақил иш топшириқлари

1. $x^2 - y^2 = a^2$ (a — параметр) эгри чизиқлар оиласининг ортогонал траекторияларини топинг.

$$Ж:\ y = \frac{C}{x}.$$

2. $x^2 + y^2 = 20x$ айланалар оиласининг ортогонал траекторияларини топинг.

Ж: Айланалар: $y = C(x^2 + y^2)$.

3. $y = Cx$ тўғри чизиқлар оиласининг $\omega = 45^\circ$ бўлган ҳол учун изогонал траекторияларини топинг.

Ж: Логарифмик спираллар: $x^2 + y^2 = e^{2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$

10-§. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган дифференциал тенгламалар

1. $y^{(n)} = f(x)$ **кўринишдаги тенглама**. Бу тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг чап ва ўнг томони n марта интегралланади.

1-мисол. $y''' = \cos 2x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y'' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$,

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C_1\right)dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2,$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2\right)dx = -\frac{1}{8}\sin 2x +$$

$$+ C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

2. $F(x, y', y'', \quad y^{(n)})$ **кўринишдаги тенглама**. Бу тенгламани ечиш учун $y' = p$ алмаштириш бажарилади.

2-мисол. $(x+2)y'' + y' = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y' = p$, $y'' = p'$ десак, $(x+2)\dfrac{dp}{dx} + p = 0$ бўлади.

Бу ердан $(x+2)\dfrac{dp}{dx} = -p$ бўлади.

Интеграллаш орқали қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{x+2}, \quad \ln p = -\ln(x+2) + \ln C_1,$$

$$\ln p = \ln(x+2)^{-1} + \ln C_1, \quad p = \frac{C_1}{x+2}.$$

Энди топилган p ни $y' = p$ га қўйсак,

$$y' = \frac{C_1}{x+2}, \quad y = \int \frac{C_1}{x+2}\,dx = C_1 \ln(x+2) + C_2$$

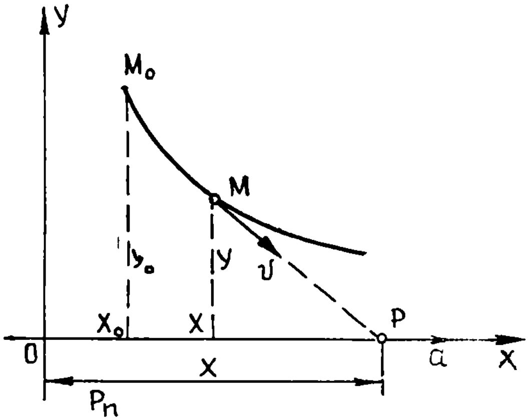
ни ҳосил қиламиз.

Демак, $y = C_1 \ln(x+2) + C_2$ экан.

3. $F(y, y', y'', \quad y^{(n)}) = 0$ **кўринишдаги тенглама**. Бу тенгламани ечишда $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ каби алмаштириш қилинади.

3-мисол. Қувиш чизиғи. Бундай кинематик масалани қарайлик. Ox ўқнинг мусбат йўналиши бўйлаб ўзгармас a тезлик билан P нуқта ҳаракатланмоқда. Oxy текисликда эса ўзгармас v тезлик билан M нуқта шундай ҳаракатланмоқдаки, унинг тезлик вектори доимо P нуқтага қараб йўналган. M нуқтанинг траекториясини топинг (80-шакл).

Ечиш. M нуқтанинг тўғри бурчакли декарт координаталарини (x, y) орқали ва P нуқтанинг абсциссасини X орқали белгилаймиз. Масала шартига кўра:



80- шакл.

$$x = X_0 + at, \tag{10.1}$$

$$dx^2 + dy^2 = vdt^2, \tag{10.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Y}{X - x}. \tag{10.3}$$

(10.1) тенгламадан $X - x = X_0 - x + at$ га, (10.3) дан эса

$$X_0 - x + at = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}} \tag{10.4}$$

га эга бўламиз.

x ни эркли ўзгарувчи сифатида оламиз (y дан x бўйича ҳосилаларни штрихлар билан белгилаймиз) ва t ни чиқарамиз; (10.2) дан

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}\sqrt[3]{1 + y'^2}$$

ни оламиз; (10.4) тенгламани x бўйича дифференциаллаб,

$$-1 + a\frac{dt}{dx} = \frac{yy'' - y'^3}{y'^2}$$

ёки

$$\frac{dt}{dx} = \frac{yy''}{y'^2}$$

ни ҳосил қиламиз. $\frac{dt}{dx}$ учун топилган иккала ифодани тенглаб ушбу қувиш чизиғининг дифференцнал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y'' = \frac{a}{v} \cdot \frac{y'^2}{y}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Бу тенгламага эркли ўзгарувчи кирмайди; юқорида баён қилинган умумий усулга асосан янги ўзгарувчи $y' = p$ ни киритамиз; бундан $y'' = p\frac{dp}{dy}$, у ҳолда

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{a}{v}\frac{p^2}{y}\sqrt{1 + p^2}$$

ёки

$$\frac{dp}{dy} = \frac{a}{v}\frac{p}{y}\sqrt{1 + p^2}$$

Ўзгарувчилар ажралади:

$$\frac{dp}{p\sqrt{1 + p^2}} = \frac{a}{v}\frac{dy}{y}.$$

Бу тенгликни интеграллаб (p манфий эканлигини ҳисобга олиб) топамиз:

$$\frac{dp}{p\sqrt{1 + p^2}} = -\frac{\frac{dp}{p^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{p}\right)^2}},$$

$$\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\right)=\frac{a}{v}\,(\ln y+\ln C),$$

бундан:

$$\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=(Cy)^{\frac{a}{v}}$$

Ихтиёрий ўзгармасларни энг осон усул билан киритиш учун P ва M нуқталар y ўққа нисбатан битта параллелда ётган пайтда M нуқтанинг ординатаси y_0 га тенг (яъни қувиш M_0P_0 ҳолатдан бошланади) деб фараз қиламиз; бу пайтда, равшанки, $\frac{1}{p}=0$, $C=\frac{1}{y_0}$ га тенг, оралиқ интеграл бундай ёзилади:

$$\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}} \qquad (10.5)$$

ёки шакл алмаштирсак,

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}=\frac{1}{\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}}=-\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1} \qquad (10.6)$$

(10.5) дан (10.6) ни айирсак,

$$\frac{2}{p}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}$$

ёки

$$dx=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}\right\}dy$$

$a\neq v$ деб (биз $a<$ деб ҳисоблаймиз, яъни M нуқта P нуқтани қувиб етиши мумкин) қувиш эгри чизиғининг изланаётган тенгламасини иккинчи квадратурадан топамиз:

$$x=\frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-\frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}+C_1,$$

бу ерда C_1 бошланғич абсцисса x_0 бўйича $y=y_0$ бўлганда осон топилади. Узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$x=\frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-1\right]-\frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}-1\right]+x_0.$$

Учрашиш нуқтаси абсциссасини $y=0$ деб, топамиз:

$$x_1 = x_0 + \frac{ay_0}{v\left(1-\frac{a^2}{v^2}\right)} = x_0 + y_0\frac{av}{v^2-a^2}.$$

Ниҳоят, қувишнинг давом этиш вақти:

$$T = \frac{x_1-x_0}{a} = \frac{y_0 v}{v^2-a^2}.$$

10-дарсхона топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

1. $y''' = \frac{1}{x}$.

Ж: $y = x^2 \ln\sqrt{x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

2. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.

Ж: $y = C_1\frac{x^3}{6} - \frac{C_1^3x^3}{2} + C_2x + C_3$.

3. $yy'' + y'^2 = y^2\ln y$

Ж: $\ln y = C_1\cdot e^x + C_2e^{-x}$.

10-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

1. $y''' = \ln x$.

Ж: $y = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C_1x + C_2$.

2. $(i-x^2)y'' - xy' = 0$.

Ж: $y = (\arcsin x)^2 + C_1\arcsin x + C_2$.

3. $y\cdot y'' - y'^2 = 0$.

Ж: $y = C_1e^{C_2x}$.

11-§. Чизиқли тенгламалар

1. Чизиқли бир жинсли тенгламалар.

1-мисол. $y'' - y = 0$ тенглама қуйидаги иккита хусусий ечимга эга эканлигини текшириш осон: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Уларнинг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли боглиқ эмаслигини аниқлаш учун қуйидаги Вронский детерминантини тузамиз:

$$w[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Демак, e^x ва e^{-x} фундаментал системани ҳосил қилади ва умумий ечим бундай ёзилади:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Энди

$$\overline{y}_1(0) = 1,\ \overline{y}_1'(0) = 0,\ \overline{y}_2(0) = 0,\ \overline{y}_2'(0) = 1$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $\overline{y}_1(x)$, $\overline{y}_2(x)$ нормал фундаментал системани тузамиз. Равшанки, $\overline{y}_1$ ва $\overline{y}_2$ лар e^x ва e^{-x} функцияларнинг чизиқли комбинациялари сифатида ифодаланади:

$$\overline{y}_1(x) = ae^x + b\,e^{-x},\ \overline{y}_2(x) = ce^x + d\,e^{-x}$$

a, b, c, d коэффициентларни аниқлаш учун $\overline{y}_1$ ва $\overline{y}_2$ ечимларнинг бошланғич шартларидан фойдаланамиз:

$$1 = a + b,\ 0 = a - b,\ 0 = c + d,\ 1 = c - d,$$

бу ердан

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{2},\ d = -\frac{1}{2}.$$

$$\overline{y}_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x,\quad \overline{y}_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\,x.$$

$\overline{y}_1$ ва $\overline{y}_2$ функциялар ёрдамида Коши бошланғич шартлари: $x = x_0$ да $y = 0$, $y' = y_0'$ ни қаноатлантирадиган ечимни ёза оламиз. Бу ечим бундай бўлади:

$$y = y_0 \operatorname{ch} x + y_0' \operatorname{sh} x.$$

2-мисол. Ушбу

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

тенглама $y_1 = x$ хусусий ечимга эга эканлигига ишонч ҳосил қилиш осон. Бизнинг ҳолда $a_1 = \frac{-2x}{1 - x^2}$ ва

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{Ce^{\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C_1 \right\}$$

формула ушбу ечимни беради:

$$y = x\left\{ \int \frac{Ce^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2} dx + C_1 \right\} = x\left\{ C \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} + C_1 \right\} =$$

$$= x\left\{ C \int \left[\frac{dx}{x^4} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1 - x} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1 + x} \right] + C_1 \right\} =$$

$$= x\left\{ C\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \right] + C_1 \right\} = C_1x +$$

$$+ C\left(\frac{1}{2}\,x\, \ln \frac{1 + x}{1 - x} - 1 \right).$$

Бу берилган тенгламанинг умумий ечимидир.

3-мисол. Фундаментал функциялари x, x^2, x^3 бўлган тенгламани тузинг.

Ечиш. Системани ушбу

$$W[y_1, y_2, \quad , y_n, y] = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 & & y_n & y \\ y_1' & y_2' & & y_n' & y' \\ & & & & . \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

формула бўйича тузамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & 2x & 3x^2 & y' \\ 0 & 2 & 6x & y'' \\ 0 & 0 & 6 & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Бу детерминантни сўнгги устун бўйича ёямиз:

$$2x^3y''' - 6x^2y'' + 12xy' - 12y = 0.$$

Бу ерда $W(x) = 2x^3$ ҳамда $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ оралиқларда нолга айланмайди. Бу оралиқлар учун

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$$

дифференциал тенгламага эгамиз.

2. Чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар

4-мисол. $y'' + y = 3x$ тенгламани кўрайлик. $y = 3x$ хусусий ечим эканлигини кўриш осон. Мос бир жинсли тенглама қуйидаги иккита чизиқли эркли хусусий ечимга эга:

$$y_1 = \cos x, \; y_2 = \sin x.$$

Юқоридагига асосан умумий ечим бундай бўлади:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x.$$

Энди берилган тенглама учун Коши масаласини ечамиз. $x = 0$ да $y = 1$, $y' = -1$ бошлангич шартларни қаноатлантирувчи ечимни топамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 3.$$

Бошланғич қийматларни қўйиб, $C_1 = 1$, $C_2 + 3 = -1$ эканини топамиз, бундан $C_2 = -4$ ва изланаётган ечим қуйидагидан иборат:

$$y = \cos x - 4 \sin x + 3x.$$

5-мисол. $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$ тенглама қуйидаги иккита хусусий ечимга эгалигини текширнш осон:

$$y_1 = 1, \; y_2 = x,$$

демак, мос бир жинсли тенглама $y_1 = x - 1$ ечимга эга. $y_1 = 1 + z$ ва $y = y_1 z$ ўрнига қўйишларни биргаликда олиб, янги изланаётган z функцияни

$$y = 1 + (x - 1)z$$

тенглама ёрдамида киритамиз, бундан:

$$y' = (x - 1)z' + z, \quad y'' = (x - 1)z'' + 2z'$$

Олинган ифодаларни берилган тенгламага қўйиб,

$$[(2x - x^2)(x - 1)z'' + 2(2x - x^2) + (x - 1)^2]\, z' = 0$$

ни топамиз, бундан:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{2}{x-1} + \frac{2-2x}{2x-x^2}, \quad z' = C_1\frac{2x-x^2}{(x-1)^2} = -C_1 + \frac{C_1}{(x-1)^2},$$

$$z = C_1 x - \frac{C_1}{x-1} + C_2,$$

буни y нинг ифодасига қўйиб, умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$y = -C_1x^2 + C_2(x - 1) + 1.$$

11-дарсхона топшириқлари

1. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ тенгламанинг $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ хусусий ечимини билган ҳолда уни интегралланг.

Ж: $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$.

2. $y''\sin^2 x = 2y$ тенгламанинг $y_1 = \operatorname{ctg} x$ хусусий ечимини билган ҳолда, уни ечинг.

Ж: $y = C_3 + (C_2 - C_2 x)\operatorname{ctg} x$.

3. $\cos x$, $\sin x$ фундаментал системага эга бўлган тенгламани тузинг.

Ж: $y'' + y = 0$.

4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$ тенгламани бунга мос бир жинсли тенгламанинг $y = x$ хусусий ечимини билган ҳолда ечинг.

Ж: $y = C_1x + C_2x^2 + x^3$.

5. $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$ тенгламанинг умумий ечимини унга мос бир жинсли тенгламанинг хусусий ечимларидан бири $y = e^x$ эканини билган ҳолда топинг.

Ж: $y = C_1e^x + C_2x - (x^2 + 1)$.

11-мустақил иш топшириқлари

1. $x^3y'' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини унинг $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ хусусий ечимларини билган ҳолда топинг.

Ж: $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$.

2. $xy''' - y'' + xy' - y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини унинг $y_1 = x$ хусусий ечимини билган ҳолда топинг.

Ж: $y = C_1x + C_2\sin x + C_3\cos x$.

3. $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ фундаментал системага эга бўлган тенгламани тузинг.

Ж: $y'' - 2\operatorname{ctg} 2x \cdot y' = 0$.

12-§. Ўзгармас коэффициентли чизиқли тенгламалар ва уларга келтириладигаи тенгламалар

1-мисол. $y''-y=0$. Характеристик тенглама: $k^2-1=0$, унинг илдизлари турлича ва мос равишда $k_1=1$, $k_2=-1$. Бу ердан мос хусусий ечимлар бундай бўлиши келиб чиқади: $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$. У ҳолда умумий ечим бундай бўлади:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

2-мисол. $y'''+y=0$. Характеристик тенглама: $k^3+1=0$, унинг илдизлари: $k_1=-1$, $k_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Демак, умумий ечим қуйидаги кўринишга эга:

$$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos x\frac{\sqrt{3}}{2}+C_3\sin x\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3-мисол. $y'''-y''-y'+y=0$. Характеристик тенглама: $k^3-k^2-k+1=0$, унинг илдизлари: $k_1=k_2=1$, $k_3=-1$. Умумий ечим:

$$y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-x}$$

4-мисол. $y^{IV}+8y''+16y=0$. Характеристик тенглама: $k^4-8k^2+16=0$ ёки $(k^2+4)^2=0$. Унинг илдизлари:

$$k_1=k_2=2i,\ k_3=k_4=-2i.$$

Умумий ечим:

$$y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x.$$

5-мисол. $y'''+y''=x^2+1+3xe^x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Маълум қоидага асосан биз ушбу $y'''+y''=x^2+1$, $y'''+y''=3xe^x$ иккита тенгламанинг хусусий ечимларини топишимиз мумкин. Характеристик тенглама равшанки, қуйидаги кўринишга эга: $k^3+k^2=0$, унинг илдизлари: $k_1=k_2=0$, $k_3=-1$. Дастлаб биринчи тенгламани қараймиз; ўнг қисмида кўрсаткичли кўпайтувчи йўқ, демак, $\alpha=0$, лекин ноль характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи; шу сабабли биз юқорида баён қилинганларга асосан хусусий ечимни

$$Y_1=x^2(a_2x^2+a_1x+a_0)=a_2x^4+a_1x^3+a_0x^2$$

кўринишда излашимиз лозим; у ҳолда

$$Y_1''=12a_2x^2+6a_1x+2a_0,\quad Y_1'''=24a_2x+6a_1.$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб,

$$24a_2x+6a_1+12a_2x^2+6a_1x+2a_0=x^2+1$$

ни ҳосил қиламиз.

x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб

$$12a_2=1,\ 24a_2+6a_1=0,\ 6a_1+2a_0=1$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системадан

$$a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_0 = \frac{3}{2}$$

коэффициентларни аниқлаймиз. Демак,

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

Иккинчи тенгламага ўтамиз, бу ерда $\alpha = 1$, характеристик тенгламанинг илдизи эмас. Хусусий ечимни

$$Y_2 = e^x(b_1x + b_0)$$

кўринишида излаймиз. Қуйидагини топамиз:

$$Y_2' = e^x(b_1x + b_0 + b_1),$$

$$Y_2'' = e^x(b_1x + b_0 + 2b_1),\ Y_2''' = e^x(b_1x + b_0 + 3b_1).$$

Буларни тенгламага қўйиб ва e^x га қисқартириб,

$$b_1x + b_0 + 3b_1 + b_1x + b_0 + 2b_1 = 3x$$

ни ҳосил қиламиз. Коэффициентларни тенглаймиз:

$$2b_1 = 3,\ 2b_0 + 5b_1 = 0,\ \text{бундан}\ b_1 = \frac{3}{2},\ b_0 = -\frac{15}{4}.$$

Изланаётган хусусий ечим:

$$Y_2 = e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \\ + e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right);$$

C_1, C_2, C_3 — ихтиёрий ўзгармаслар.

6-мисол. $y'' - y = x\cos x\, e^x$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. $\alpha \pm pi = 1 \pm i$ ифода $k^2 - 1 = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи эмас. Шу сабабли хусусий ечимни қуйидагича излаймиз; ўнг томонни

$$\frac{1}{2}xe^{(1+i)x} + \frac{1}{2}xe^{(1-i)x}$$

кўринишда ифодалаймиз ва

$$y'' - y = \frac{1}{2}xe^{(1+i)x}$$

тенгламанинг хусусий ечимини

$$Y_1 = (Ax + B)e^{(1+i)x}$$

шаклда излаймиз:

$$Y_1'' = [A(1+i)x + B(1+i) + A]\, e^{(1+i)x},$$

$$Y_1' = [2\,iAx + 2\,Bi + 2\,A(1+i)]\, e^{(1+i)x}.$$

Тенгламага қўямиз ва $e^{(1+i)x}$ га қисқартириб

$$2(i-1)Ax + [(2\,i-1)B + 2\,A(i+1)] = \frac{1}{2}x$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан коэффициентларни тенглаб топамиз:

$$A = \frac{-1-2\,i}{10}, \quad B = \frac{7-i}{25}.$$

Шундай қилиб, $Y_1 = \left(\frac{-1-2\,i}{10}x + \frac{7-i}{25}\right)e^{(1+i)x}$ $y'' - y = \frac{1}{2}xe^{(1-i)x}$ тенгламанинг Y_2 ечими унинг Y_1 ечими билан қўшма бўлади:

$$Y_2 = \left(\frac{-1+2\,i}{10}x + \frac{7+i}{25}\right)e^{(1-i)x}$$

Y_1 ва Y_2 ни қўшиб ва тригонометрик функцияларга ўтиб, берилган тенгламанинг хусусий ечимини

$$Y = e^x\left\{\left(-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25}\right)\cos x + \left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\right)\sin x\right\}$$

кўринишда ҳосил қиламиз. Умумий ечимни топиш учун Y га $C_1e^x + C_2e^{-x}$ ифодани, яъни мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини қўшиш кифоя. Китобхонга таққослаш мақсадида бу хусусий ечимни, унинг ҳақиқий шакли

$$Y = e^x\{(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\}$$

ни олиб, топишни тавсия этамиз.

7-мисол. $\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = \varphi(t)$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси

$$x_1 = \sin at, \quad x_2 = \cos at$$

лардан иборат, хусусий ечимни

$$x = C_1 \sin at + C_2 \cos at$$

шаклда излаймиз, бу ерда C_1 ва C_2 лар t нинг функциялари бўлиб, улар берилган бир жинсли бўлмаган тенглама қаноатланадиган қилиб танланади. Уларнинг t бўйича ҳосилаларини аниқлаш учун ушбу иккита чизиқли тенгламага эгамиз:

$$C_1' \sin at + C_2' \cos at = 0, \quad C_1' \cos at - C_2' \sin at = \frac{1}{a}\varphi(t),$$

бу ердан

$$C_1' = \frac{1}{a}\varphi(t)\cos at, \quad C_2' = -\frac{1}{a}\varphi(t)\sin at$$

ни топамиз. Булардан C_1 ва C_2 ни ҳисоблаймиз:

$$C_1=\frac{1}{a}\int_0^t \varphi(\tau)\cos a\tau\, d\tau,\quad C_2=-\frac{1}{a}\int_0^t \varphi(\tau)\sin a\tau\, d\tau.$$

Уларнинг қийматларини x нинг ифодасига қўйиб,

$$x=\sin at\ \ \frac{1}{a}\int_0^t \varphi(\tau)\cos a\tau\, d\tau-\cos at\cdot\frac{1}{a}\int_0^t \varphi(\tau)\sin a\tau\, d\tau$$

ни топамиз.

$\sin at$ ва $\cos at$ кўпайтувчиларни интеграл белгиси остига киритиб ва иккала интегрални бирлаштириб, хусусий ечим учун ифодани узил-кесил ушбу кўринишда ҳосил қиламиз:

$$x(t)=\frac{1}{a}\int_0^t \varphi(\tau)\sin a(t-\tau)\, d\tau.$$

Бу хусусий ечим бошланғич шартларни қаноатлантиришини текшириш осон:

$$x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

12-дарсхона топшириқлари

1. Тенгламани ечинг:

$$2y''+y'-y=0.$$

Ж: $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}$

2. $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+3y''+2y'+y=0$

Ж: $y=e^{-\frac{x}{2}}\left\{(C_1+C_2x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+(C_3+C_4x)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right\}.$

3. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$y''-4y'+4y=x^2$

Ж: $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}.$

4. $y''-6y'+8y=e^x+e^{2x}$

Ж: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{3}e^x-\frac{x}{2}e^{2x}.$

5. $y''+4y=x\sin 2x.$

Ж: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x^2}{8}\cos 2x+\frac{x}{16}\sin 2x.$

6. Плазма тебранма ҳаракатини тавсифлайдиган

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{4\pi e^2n_0}{m}v=-\frac{4\pi eI}{m}$$

дифференциал тенгламанинг ечимини топинг (e, n_0, m, I — маълум катталиклар).

Ж: $v = -\frac{I}{n_0 e} + A\sin(\omega t - \alpha)$, $\omega = 2e\sqrt{\frac{\pi n_0}{m}}$

12-мустақил иш топшириқлари

Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

1. $y^{IV} - 2y'' = 0.$

   Ж: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x\sqrt{2}} + C_4 e^{-x\sqrt{2}}$

2. $y^{III} - 3y'' + 3y' - y = 0.$

   Ж. $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$

3. $y'' - 2y = -4x^2 e$

   Ж: $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$

4. $y'' + y = \sin x \sin 2x.$

   Ж: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{4}x\sin x.$

5. $y^{III} + y'' + y' + y = xe^x$

   Ж: $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \ln x + e^x\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{8}\right).$

13-§. Дифференциал тенгламалар системасининг нормал шакли

Намуна сифатида қуйидаги тенгламалар системаларининг ечилишини кўрсатайлик.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = y \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Системанинг иккинчи тенгламасини дифференциаллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2z}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}$ нинг ўрнига унинг $\frac{d^2z}{dx^2}$ қийматини биринчи тенгламага қўямиз, у ҳолда

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{y^3}{z}$$

Ўз навбатида, иккинчи тенгламага асосан y ни $\frac{dz}{dx}$ билан алмаштириб, бир номаълумли иккинчи тартибли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

ёки

$$zz''-(z')^2=0,$$

ёки бу тенгламанинг иккала томонини z^2 га бўлиб,

$$\left(\frac{z'}{z}\right)'=\frac{zz''-(z')^2}{z^2}=0$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан

$$\frac{z'}{z}=C_1,\ z'=C_1z.$$

Топилган оралиқ интегрални яна бир маротаба интеграллаб,

$$z=C_2e^{C_1x}$$

ни ҳосил қиламиз.

$y=\frac{dz}{dx}$ бўлгани учун z нинг ифодасини дифференциаллаб,

$$y=C_1C_2e^{C_1x}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, берилган системанинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y=C_1C_2e^{C_1x}\qquad z=C_2e^{C_1x}$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=z,\quad \frac{dz}{dx}=y$$

дифференциал тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Иккала тенгламани қўшиб

$$y'+z'=z+y$$

ни топамиз, $y+z=u$ алмаштириш орқали $u'=u$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан

$$u=C_1e^x$$

ни топиш қийин эмас. Шундай қилиб,

$$y+z=C_1e^x$$

ёки дифференциаллашдан сўнг

$$y'+z'=C_1e^x$$

Охирги тенгламада z' ни y билан алмаштириб, биринчи тартибли

$$y'+y=C_1e^x$$

чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг ечими

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

кўринишда бўлади. У ҳолда $y + z = C_1 e^x$ га асосан

$$z = \frac{1}{2} C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

бўлади.

13-дарсхона топшириқлари

1. $\frac{dy}{dx} = y + z, \quad \frac{dz}{dx} = y + z + x.$

Ж: $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}, \quad z = C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}\left(x + 1 - x^2\right) - C_1.$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} y,$

Ж: $y = \frac{1}{(C_1 x + C_2)}, \quad z = -\frac{1}{2 C_1 (C_1 x + C_2)}$

3. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}$

Ж: $y = x + C_2 e^{C_1 x}, \quad z = -\frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}.$

13-мустақил иш топшириқлари

1. $\frac{dy}{dx} = ay, \quad \frac{dz}{dx} = bz \ (a \neq 0, \ b \neq 0)$

Ж: $y = C_1 e^{ax} \cdot \quad z = C_2 e^{bx}.$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{z^2}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y^2}{z}.$

Ж: $y = \sqrt{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}} \quad z = \sqrt{C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x}}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y}.$

Ж: $y = \frac{1}{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}; \quad z = \frac{1}{-C_1 e^x + C_2 e^{-x}}.$

14-§. Чизиқли дифференциал тенгламалар системалари

Бир неча мисол кўрамиз.

1-мисол. Ушбу фундаментал ечимлар системасига эга бўлган иккита бир жинсли чизиқли тенглама системасини тузинг:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = 1 + t, & z_1 = t, \\ y_2 = 2, & z_2 = t. \end{array}\right\}$$

Ечиш. $W(t) = t(t - 1)$ бўлганлиги учун (0, 1) оралиқ билан чекланамиз. Изланаётган система бундай бўлади:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & 1 & 0 \\ y & 1+t & 2 \\ z & t & t \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{dr}{dt} & 1 & 1 \\ y & 1+t & 2 \\ z & t & t \end{vmatrix} = 0.$$

Уни нормал шаклда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t-1}\,y - \frac{2}{t(t-1)}\,z, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{t}z, \end{aligned}\right\}$$

$W(t)$ нолга айланадиган $t=0$ ва $t=1$ нуқталар системанинг махсус нуқталари бўлади.

2-мисол. Системанинг умумий ечимини топинг:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dt} &= 4y + 5z. \end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Характеристик тенгламани тузиб, уни ечамиз:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0,$$

бу ердан $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$, демак, характеристик сонлар турлича ва ҳақиқий.

$\lambda_1 = 1$ характеристик сонга мос γ_1 ва γ_2 сонларни топиш учун система тузамиз. Бу системанинг коэффициентлари матрицаси

$$\left\|\begin{matrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{matrix}\right\|$$

матрицадан λ ни $\lambda_1 = 1$ билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлади, демак, изланаётган система

$$\left.\begin{aligned} 4\gamma_1 + 4\gamma_2 &= 0, \\ 4\gamma_1 + 4\gamma_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

кўринишга эга.

Бу ерда, кутилганидек, иккинчи тенглама биринчи тенгламанинг натижасидир (бу ерда улар ҳатто устма-уст тушади), уни ёзмаслик ҳам мумкин эди. $\gamma_1 = 1$ деб $\gamma_2 = -1$ ни топамиз.

Шундай қилиб, $\lambda_1 = 1$ характеристик сонга

$$y_1 = e^t, \quad z_1 = -e^t$$

ечим мос келади.

Шунга ўхшаш, $\lambda_2 = 9$ характеристик сонга мос

$$\left.\begin{array}{l} -4\gamma_1+4\gamma_2=0, \\ 4\gamma_1-4\gamma_2=0 \end{array}\right\}$$

системани ечиб, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=1$ ни топамиз, демак, бу характеристик сонга

$$y_2=e^{9t}, \qquad z_2=e^{9t}$$

ечим мос келади.

Биз фундаментал ечимлар системасини ҳосил қилдик:

$$\left.\begin{array}{ll} y=e^{t}, & z_1=-e^{t} \\ y_2=e^{9t}, & z_2=e^{9t}. \end{array}\right\}$$

Буларнинг чизиқли комбинациясини устунлар бўйича олиб, ушбу умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} y=C_1e^{t}+C_2e^{9t}, \\ z=C_1e^{t}+C_2e^{9t} \end{array}\right\}$$

3-мисол. Системанинг умумий ечимини топинг:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=3x-y+z, \\ \frac{dy}{dt}=-x+5y-z, \\ \frac{dz}{dt}=x-y+3z. \end{array}\right\}$$

Ечиш. Ушбу

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

характеристик тенглама турли ва шу билан бирга ҳақиқий λ_1-2, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$ илдизларга эга.

Дастлаб, $\lambda_1=2$ характеристик сонга мос

$$x_1=\gamma_{11}e^{2t}, \quad x_2=\gamma_{12}e^{2t}, \quad x_3=\gamma_{13}e^{2t}$$

кўринишдаги хусусий ечимни топамиз. γ_{11}, γ_{12}, γ_{1n} сонлар сифатида

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминант биринчи сатри элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини олиш мумкин.

Бу детерминант $\Delta(\lambda)$ характеристик детерминантдан λ ни $\lambda_1=$ $=1$ га алмаштириш билан ҳосил бўлади. У ҳолда

$$\gamma_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \ \gamma_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ \gamma_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

ёки (2 га бўлсак)

$$\gamma_{11} = 1, \ \gamma_{12} = 0, \ \gamma_{13} = -1.$$

Бу қийматларни эътиборга олиб, x_1, x_2, x_3 учун ифодаларни

$$x_1 = e^{2t}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = e^{2t}$$

кўринишда ёзамиз.

Шунга ўхшаш тегишли характеристик сонлар $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ учун γ_{2k}, γ_{3k} сифатида

$$\gamma_{21} = 1, \ \gamma_{22} = 1, \ \gamma_{23} = 1, \ \gamma_{31} = 1, \ \gamma_{32} = -2, \ \gamma_{33} = 1$$

ни олиш мумкин. У ҳолда фундаментал ечимлар системаси бундай бўлади:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = e^{2t}, & x_2 = 0, & x_3 = -e^{2t}, \\ y_1 = c^{3t}, & y_2 = e^{3t}, & y_3 = e^{3t} \\ z_1 = e^{6t}, & y_2 = -2e^{6t}, & z = e^{6t}. \end{array}\right\}$$

Демак, умумий ечим ушбу кўринишга эга:

$$\left.\begin{array}{l} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \\ y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \\ z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \end{array}\right\}$$

14-дарсхона топшириқлари

1. Ушбу фундаментал ечимлар системасига эга бўлган иккита бир жинсли чизиқли тенглама системасини тузинг:

$$\begin{cases} y_1 = x, \\ y_2 = x^{-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = -x, \\ z_2 = x^{-1}. \end{cases}$$

$$Ж: \ x\frac{dy}{dt} + z = 0,$$

$$x\frac{dz}{dt} + y = 0.$$

2. Системанинг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + 2x. \end{cases}$$

$$Ж: \ x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t},$$

$$y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}$$

3. Системанинг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Ж: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$,

$y(t) = e^{-6t}(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t.$

14- мустақил иш топшириқлари

1. Ушбу фундаментал ечимлар системасига эга бўлган иккита бир жинсли чизиқли тенглама системасини тузинг:

$$y_1 = \cos t, \quad z_1 = -\sin t,$$
$$y_2 = \sin t, \quad z_2 = \cos t.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y. \end{cases}$$

2. Системанинг умумий ечимини тепииг:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Ж: $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$

$y(t) = -(C_1 + C_2 + C_3 t) e^{2t}$

3. Системанинг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

Ж: $x(t) = C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{8t}$

$y(t) = C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{8t}$

АДАБИЁТ

1. Андреев В. С. Теория нелинейных электрических цепей, М., «Связь», 1972.

2. Арнольд. В. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М. «Наука», 1984.

3. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Гос. изд-во технико-теор. литературы. М—Л. , 1949.

4. Болтянский В. Г Математические методы оптимального управления, М., «Наука», 1966.

5. Бугров Я. С. , Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного, т. I, II. М., «Наука», 1978.

6. Гутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциал тенгламалар. Т., «Ўқитувчи», 1978.

7. Қарташев А. П. Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М., «Наука», 1980.

8. Қоллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика, М., «Мир», 1969.

9. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, М. , «Высшая школа». 1967.

10. Немицкий В. В., Степанов В. В. Қачественная теория дифференциальных уравнений, М., 1949.

11. Николаи Е. Л. Теоретическая механика, часть 2. Гос изд-во технико-теор. литературы, М., 1956.

12. Павловский Н. Н. Қраткий гидравлический справочник, Л—М., ГИСЛ, 1940.

13. Понтрягин Л С. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1974.

14. Рашидов Т. Р. ва бошқ. Назарий механика асослари. Т., «Ўқитувчи», 1990.

15. Салоҳитдинов М. С. , Насретдинов Г. Н. Оддий дифференциал тенгламалар, Т.. «Ўқитувчи», 1982.

16. Соатов Ё. У. Олий математика, 1-жилд. Т., «Ўқитувчи» 1992.

17. Соатов Ё. У. Олий математика, 2-жилд. Т., «Ўқитувчи», 1994.

18. Соатов Ё. У. Олий математика, 3-жилд. Т., «Ўзбекистон», 1996.

19. Степанов В. В. Қурс дифференциальных уравнений. Гос. Изд-во техн. теор. литературы. М—Л., 1945.

20. Тихонов А. Н., Васильева А. Б. Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1980.

21. Федерюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1980.

22. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I, II, М., Гостехиздат, 1956.

23. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения, М., Гостехиздат, 1957.

МУНДАРИЖА

Дифференциал тенгламалар

А. Назарий мавзулар

Б. Амалий машғулотлар

ЁЛҚИН УЧҚУНОВИЧ СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

4- жилд

Олий техника ўқув юртлари талабалари
учун дарслик

Тошкент «Ўқитувчи» 1998

Таҳририят мудири *Н. Ғоипов*
Муҳаррирлар: *Н. Ғоипов, М. Шерматова*
Расмлар муҳаррири *М. Кудряшова*
Тех. муҳаррирлар: *Т. Золотилова, С. Турсунова*
Мусаҳҳиҳ *М. Иброҳимова*

ИБ № 7393

Теришга берилди 15.10.97. Босишга рухсат этилди 26.05.98. Бичими $60\times90/_{16}$. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 20,0. Шартли кр- отт. 20,25. л. Нашр л. 18,25. 2000 нусхада босилди. Буюртма № 2939.

«Ўқитувчи» нашриёти, Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09—266—96.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Ташполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1998.