МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИСЛАМА КАРИМОВА

А. АБДУКАРИМОВ, Д.Н. ШАМСИЕВ, И.Т. ХАЛДЫБАЕВА

В Ы С Ш А Я М А Т Е М А Т И К А

Конспект лекций

Часть 3

Ташкент 2019

Абдукаримов А., Шамсиев Д.Н., Халдыбаева И.Т. / **Высшая математика**: Конспект лекций. Часть 3 Ташкент: ТашГТУ, 2019. 136 с.

Конспект лекций предназначен для проведения лекций по разделам высшей математики в высших технических учебных заведениях.

Конспект лекций содержит в себе следующие разделы высшей математики: функции комплексного переменного; операционное исчисление; теория вероятностей; математическая статистика.

Конспект лекций охватывает содержание программы по дисциплине «Высшая математика», утвержденной 25 августа 2018г. №744.

Для усвоения рассматриваемых вопросов в лекциях приведены соответствующие примеры с иллюстрациями, а в конце даны контрольные вопросы.

Конспект лекций может быть полезен студентам, магистрантам и докторантам.

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета.

Рецензенты:
- к.ф.-м.н., доц. Эсонов Э.Э. (Таш ГТУ);
- д.ф.-м.н., проф. Ахмедов А.Б. (НУУз).

Модуль 19. Комплексные числа и действия над ними. Функции комплексных переменных

Лекция № 55. Комплексное число. Модуль и аргумент. Действия над комплексными числами. Тригонометрический и показательный виды комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение из корня комплексного числа

Понятие комплексного числа. Понятие комплексного числа представляет собой расширенное понятие действительных чисел. Многие правила арифметики действительных чисел могут быть перенесены на комплексные числа. На комплексную область могут быть перенесены многие разделы действительного анализа. Так возник комплексный анализ, в основе которого лежит теория аналитических функций.

Исторически комплексные числа обязаны своим возникновением, главным образом, попытке найти решение алгебраических уравнений, например: $x^2+1=0$

Определение. Множеством комплексных чисел называется множество, состоящее из чисел вида: $z=x+iy$, где x и y действительные числа, а i – называемая мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2=-1$.

Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

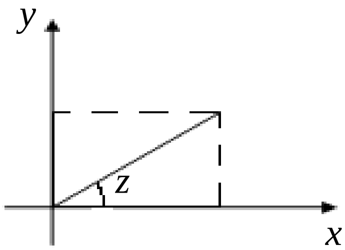
Например: z = 2+4i Rez =2, Im z =4.

Два комплексных числа называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $x_1+iy_1=x_2+iy_2$, если $x_1=x_2, y_1=y_2$.

Комплексное число $x-iy$ называется сопряженным комплексному числу $x+iy$, и обозначается $\bar{z}=x-iy$.

Геометрически комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить с помощью точки, абсцисса которой равна x, а ордината – y.

Комплексное число z также можно изобразить с помощью вектора с началом в точке О и концом в точке ($x; y$)



Ось Оx - называется действительной осью, ось Оy – мнимой.

Положение точки, изображающей комплексное число z, можно определять также с помощью полярной системы координат r и φ.

Число r - называется модулем комплексного числа z и обозначается $r=|z|$, число φ называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = Argz$

Если $z = x + iy$, то по определению модуля и аргумента следует, что

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad tg(Argz) = tg\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (55.1)$$

Нужно отметить, что аргумент z определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого кратного 2π:

$$Argz = \arg z + 2\pi k, \qquad k \in z,$$

где $\arg z$ есть главное значение $Argz$ аргумента z, определяется условиями: $-\pi < \arg z \le \pi$.

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x>0, y>0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x<0, y\ge 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x<0, y<0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x=0, y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x=0, y<0 \end{cases} \qquad (55.2)$$

Заметим также, что при $z=0$ $Arg\, z$ не имеет смысла.

Пользуясь формулами (1), можно всякое комплексное число, отличное от нуля, представить в тригонометрической форме.

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

с помощью формулы Эйлера, связывающие функции $e^{i\varphi}, \sin\varphi, \cos\varphi$.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

можно от геометрической записи перейти к показательной форме комплексного числа, т.е. $z = re^{i\varphi}$, где r – модуль, а φ - аргумент комплексного числа z.

Итак, $z = x + iy$ - алгебраическая, $z = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$- тригонометрическая, а $z = re^{i\varphi}$- показательная форма записи комплексного числа.

Действие над комплексными числами. Пусть даны комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

1. **Суммой** $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,
2. **Разностью -** $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$,
3. **Произведением-**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)\cdot(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

4. **Частным -** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Упражнение: Представьте числа $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме.

Возведение комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n производится по формуле $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, т.е.

$$\left|z^n\right| = |z|^n, Argz^n = nArgz + 2\pi k, \qquad k \in z.$$

Отсюда при r=1 получается формула Муавра

$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi}$, это справедливо и при целом отрицательном n.

4. Извлечь корень целой положительной степени n из числа z – значит найти такое число $W = \sqrt[n]{z}$, n- ая степень которого равна z.

$|W|^n = |z|, \quad nArgW = Argz + 2\pi k, \quad k \in z$.

Если обозначить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $W = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то получим:

$\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k \in z$

$\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

$\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$. Тогда $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $k = 0,1,...,n-1$, $\varphi = \arg z$.

Точки, соответствующие $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$, с центром в начале координат.

3. Свойства модуля комплексных чисел.

1. $\left|\overline{z}\right| = |z|$
2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $|z^n| = |z|^n$
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\quad z^2 \neq 0$
6. $|\operatorname{Re} z| \le |z|, |\operatorname{Im} z| \le |z|$
7. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
8. $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

Пример. Вычислить $\left(-1 + \sqrt{3}i\right)^{60}$

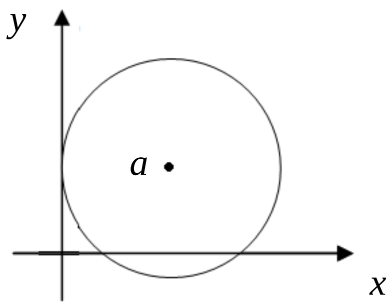
Число $-1+\sqrt{3}i$ записываем в тригонометрической форме: $r = \sqrt{1+3} = 2;\ arctg\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}; \left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, тогда

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60} = 2^{60}\left(\cos\frac{2\pi}{3}60 + i\sin\frac{2\pi}{3}60\right) == 2^{60}(\cos 40\pi + i\sin 40\pi) = 2^{60}.$$

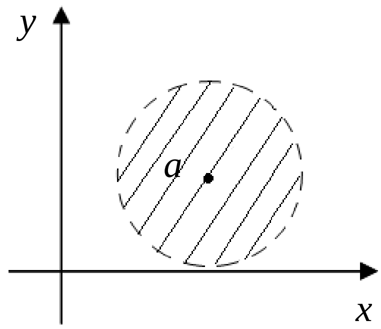
4. Множество точек комплексной плоскости.

1. Множество $E = \{z : |z - a| = R\}$, где R>0, a-фиксированное число есть множество точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной точки a постоянно и равно R. Это множество представляет собой окружность с центром в точке a и радиусом R.

2. Множество $E = \{z : |z - a| < \varepsilon\}$, где a- комплексное число, $\varepsilon > 0$, открытый круг с центром в точке a и радиусом ε, который иногда называют ε-окрестностью точки a.



3. Множество $E = \{z : |z| > R\}$, где R>0, внешность круга с центром в точке O и радиусом R. Это множество иногда называют окрестностью бесконечности.



Определение. Комплексная плоскость, дополненная бесконечностью, называется расширенной комплексной плоскостью или полной плоскостью.

4. Множество $E = \{z : 0 < |z| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, круг с центром в точке O и радиусом ε с выключенной точкой z = 0. Иногда это множество называют проколотой окрестностью точки O, а в ТФКП его называют “вырожденным” кольцом.

5. Множество $E = \{z : |z - a| + |z - b| = c\}$ точки комплексной плоскости, такие, что сумма расстояний от точки z до точки a и b равна c. Геометрическое место таких точек есть эллипс с фокусами в точках a и b.

Контрольные вопросы

1. Какое множество мы называем множеством комплексных чисел?

2. Приведите алгебраическую, показательную и тригонометрическую формы записи комплексного числа.

3. Как изображается комплексное число на координатной плоскости?

4. Что такое модуль и аргумент комплексного числа? По каким формулам они определяются?

5. Какие действия можно производить над комплексными числами?

6. Как возвести z в степень n?

7. Напишите формулу извлечения n корня из комплексного числа z.

8. Перечислите свойство модуля комплексного числа.

9. Приведите примеры множества точек комплексной плоскости.

Лекция №56. Функции комплексной переменной, область их определения. Предел и непрерывность функций комплексной переменной. Элементарные функции комплексной переменной

Последовательности. Определение: Комплексное число a называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, $\forall n > N$ выполняется неравенство

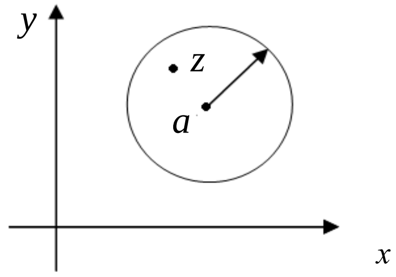
$$|z_n - a| < \varepsilon, \tag{56.1}$$

и записывается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, другими словами, число a называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0 \tag{56.2}$$

Определение: Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

Геометрический смысл неравенства (56.1) заключается в том, что точка z_n лежит внутри круга радиуса ε с центром в точке a.



Этот круг называется ε - окрестностью точки *a*.

Следовательно, если, *a* является пределом последовательности $\{z_n\}$, то это означает, что в любой окрестности точки *a* содержатся все члены последовательности $\{z_n\}$, за исключением конечного числа членов.

Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n, n = 1,2,...$, для которых имеет место.

Теорема 1. Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a = \alpha + i\beta$, равносильно существованию двух пределов:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - a| = 0$.

Но $|z_n - a| = |x_n + iy_n - \alpha - i\beta| = |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)|$

$|z_n - a| \ge |x_n - \alpha|$ $|z_n - a| \ge |y_n - \beta|$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$

Свойства последовательностей комплексных чисел.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$

Доказательство: Так как по свойству модулей комплексных чисел

$||z_n| - |a|| < |z_n - a|$, то отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$

2. Достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел.

Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $|z_n| = r_n$ $\varphi_n = \arg z_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \rho$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \alpha$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho e^{i\varphi}$

3. Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если все точки этой последовательности принадлежат некоторому кругу с центром в начале координат, т.е. если существует такое положительное число m, что любого n будет $|z_n| \le m$

Отсюда следует, что всякая сходящая последовательность ограничена, обратное утверждение неверно.

Теорема Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся последовательность.

Расширенная комплексная плоскость. Введем понятие бесконечности.

Определение: Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется сходящимся к бесконечности $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty \qquad (56.3)$$

Свойства бесконечно больших последовательностей комплексных чисел.

1). если $z_n \neq 0, n = 1,2,...,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{z_n} = 0$

2). если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = a \neq \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + \xi_n) = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{z_n} = 0$

3).если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n = a \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot \zeta_n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{\zeta_n} = \infty$

Геометрический смысл бесконечно больших последовательностей комплексных чисел.

Условие (56.3) означает, что $\forall R \;\; \exists N = N(R)$, $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$, т.е. точка z_n лежит вне круга радиуса *R*. Это множество называется *окрестностью бесконечности*.

Следовательно, точка $z = \infty$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности $z = \infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением их конечного числа.

Область и граница. Пусть дано некоторое множество E расширенной плоскости z. Точка z называется внутренней точкой множества E, если все точки достаточно малого круга с центром в точке z принадлежат множеству E.

Под кругом с центром в бесконечно удаленной точке будем понимать внешность любой окружности $|z| = R$ с центром в точке z =0. Точка z_0 называется граничной точкой множества Е, если в её ε окрестность входят как точки, принадлежащие множеству Е, так и точки ему не принадлежащие.

Множество всех граничных точек множества Е называется границей множества Е.

Точка z называется внешней точкой множества, если вместе с этой точкой множеству Е не принадлежит и её ε -окрестность.

Определение: Множество точек Е называется открытым, если каждая их точка является внутренней.

Определение*:* Множество точек Е называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить кривой, может быть неограниченной, все точки которой принадлежат Е.

Определение*:* Открытое, связное множество точек расширенной комплексной плоскости называется областью.

Определение*:* Множества точек, состоящие из области D и ее границы, называется замкнутой областью и обозначаются $\overline{D}$.

Функции комплексного переменного. Рассмотрим две плоскости комплексных чисел: плоскость z и плоскость W. Пусть на плоскости z задано некоторое множество Е (это множество может содержать и ∞).

Определение: Говорят, что на множестве Е задана функция $W = f(z)$, если каждой точке z из Е поставлено в соответствие одна или несколько точек W (в первом случае функция называется однозначной, во втором - многозначной)

Е - называется множеством определения функции $f(z)$, а *К*-множеством изменения функции $f(z)$.

Положив $z = x + iy$ и $W = u + iv$, получим $u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, откуда $u = \operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ $v = \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$

Т.е. задание функции $W = f(z)$ равносильно заданию двух функций действительных переменных.

Пример; $W = z^2$, $z = x + iy$, $W = u + iv$.

$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

$W = f(z)$-отображение; W-образ

Отображение $W = f(z)$ называется взаимно однозначным на множестве Е, если функция $W = f(z)$ однозначна на Е и любым двум точкам из Е всегда соответствуют две различные точки из К (т.е. при таком отображении образы никаких двух точек из Е не ”сливаются” между собой).

Предел функции. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности Ω точки z_0, кроме самой точки z_0.

Определение: Число A называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ $\forall z \in \Omega$, удовлетворяющих условию $0 < / z - z_0 / < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$

В этом случае пишут, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, где z_0, A конечные точки комплексной плоскости.

В случае, если $A=\infty$, а z_0 конечное число определение предела выглядит так: точка $A=\infty$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если действительная функция двух переменных $|f(z)|$ стремится к бесконечности при $z \to z_0$ или:

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon): \forall z \in \Omega$

$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon$.

Непрерывность функций. Определение 1. Функция $f(z)$ называется непрерывной в конечной точке z_0, если предел $f(z)$ при $z \to z_0$ конечен и равен $f(z_0)$

$$\lim_{z\to z_o} f(z) = f(z_0) \neq \infty$$

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была непрерывна в конечной точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0)

Определение 2. Функция $f(z)$ называется непрерывной в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = W_0$, где W_0 конечное число, W_0 будем принимать за значение $f(z)$ при $z_0 = \infty$.

Определение 3. Функция $f(z)$ комплексного переменного называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$ непрерывных в области D также являются непрерывными функциями в этой области, а функция $\frac{f(z)}{g(z)}$ непрерывна в тех точках области D, где $g(z) \neq 0$

Если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, а функция $F(\tau)$ непрерывна в точке $\tau_0 = f(z_0)$, то сложная функция $F(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Основные элементарные функции комплексного переменного.

1. Линейная функция $W = az + b, \ a \neq 0$
2. Дробно- линейная функция $W = \frac{az+b}{cz+d}, \quad c \neq 0 \quad ad - bc \neq 0$
3. Показательная функция $W = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Свойства: 1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \qquad z_1, z_2 \in C$

2) $e^{z+2\pi ki} = e^z \quad (k \in z)$ т.е. e^z является $2\pi i$ периодической функцией.

4. Тригонометрическая функция:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad tgz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$$

5. Гиперболическая функция

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad tgz = \frac{shz}{chz}, \quad ctgz = \frac{chz}{shz}$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой формулами:

$$\sin z = -ishiz \qquad shz = -i \sin iz$$

$$\cos z = chiz \qquad chz = \cos iz$$

$$tgz = -ithiz \qquad thz = -itgiz$$

$$ctgz = icthiz \qquad cthz = ictgiz$$

6. Логарифмическая функция $Lnz, z \neq 0$

$$Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i \arg z + 2\pi ki \quad k \in z$$

Это многозначная функция. Главным значением Lnz является то значение, которое получается при $k=0$, т.е.

$$Lnz = \ln|z| + i\arg z \Rightarrow Lnz = \ln z + 2\pi ki, \quad k \in z$$

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2, Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2$$

7. Обратные тригонометрические функции:

$$Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

$$Arcctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{z+i}{z-1}$$

Все эти функции многозначные. Главные значения этих функций получаются, если брать соответствующие главные значения логарифмов.

8. Общая степенная функция $W = z^a$,

где W определяется равенством $z^a = e^{aLnz}$, а главное значение выражением $z^a = e^{a\ln z}$.

9. Общая показательная функция. $W = a^z \qquad (a \neq 0)$ $a^z = e^{zLna}$.

Главное значение этой функции определяется равенством $a^z = e^{z\ln a}$

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом последовательности комплексных чисел?
2. Каков геометрический смысл сходящейся последовательности?
3. Когда существует предел последовательности комплексных чисел?
4. Перечислите свойства сходящихся последовательностей.
5. Сформулируйте свойства бесконечно больших последовательностей комплексных чисел.
6. Определите расширенную комплексную плоскость
7. Определите функции комплексного переменного.

8. Какие функции называются непрерывными во множестве комплексных чисел?

9. Дайте определение предела функции комплексной переменной.

10. Назовите основные элементарные функции комплексной переменной.

Лекция №57. Дифференцирование комплексных функций. Условия Коши-Римана. Интегрирование комплексных функций. Основная теорема Коши. Аналитические и гармонические функции. Интегральная формула Коши

Определение производной и дифференциала функции комплексного переменного дословно совпадает с соответствующим определением для функций действительного переменного. Поэтому все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления распространяются и на функции комплексного переменного.

Но дифференцируемые функции комплексного переменного обладают многими дополнительными свойствами. Они возникают вследствие того, что условие дифференцируемости функции комплексного переменного является более ограничительным, чем условие существования производной функции действительного переменного.

Производная функции комплексного переменного. Пусть $z = x + iy$. Дадим независимой переменной z приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и вычислим приращение ΔW однозначной функции $W = f(z)$ $\quad \Delta W = f(z + \Delta z) - f(z)$

Определение: Если существует предел отношения $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z), W'(z), \frac{dW}{dz}$ или $\frac{df}{dz}$, $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}$

Требование существования предела отношения $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ и его независимости от закона стремления Δz к нулю является более сильным ограничением для функции $f(z)$, чем аналогичное требование для функции действительного переменного $y = \varphi(x)$.

Это требование означает, что должен существовать предел отношения $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ при приближении точки $z+\Delta z$ к z по любому пути, в частности, по любому из бесконечного множества различных лучей и все эти пределы должны существовать.

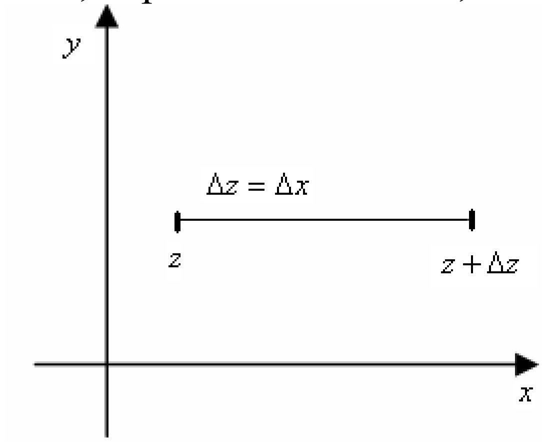
Пусть $W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, тогда $\Delta W = f(z+\Delta z) - f(z) = [u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)] = \Delta u + i\Delta v$,
где

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \qquad \Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \qquad (57.1)$$

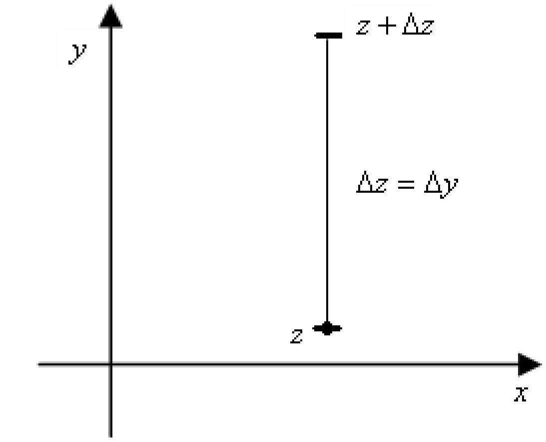
Условие Коши-Римана (Даламбера-Эйлера). Пусть функция $f(z)$ имеет производную в точке z, тогда предел $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}$ существует и не зависит от закона стремления к нулю $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Пусть $\Delta z = \Delta x$, т.е. при приближении точки $z+\Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси x, получим



$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (57.2)$$

Выбрав $\Delta z = i\Delta y$, получим



$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(-i\frac{\Delta u}{\Delta y}+\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (57.3)$$

Так как предел отношения $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ при $\Delta z\to 0$ не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, то пределы (57.2), (57.3) должны быть равны, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial y}$.

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \quad (57.4)$$

Эти условия называются условиями Коши-Римана. Они должны быть выполнены в каждой точке, в которой функция $f(z)$ дифференцируемая. При требовании существования полных дифференциалов функций $u(x,y),v(x,y)$ условия Коши-Римана будут не только необходимыми, но и достаточными.

Действительно, если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют полный дифференциал, то

$$\Delta u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\rho,$$

$$\Delta v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_2\rho,$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0$.

Тогда для любого $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ имеет место

$$\frac{\Delta W}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+\rho(\varepsilon_1+i\varepsilon_1)}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Используя условия Коши – Римана и заменив $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$, а $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$\frac{\Delta W}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+\rho(\varepsilon_1+i\varepsilon_1)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\rho(\varepsilon_1+i\varepsilon_1)}{\Delta x+i\Delta y} \quad (57.5)$$

Но так как $|\Delta z|=|\Delta x+i\Delta y|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\rho$, то $\left|\frac{\varepsilon_1+i\varepsilon_1}{\Delta x+i\Delta y}\cdot\rho\right|=|\varepsilon_1+i\varepsilon_1|$, и $\left|\varepsilon_1 + i\varepsilon_1\right| \to 0$ при $\rho \to 0$, т.е. при $\Delta z \to 0$.

Следовательно, при $\Delta z \to 0$ получим из (57.5), что $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta z} = f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, и достаточность условий Коши – Римана доказана.

Итак, можно сформулировать доказанную теорему.

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) функции $u(x, y), v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y),

2) в точке (x, y) выполнялись условия Коши – Римана.

Для производной справедлива формула

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Определение. Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется аналитической в данной точке.

Определение. Функция аналитическая во всех точках некоторой области называется аналитической или голоморфной в этой области

Определение. Правильными точками однозначной функции $f(z)$ называются такие точки, в которых $f(z)$ является аналитической, в противном случае они называются особыми.

В частности точки, в которых функция $f(z)$ не определена, также являются особыми.

Примеры:

1. Функция $W = z^2$ является аналитической во всех точках плоскости, так как выполнены условия Коши – Римана:

$$W = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

следовательно, функция дифференцируема в каждой точке плоскости, поэтому является аналитической.

2. Является ли функция $W = \bar{z}$ аналитической?

$$W = \bar{z} = x - iy \Rightarrow u = x, v = -y \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Не выполняется первое из условий Коши – Римана, следовательно, функция $W=\bar{z}$ не является аналитической ни в одной точке плоскости

3. Исследовать на аналитичность функцию

$W=z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$

$$u=x^2+y^2,\quad v=0.\quad \frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Отсюда $\left.\begin{matrix}2x=0\\2y=0\end{matrix}\right\}$ только в точке x=0, y=0.

Следовательно, функция $W=z\cdot\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z=0$ и нигде не аналитична. Причем $f'(0)=0$.

Сопряжённые гармонические функции. Пусть $f(z)=u+iv$ дифференцируема в области D, и кроме того, функции u и v имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда, продифференцировав первое равенство из (57.4) по x, а второе – по y, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y};\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

Складывая эти равенства, с учётом того, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (57.6)$$

Аналогично, получим, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

Уравнение (57.6) называется уравнением Лапласа, а функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической.

Оператор $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется оператором Лапласа, (57.6) можно записать $\Delta u=0$.

Так как дифференцируемые в области D функции имеют производные любого порядка в этой области, и следовательно, обладают непрерывными частными производными любого порядка, то действительная и мнимая части функции $f(z)=u+iv$, дифференцируемой в области D, являются гармоническими функциями в этой области.

Определение. Гармонические функции $u(x,y),v(x,y)$, связанные между собой условиями Коши – Римана, называются сопряженными.

Теорема 2. Для дифференцируемости функции $f(z)=u+iv$ в области D необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y),v(x,y)$ были сопряжёнными гармоническими в этой области.

Теорема 3. Для всякой функции $u(x,y)$ гармонической в односвязной области D можно найти сопряжённую с ней гармоническую функцию, которая определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

То есть, зная действительную или мнимую часть аналитической функции $f(z)$, можно с точностью до константы определить саму функцию.

Пример. Найти аналитическую функцию, у которой действительная часть равна $\ln\left(x^2+y^2\right)$

Решение: $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

По условию

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad (57.7)$$

$$v(x,y)=-\int\frac{2y}{x^2+y^2}dx+c(y)=-2arctg\frac{x}{y}+c_1(y)$$

Дифференцируем по *y:*

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}+c'(y) \qquad (57.8)$$

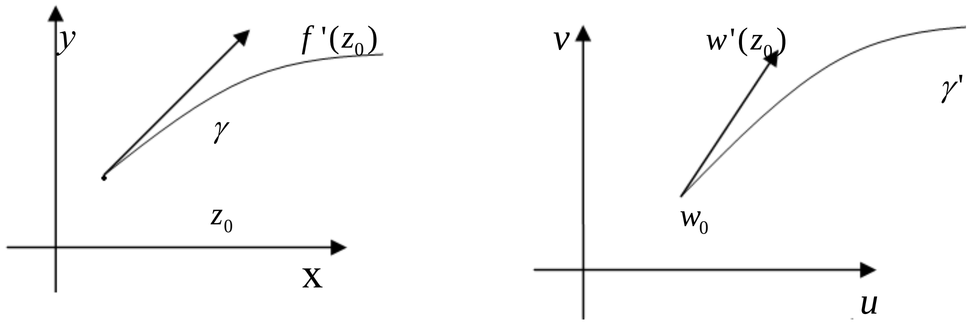
Сравнивая (8) с (7), получим $c'(y)=0$ $\quad c=const$

Итак, $v(x,y)=-2arctg\dfrac{x}{y}+c$ $\quad f(z)=\ln\left(x^2+y^2\right)+i\left(-2arctg\dfrac{x}{y}\right)$

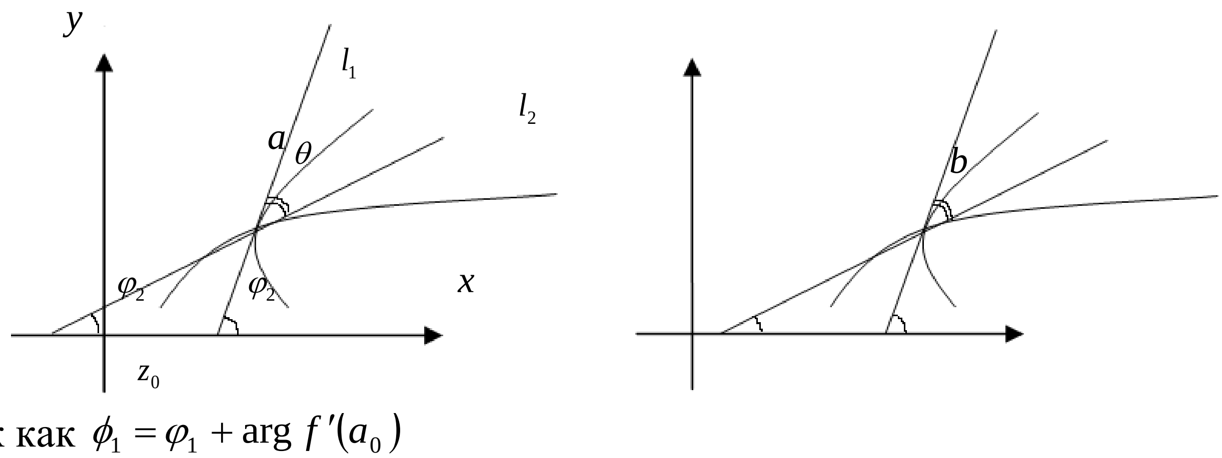
Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$.

Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения (или сжатия) в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости *z* в плоскость *W*.

Аргумент производной $(\arg f'(z_0))$ в точке z_0 равен углу, на которой следует повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости *z*, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $W_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости W при данном отображении $W = f(z)$. При этом, если $\arg f'(z_0) > 0$, то поворот производится против часовой стрелки, если $\arg f'(z_0) < 0$, то поворот происходит по часовой стрелке.



Две гладкие кривые l_1 и l_2, пересекающиеся в точке a под углом θ (это значит, что θ - ориентированный угол между касательными к этим кривым в точке a , $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$), имеют образами тоже гладкие кривые L_1 и L_2, проходящие через точку $b = L(a)$.



Так как $\phi_1 = \varphi_1 + \arg f'(a_0)$

$\phi_2 = \varphi_2 + \arg f'(a_0)$, то $\phi_1 - \phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$

и поскольку $\varphi_1 - \varphi_2 = \theta$, то и $\phi_1 - \phi_2 = \theta$, а это есть угол между двумя кривыми L_1 и L_2 в точке $b = L(a)$.

Отображение, совершаемое аналитической функцией, сохраняет как по величине, так и по направлению углы во всех точках, где производная отлична от нуля.

Определение. Отображения, при которых сохраняются углы между кривыми, называются конформными.

Отображение, осуществляемое аналитической функцией, конформно везде, где $f'(z_0) \neq 0$.

Пример. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $W = z^2$ в точке $z_0 = 1 + i$.

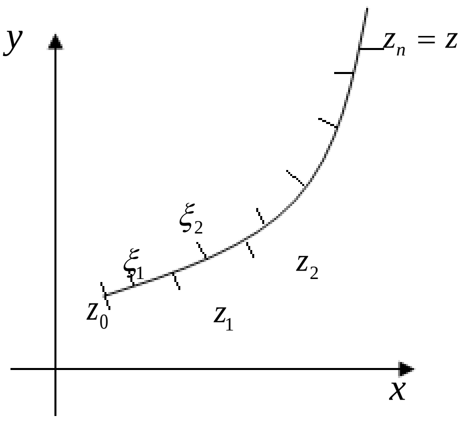
Решение.

$$W' = 2z = 2x + 2iy \Rightarrow W'(z_0) = 2 + 2i$$

$$|W'(z_0)| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \qquad \arg W'(z_0) = arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

Итак, гладкие кривые, проходящие через точку $1+i$ при данном отображении $W = z^2$, получат одно и то же растяжение $2\sqrt{2}$, и образы их в точке $W_0 = (1+i)^2 = 2i$ поворачиваются на один и тот же угол $\frac{\pi}{4}$.

Определение интеграла функций комплексного переменного. Пусть в плоскости z дана замкнутая или не замкнутая дуга C, которая является гладкой или кусочно – гладкой. Пусть z_0 - начальная точка, а z – конечная точка кривой C (в случае замкнутой кривой $z_0 = z$). Считая z_0 - начальной, а z - конечной точкой, тем самым мы устанавливаем положительное направление на кривой C. Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна во всех точках дуги C.



Разобьём дугу C произвольным способом на n “элементарных” дуг и занумеруем точки деления z_k направления от z_0 к z , причём $z_n = z$.

Обозначим $z_1 - z_0 = \Delta z,\ \ z_2 - z_1 = \Delta z_2, \ldots ,\ z_n - z_{n-1} = \Delta z_n$.

Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k, а $|\Delta z_k|$ – длина этого вектора. Внутри каждой элементарной дуги выберем по точке $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Составим сумму

$$f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + ... + f(\xi_n)\Delta z_n \qquad (57.9)$$

Определение. Предел суммы (57.9), вычисленной при $n \to \infty$, и длина из элементарных дуг $\max|\Delta z_k| \to 0$ называется интегралом от функции $f(z)$ по дуге C и обозначается

$$\int_c f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi k)\Delta z_k$$

1. Свойство интегралов функций комплексного переменного.

1. $\int_c [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_c f_1(z)dz \pm \int_c f_2(z)dz$.

2. $\int_c kf(z)dz = k\int_c f(z)dz$, где $k - const$.

3. Если дуга $\bar{C}$ - геометрически совпадает с дугой C, но имеет противоположное направление, то

$$\int_c f(z)dz = -\int_{\bar{c}} f(z)dz$$

4. Если дуга C состоит из дуг $C_1, ..., C_n$, то

$$\int_c (z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + ... + \int_{c_n} f(z)dz$$

5. $\int_C dz = z - z_0$

6. Если $|f(z)| \le M$ во всех точках дуги C и длина дуги C равна *l*, то

$$\left|\int_c (z)dz\right| \le Ml.$$

Вычисление интегралов функций комплексного переменного. Как видно из определения интеграла функций комплексного переменного, вычисление интегралов функций комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от функций действительных переменных

Пусть $z = x + iy$, а $f(z) = u + iv$ где $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, тогда

$$\int_c f(z)dz = \int_c u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_c v(x,y)dx + u(x,y)dy \qquad (57.10)$$

Это можно получить, подставляя вместо z и $f(z)$ их выражения.

Если кривая C задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям параметра $t = t_0, t = t_1$, то

$$\int_{c} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t)dt, \tag{57.11}$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$

Определение. Функция $\phi(z)$ называется первообразной функцией $f(z)$ в области D, если функция $\phi(z)$ дифференцируема в этой области и для всех точек $z \in D$ выполняется

$$\phi'(z) = f(z)$$

Теорема 1.

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f^{x}(z)dz = \phi(z_1) - \phi(z_0), \tag{57.12}$$

где $\phi(z)$ - какая- либо первообразная для $f(z)$

Часть плоскости, ограниченная гладкой или кусочно–гладкой кривой, называется односвязной областью

Теорема 2. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в односвязной области D, а z_0 и z_1 - произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = \left[f(z)g(z)\right]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz \tag{57.13}$$

Теперь приводим теорему замены переменных интеграла от функций комплексного переменного.

Теорема 3. Пусть аналитическая функция $z = \varphi(W)$ отображает взаимно однозначно контур C, в W - плоскости W на контур C_1 – плоскости z, то

$$\int_{c} f(z)dz = \int_{c_1} f[\varphi(W)]\varphi'(W)dW \tag{57.14}$$

Замечание: Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, или окружностью с центром в точке z_0, то полезно делать замену переменной вида $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$.

В случае прямой $\varphi - const$, ρ - действительная переменная интегрирования, в случае окружности $\rho - const$, φ - действительная переменная интегрирования.

Пример. Вычислить интеграл
$\int_c \left(z^2 + z \cdot \bar{z}\right) dz$, где C – дуга окружности

$$|z| = 1,...0 \le \arg z \le \pi$$

Решение. Пусть $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$

$$\int_c \left(z^2 + z \cdot \bar{z}\right) dz = \int_0^{\pi} \left(e^{2i\varphi} + 1\right) ie^{i\varphi} d\varphi = i\int_0^{\pi} \left(e^{3i\varphi} + e^{i\varphi}\right) d\varphi = \left(\frac{1}{3}e^{3i\varphi} + e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}e^{i3\pi} - \frac{1}{3} + e^{i\pi} - 1 = \frac{1}{3}\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right) + \left(\cos\pi + i\sin\pi\right) - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} - 1 - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$$

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, ограниченной замкнутым контуром C, а также в точках этого контура, то $\int_c f(z)dz = 0$.

Доказательство: Предположим, что $f'(z)$ непрерывна в D. Так как функция $f(z)$ является аналитической, то для u и v должны быть выполнены условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

а по формуле (58.2) имеем

$$\int_c f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\int_c vdx + udy,$$ то интеграл $\int_c udx - vdy$

по замкнутому контуру C будет равен нулю (по свойству криволинейных интегралов) и аналогично второй интеграл $\int_c vdx + udy$ также будет равен нулю. Поэтому $\int_c f(z)dz = 0$.

Интегральная формула Коши. Из интегральной теоремы Коши вытекает одна из важнейших формул теории функций комплексного переменного – интегральная формула Коши.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D и простая замкнутая кривая γ лежит в D и ориентирована положительно. Тогда для любой точки z, лежащей внутри γ, справедлива формула.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (57.15)$$

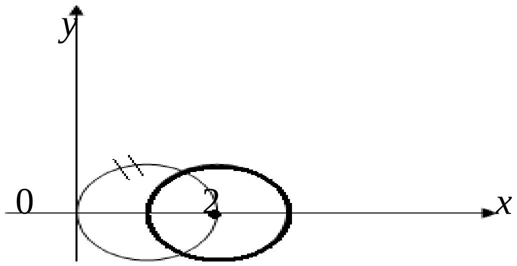
Величина, стоящая в правой части формулы, называется интегралом Коши. Для вычисления интеграла Коши нужно знать значение функции $f(z)$ только на контуре γ.

Следовательно, интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области D, если известны значения этой функции на контуре γ, ограничивающем область D.

Пример. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\int_{C}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$, если: 1) $C:|z-2|=1$ 2) $C:|z-2|=3$ 3) $C:|z-2|=5$

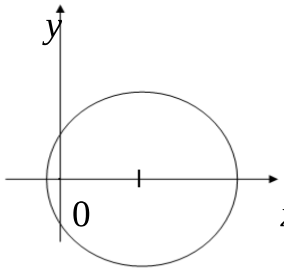
Решение: Рассмотрим замкнутую область: $|z-2|\le 1$

В этой области подынтегральная функция аналитическая, следовательно, $\int_{C}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=0$

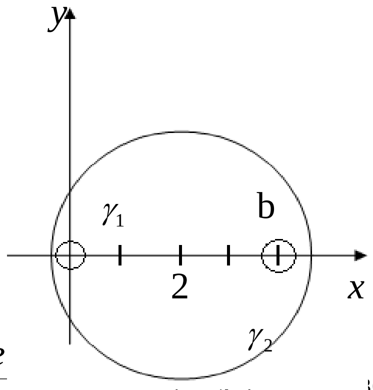


2. $C:|z-2|=3$. Внутри области $|z-2|=3$ находится одна точка, в которой знаменатель обращается в нуль $z=0$. Поэтому

$$\int_{C}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}=\int_{|z-2|=3}\frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz=2\pi i f(0)=2\pi i\frac{1}{0-6}=-\frac{\pi i}{3}$$



3.С: $|z-2|=5$ В область попадают две точки, в которых знаменатель обращается в нуль, поэтому



$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{e}{z}}{z-6}dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) + 2\pi i\frac{e^{36}}{6} = \frac{1}{3}\pi i\left(e^{36}-1\right) = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на её границе С, то для любого натурального *n* имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{57.16}$$

где $z_0 \in D, z \in C$.

С помощью этой формулы можно вычислить некоторые интегралы.

Например: $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz = I$

В этом примере $f(z)=\cos z$, точка $z=0$ попадает в рассматриваемую область, поэтому по формуле (57.16) имеем:

$$I = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = \frac{2\pi i}{2}(-1) = -\pi i$$

$$f''(z) = -\cos z \qquad f''(0) = -\cos 0 = -1$$

Контрольные вопросы

1. Определите производную функции комплексного переменного.
2. В чём разница между определением производной функции действительного переменного от определения производной функции комплексного переменного?
3. Сформулируйте условия Коши – Римана.
4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.
5. Дайте определение аналитической функции.
6. Какая функция называется голоморфной?

7. Какие точки комплексной плоскости называются правильными и особыми?

8. Какие функции называются гармоническими?

9. Запишите уравнение Лапласа.

10. В чём заключается геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного.

11. Что называется интегралом от функций комплексного переменного?

12. Каким условием должна удовлетворять функция $f(z)$, чтобы существовал интеграл от этой функции комплексного переменного?

13. Какие свойства интегралов от функций комплексного переменного знаете?

14. Как вычисляется интеграл от функций комплексного переменного? Запишите формулу.

15. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

16. Запишите интегральную формулу Коши.

17. Запишите интеграл типа Коши.

Лекция №58. Ряды комплексными членами. Ряды Тейлора, Лорана. Изолированные особые точки и их классификации

Функциональные ряды. Функциональным рядом называется ряд, членами которого являются функции комплексной переменной z

$$f_0(z)+f_1(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots \qquad (58.1)$$

Этот ряд может в одних точках сходится, а в других расходится.
Сумма такого ряда

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z), \text{ где } S_n(z)=f_0(z)+\ldots+f_n(z),$$

является функцией переменной z, определенной в точках, в которых ряд (58.1) сходится.

Определение. Множество точек, в которых ряд (58.1) сходится, будем называть областью сходимости данного ряда.

Определение. Остатком ряда (58.1) называется разность

$$R_n(z)=f(z)-S_n(z).$$

В каждой точке сходимости ряда (1) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z)=0$

Определение. Функциональный ряд называется сходящимся в данной точке z, если $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon,z)$, $n>N$ модуль остатка ряда удовлетворяет неравенство

$$|R_n(z)|<\varepsilon \qquad (58.2)$$

Если в этом определении N не зависит от z, то ряд называется равномерно сходящимся на соответствующем множестве.

Предположим теперь, что на некотором множестве точек D (в некоторой области, на некоторой дуге и т.д.) ряд (58.1) не только сходится, но и мажорируется некоторым сходящимся числовым рядом, т.е. существует такой сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{58.3}$$

с положительными членами, что во всех точках рассматриваемого множества

$$|f_0(z)| \le a_0, |f_1(z)| \le a_1, \ldots, |f_n(z)| \le a_n, \ldots$$

В этом случае будем говорить, что ряд (58.1) сходится правильно.

Заметим, что правильно сходящиеся ряды являются равномерно сходящимися, но не всякий равномерно сходящийся ряд сходится правильно.

Если все члены ряда (58.1) сходящегося правильно на некотором множестве D умножить на одну и ту же ограниченную по модулю функцию $\varphi(z)$, то полученный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z) f_n(z) \tag{58.4}$$

будет также правильно сходиться на D.

Некоторые свойства равномерно сходящихся рядов.

1.Если члены ряда

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \tag{58.5}$$

являются непрерывными функциями в некоторой области D или на некоторой дуге L и ряд (58.5) сходится в этой области или на этой дуге равномерно, то сумма ряда $f(z)$ непрерывна в области D или на дуге L.

2.Если члены ряда (58.5) непрерывны на некоторой дуге L и ряд сходится на этой дуге равномерно, то его можно почленно интегрировать вдоль дуги L, т.е.

$$\int_L f(z)dz = \int_L f_0(z)dz + \int_L f_1(z)dz + \ldots + \int_L f_n(z)dz + \ldots \tag{58.6}$$

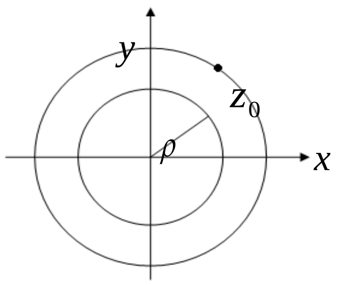
3.Если члены ряда (58.5) аналитически в некоторой области D и ряд (58.5) сходится в области D равномерно, то его сумма $f(z)$ также является функцией, аналитической в области D.

Степенные ряды. Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ называется степенным рядом, где C_n - постоянные числа.

Теорема Абеля. Если степенной ряд

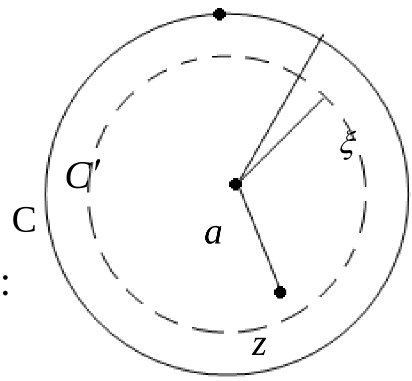
$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \tag{58.7}$$

сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно во всех точках, лежащих внутри окружности C с центром в точке $z = 0$, и проходящей через точку $z_0 (|z| < |z_0|)$, при этом во всяком круге $|z| \leq \rho$, радиуса ρ, меньше чем $|z_0|$, ряд (58.7) сходится правильно.



Ряд Тейлора. Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга D, ограниченного окружностью C с центром в точке $z = a$. Разложим эту функцию в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$.

Пусть z – любая внутренняя точка круга D. Проведём внутри круга D окружность C' с центром в точке a, так чтобы точка z оказалась внутри этой окружности. Пусть ξ - точка окружности C', тогда по интегральной формуле Коши имеем:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \tag{58.8}$$

Дробь $\frac{1}{\xi - z}$ преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \frac{z - a}{\xi - a}\right)}$$

Модуль разности $|\xi - a|$ равен радиусу окружности C', а модуль разности $|z-a|$ равен расстоянию от точки z до точки a, это расстояние меньше, чем $|\xi - a|$, поэтому $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$.

Следовательно, функция $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}$ является суммой геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}} = 1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n + \ldots, \tag{58.9}$$

сходящейся в любой точке z внутри окружности C'. Эта прогрессия сходится правильно на окружности C' относительно ξ, потому что при фиксированной z величина $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right| = q$ постоянна на этой окружности, и, следовательно, модули членов ряда совпадают с соответствующими членами сходящегося числового ряда

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

Этот ряд является мажорантным для ряда (58.9), следовательно, подынтегральную функцию можно представить в виде суммы ряда, сходящегося правильно на окружности С, то есть

$$\frac{f(\xi)}{\xi-a} = \frac{f(\xi)}{\xi-a} + \frac{(z-a)f(\xi)}{(\xi-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} + \ldots$$

и произвести почленное интегрирование, что приведёт к разложению функции $f(z)$ в степенной ряд

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-a} + \frac{z-a}{2\pi i}\int_{c'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{c'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} + \ldots =$$

$$= c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots,$$

где $C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} \quad (n = 0,1,2\ldots)$,

C' - любая окружность с центром в точке $z = a$, лежащая внутри круга D, или любой другой простой замкнутый контур, однократно обходящей точку a в положительном направлении и лежащей внутри круга D, так как в силу теоремы Коши величина интеграла не зависит от выбора контура.

Если учесть, что

$$C_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-a}=f(a); \qquad C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

то можно получить формулу Тейлора в знакомой нам из математического анализа форме:

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

Ряд Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n,$$

где a, C_n - комплексные числа, z – комплексная переменная называется рядом Лорана.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-a)^n$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ правильной частью ряда Лорана. Областью сходимости ряда Лорана является концентрическое кольцо с центром в точке a

$$\rho<|z-a|<R.$$

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $\rho<|z-a|<R$, то она разлагается в этом кольце в ряд Лорана единственным образом, коэффициенты C_n которого находятся по формуле

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

где С – произвольная окружность с центром в точке a, лежащего внутри данного кольца.

Пример 1 . Функцию $f(z)=\frac{1}{z+2}$ разложить в степенной ряд в окрестности точки $a=0$.

Решение. Найдём производную n - го порядка данной функции.

$$f^{(n)}(z)=\left(\frac{1}{z+2}\right)^{(n)}=\left[(z+2)^{-1}\right]^{(n)}=(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot(z+2)^{-n-1},$$

и вычислим значения производного в точке $z=0$:

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot n!2^{-n-1},$$

тогда

$$C_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n\cdot2^{-n-1}.$$

Функция разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки $a=0$ следующим образом.

$$f(z)=\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^{-n-2}\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$$

Найдём радиус сходимости этого ряда

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{C_n}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{(-1)^n 2^{(-n-1)}}}=\frac{1}{2^{-1}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{2^{-1}}}=2$$

Следовательно, область сходимости ряда круг $|z|<2$.

Пример 2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}$ в кольце $0<|z-1|<2$.

Решение. Функцию $f(z)$ нужно представить в виде суммы, степеней (положительных и отрицательных) разности $(z-1)$. Данную функцию преобразуем следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2=\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{1}{4(z+1)}+\frac{1}{4(z+1)^2}$$

Первые два слагаемых уже имеют нужный вид. Представим вторые два слагаемых в виде

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\ldots+(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\ldots\right)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1-2\cdot\frac{z-1}{2}+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}\cdot\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\ldots\right]$$

Подставляя все разложения в функцию $f(z)$, получим:

$$f(z)=\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{1}{4(z+1)}+\frac{1}{4(z+1)^2}=\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-$$
$$-\frac{3}{64}(z-1)^3+\ldots.$$

Изолированные особые точки. Точка z_0 называется нулём функции $f(z)$ порядка n, если выполняются условия

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ldots,\ f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

Если $n=1$, то точка z_0 называется простым нулём.

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме той самой точки $z = z_0$.

Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции в точке z_0.

Точка z_0 называется полюсом функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема. Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулём для функции

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

Теорема. Точка z_0 тогда и только тогда является нулём n - го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство:

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$

Точка z_0 называется полюсом порядка $n(n \geq 1)$функции $f(z)$, если эта точка является нулём порядка *n* для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

В случае n=1 полюс называется простым.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если в точке z_0 функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Имеют место следующие утверждения:

1.Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержало главной части.

2.Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержала лишь конечное число членов

$$f(z)=\frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k}+...+\frac{C_{-k}}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k \qquad C_{-k}\neq 0$$

Наибольший из показателей степеней разности $z-z_0$, содержащихся в знаменателях главной части ряда Лоран, совпадает с порядком полюса.

3.Точка z_0 тогда и только тогда является существенно особой точкой для функции $f(z)$, когда главная часть её лорановского разложения в окрестности точки z_0 содержит бесконечно много членов.

Если бесконечность является изолированной особой точкой функции $f(z)$ и $\xi=\frac{1}{z}$- преобразование инверсии, то бесконечность для функции $f(z)$ называется устранимым полюсом или существенно особой точкой тогда и только тогда, когда точка $\xi=0$ является соответственно такой же для функции

$$g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

Для изолированной особой точки – бесконечности справедливы следующие теоремы

Теорема 1. Для того чтобы изолированная особая точка - ∞ была устранима для функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности не содержало положительных степеней z:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}C_n z^n$$

Теорема 2. Для того чтобы изолированная особая точка – бесконечность была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение функции в ряд Лорана в окрестности ∞ содержало конечное число положительных степеней z:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{k}C_n z^n \qquad k>0 \qquad C_k\neq 0$$

Теорема 3. Для того чтобы изолированная особая точка – бесконечность была существенно особой для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение функции в ряд Лорана, в окрестности бесконечности содержало бесконечное число положительных степеней z:

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$, т.е. для любого $n>0$ существует такое $m>n$,что $C_m \neq 0$

Контрольные вопросы

1.Какой ряд называется функциональным?

2.Сформулируйте теорему Абеля.

3.Запишите ряд Тейлора.

4.Какое множество является областью сходимости ряда Лорана?

5.Дайте определение изолированной особой точки функции комплексного переменного.

6.Какая точка называется полюсом?

7.Какая точка называется существенно-особой точкой?

Лекция №59. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Применение вычетов при вычислении интегралов

Основная теорема о вычетах. Пусть точка $z=a$ является правильной или изолированной особой точкой однозначной функции $f(z)$. Тогда можно выбрать простой контур С, однократно обходящий точку a в положительном направлении, так, чтобы на контуре С и всюду внутри этого контура за исключением, быть может, самой точки a, функция $f(z)$ была аналитической.

Определение. Величина $\frac{1}{2\pi i}\int_{c} f(z)dz$ называется вычетом функции относительно точки а.

Обозначается эта величина следующим образом:

$$\text{Выч}\ [f(z),a]=res[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c} f(z)dz \qquad (59.1)$$

$$resf(a), \underset{z=a}{res}\, f(z)$$

Заметим, что вычет данной функции относительно заданной точки не зависит от формы и размеров контура С (если этот контур простой и однократно обходящий данную точку в положительном направлении).

Если точка a является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то коэффициент C_{-1} первого члена главной части Лорановского разложения этой функции в окрестности точки a равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} f(z)dz$$

и следовательно, вычет функции $f(z)$ относительно точки a совпадает с коэффициентом C_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a

$$res[f(z),a]=C_{-1}$$

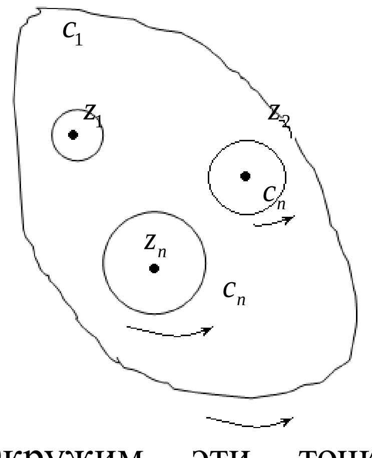
а)Если точка a является правильной, то вычет функции $f(z)$ относительно этой точки равен нулю.

Действительно, так как точка a – правильная, то все коэффициенты главной части разложения в окрестности этой точки равны нулю, следовательно,

$$C_{-1}=0 \Rightarrow res[f(z),a]=0$$

б) Если a – полюс или существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет относительно неё может быть отличным от нуля, но может оказаться и равным нулю.

Пусть C_0 - простой замкнутый контур, на котором функция $f(z)$ аналитична. Допустим, что внутри контура C_0 функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением n изолированных особых точек $z_1, z_2,..., z_n$.



Окружим эти точки лежащими внутри контура C_0 окружностями $C_1, C_2,..., C_n$ столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из этих окружностей находилось лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек

Тогда по теореме Коши для составного контура получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(z)dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} f(z)dz,$$

где все контура обходятся против часовой стрелки. Итак, можно сформировать основную теорему о вычетах.

Теорема 1. Величина $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)dz$ равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек этой функции, находящихся внутри контура C_0:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res\left[f(z), z_k\right] \qquad (59.2)$$

Вычисление вычета в полюсе $z = a \quad (a \neq \infty)$.

Случай простого полюса. Если точка a - простой полюс функции $f(z)$, то ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = C_{-1}\cdot\frac{1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

откуда находим, $C_{-1} = \lim\limits_{z\to a} f(z)\cdot(z-a)$ т.е.

$$\boxed{res\left[f(z); a\right] = \lim_{z\to a} f(z)\cdot(z-a)} \qquad (59.3)$$

Если функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - аналитические функции в точке a, причём $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то точка a является простым полюсом функции $f(z)$ и по формуле (59.3) находим:

$$res\left[f(z); a\right] = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

т.е.
$$\boxed{res\left[f(z); a\right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}} \qquad (59.4)$$

Случай кратного полюса. Если точка a – полюс порядка m для функции $f(z)$, то ряд Лорана в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \ldots \qquad (59.5)$$

Умножив обе части (59.5) на $(z-a)^m$, получим

$$(z-a)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \ldots + C_{-1}(z-a)^{m-1} + \ldots$$

Дифференцируя это равенство m раз, и переходя к пределу при $z \to a$, находим:

$$(m-1)!C_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$$

$$C_{-1} = res\left[f(z), a\right] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m \cdot f(z)\right] \qquad (59.6)$$

Если $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$, где $h(z)$ аналитична в точке $z = a$ и $h(a) \neq 0$, то получим формулу

$$res\left[\frac{h(z)}{(z-a)^m}; a\right] = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a) \qquad (59.7)$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, которая в точке $z = 1$ имеет полюс I порядка, а в точке $z = 2$ имеет полюс II порядка.

По формуле (59.7) имеем: $res\left[f(z),1\right] = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}(z-1) = 1$

и для $z = 2$

$$res\left[f(z),2\right] = \frac{1}{1!}\left(\frac{z}{(z-1)}\right)'\Bigg|_{z=2} = \frac{z-1-z}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2} = -1$$

Вычет в бесконечно удаленной точке. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\rho < |z| < \infty$, т.е. в проколотой окрестности точки $z = \infty$. Тогда функция $f(z)$ представляется в области $\rho < |z| < \infty$ сходящимся рядом Лорана, а точка $z = \infty$ либо является изолированной особой точкой, либо правильной точкой, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \frac{C_{-1}}{z} + \ldots$$

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ (обозначается $res\left[f(z);\infty\right]$) называется число $-C_{-1}$, где C_{-1} коэффициент при $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}}$ ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е.

$$res\left[f(z);\infty\right]=-C_{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}f(z)dz,$$

где С – окружность, обходимая в положительном направлении с центром в точке нуль радиусом больше ρ .

Если ∞ - устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$res\left[f(z);\infty\right]=-\lim_{z\to\infty}z\cdot\left[f(z)-c_0\right],$$

где $$c_0=\lim_{z\to\infty}f(z).$$

Вычет аналитической функции относительно бесконечно удалённой устранимой точки, в отличие от конечной устранимой особой точки, может оказаться отличным от нуля.

Пример: Для функции $f(z)=\dfrac{z+1}{z}$ имеем $f(z)=1+\dfrac{1}{z}$. Это выражение можно рассматривать как лорановское разложение в окрестности бесконечно удалённой точки.

Имеем: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=1$, т.е. $z=\infty$ есть устранимая особая точка и предполагая, что $f(\infty)=1$, мы определяем значение функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке. Здесь $C_{-1}=1$, следовательно,

$$res\left[f(z);\infty\right]=-1$$

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей расширенной комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая вычет в точке $z=\infty$, равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}res\left[f(z);z_k\right]+res\left[f(z);\infty\right]=0,$$

здесь z_k $\left(k=1;\overline{n}\right)$ - все конечные особые точки функции $f(z)$, а точка $z=\infty$ является либо особой, либо правильной точкой функции $f(z)$.

Теорема 3. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области D расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек, и непрерывна вплоть до границы С этой области. Пусть С состоит из конечного числа ограниченных кусочно-гладких кривых. Тогда а) если область D не содержит точку $z = \infty$, то:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left[f(z); z_k\right]$$

б) если точка $z = \infty$ принадлежит области D, то

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i\left[\sum_{k=1}^{n} res\left[f(z); z_k\right] + res\left[f(z); \infty\right]\right]$$

здесь z_k $\left(k = 1; \overline{n}\right)$ - все конечные особые точки функции $f(z)$, лежащие в области D.

С помощью этой теоремы можно вычислять определенные интегралы.

Приложения вычетов к вычислению определенных интегралов.

1) Интегралы от рациональных функций.

Пусть $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ рациональная функция, где $P_m(x), Q_n(x)$ многочлены соответственных степеней m и n. Если $f(z)$ непрерывна на всей действительной оси $\left(Q_n(x) \neq 0\right)$ и $n \geq m + 2$, т.е. степень знаменателя, по крайней мере, на 2 единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi\sigma,$$

где σ - означает сумму вычетов функции $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{O'_n(x)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример: Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} \quad (a > 0)$$

Решение: Подынтегральная функция чётная, поэтому

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2} dx$$

Введём функцию $f(z) = \dfrac{z^2}{\left(z^2 + a^2\right)^2}$, которая на действительной оси, т.е. при $z = x$, совпадает с $f(z)$.

Функция $f(z)$ имеет два полюса $z=\pm ai$ второго порядка. На верхней полуплоскости лежит только один полюс $z=ai$ второго порядка, поэтому

$$res[f(z);ai]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[f(z)(z-ai)^2\right]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=$$

$$\lim_{z\to ai}\frac{2z(z+ai)^2-2z^2(z+ai)}{(z+ai)^4}=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{1}{4ai}$$

Следовательно, $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}2\pi i\frac{1}{4ai}=\frac{\pi}{4a}$

2). Интеграл вида $\displaystyle\int_0^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx,\int_0^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx$,

где $R(x)$ - правильная рациональная дробь, $\lambda>0$ любое вещественное число.

Для вычисления таких интегралов удобно пользоваться следующей леммой.

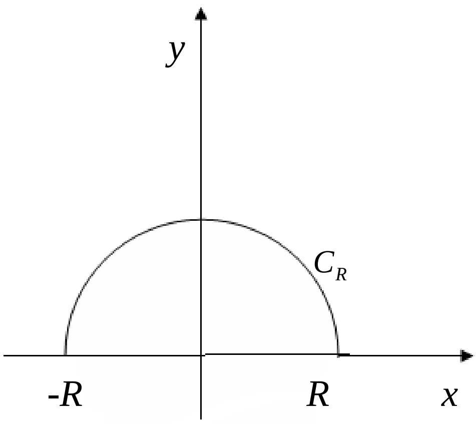
Лемма Жордана: Пусть g (z) - функция аналитическая в верхней полуплоскости $(0<\arg z<\pi)$, за исключением конечного числа особых точек и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $\lambda>0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}g(z)\cdot e^{i\lambda z}\,dz=0,$$

где C_R - полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке O и радиусом R.

Пример. Вычислить интеграл

$$I=\int^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx \qquad (a>0,\ k>0)$$



Введём вспомогательную функцию

$$f(z)=\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}$$

Если $z=x$, то Im $f(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x)=\dfrac{x\sin ax}{x^2+k^2}$.

Рассмотрим контур C_R. При достаточно большом R на контуре C_R функция g(z)=$\dfrac{z}{z^2+k^2}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)|<\dfrac{R}{R^2+K^2}$ и, следовательно, g(z)$\to$ 0 при $R\to\infty$, значит по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz=0$$

Для любого $R>k$ по теореме о вычетах имеем

$$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx+\int_{C_R}\frac{ze^{ioz}}{z^2+k^2}dz=2\pi i\sigma,$$

где

$$\sigma=res\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2};ik\right]=\lim_{z\to ik}\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\cdot(z-ik)\right]=\frac{1}{2}e^{-ak}$$

При R$\to\infty$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx=\pi ie^{-ak}$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx=\pi e^{-ak}$$

в силу чётности подынтегральной функции окончательно получим:

$$I=\frac{\pi}{2}e^{-ak}.$$

3). Интеграл вида $I=\int_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$, (59.8)

где R - рациональная функция своих аргументов. Сделаем замену $z=e^{i\varphi}$, тогда

$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad d\varphi=-i\frac{dz}{z}$$

При изменении $0 \le \varphi < 2\pi$ переменная z пробегает окружность $|z| = 1$ в положительном направлении, поэтому интеграл (59.8) сводится к интегралу по замкнутому контуру:

$$I = \int\limits_{|Z|=1} R_1(z)dz,$$

где $R_1(z) = -\frac{i}{z} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}); \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right) -$ рациональная функция от z.

По теореме о вычетах $I = 2\pi i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} res\left[R_1(z), z_k\right],$

где $z_1, z_2, ..., z_n$ - все полюса рациональной функции $R_1(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

Пример. Вычислить интеграл.

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{7 + 3\cos x} = I$$

Сделаем замену: $z = e^{ix}, \cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$

$$dx = \frac{idz}{z} \quad 0 \le x \le 2 \rightarrow |z| = 1$$

$$I = -i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(7 + 3 \cdot \frac{z^2 + 1}{2z}\right)} = -2i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2 \cdot 7z + 3z^2 + 3} = -2i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2 + 14z + 3} = -2ires\left[f(z); a\right]$$

$$3z^2 + 14z + 3 = 3\left(z - \frac{2\sqrt{10} - 7}{3}\right)\left(z + \frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$\frac{D}{4} = 49 - 9 = 40$$

$$z_{1,2} = \frac{-7 \pm 2\sqrt{10}}{3} \quad z_1 = -\frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}, z_2 = \frac{2\sqrt{10} - 7}{3}$$

В круг $|z| = 1$ попадает только одна точка z_2, поэтому $a = z_2$.

Найдем вычет функции $f(z)$ относительно точки z_2

$$res\left[f(z);z_2\right]=\lim_{z\to z_2}3\left(z-\frac{2\sqrt{10}-7}{3}\right)\cdot\frac{1}{3\left(z-\frac{2\sqrt{10}-7}{3}\right)\left(z+\frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)}=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{3\left(z+\frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3\frac{2\sqrt{10}-7+2\sqrt{10}+7}{3}}=\frac{1}{4\sqrt{10}}$$

Следовательно, $I=-2i\cdot 2\pi i\frac{1}{4\sqrt{10}}=\frac{\pi}{\sqrt{10}}$ Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$

Контрольные вопросы

1.Дайте определение вычета функции комплексного переменного.

2.Сформулируйте основную теорему о вычетах.

3.По какой формуле вычисляется вычет в полюсе?

4.Чему равен вычет функции в существенно особой точке?

5.Дайте определение вычета функции в бесконечно удаленной точке.

Модуль 20. Операционное исчисление

Лекция №60. Преобразования Лапласа. Свойства изображений. Класс оригиналов и изображений. Основные теоремы операционного вычисления

Одним из важных приложений теории функций комплексного переменного является метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений, основанных на интегральном преобразовании Лапласа (операционный метод). Применение этого метода обеспечивает сравнительную простоту изучения решений дифференциальных уравнений, а также изучение переходных процессов в электрических цепях.

Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции действительного переменного, её изображение – функцию комплексного переменного.

При этом операции над изображениями оказываются значительно проще, чем операции над исходными функциями (оригиналами). Так, например, линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для оригинала заменяется алгебраическим уравнением для его изображения. Решив полученное для изображения уравнение, восстанавливают по изображению его оригинал, который и является искомым решением заданного дифференциального уравнения.

1.Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение.

Преобразованием Лапласа функции действительного переменного называется функция комплексного переменного F (p), определяемая формулой

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\,, \qquad (60.1)$$

где $p=s+i\tau$.

Интеграл зависит от комплексного параметра p (этот интеграл называют интегралом Лапласа).

Каким условиям должна удовлетворять функция $f(t)$, чтобы несобственный интеграл (60.1) сходился и действительно определял некоторую функцию F (p)?

Предположим выполнения следующих условий:

1. Функция $f(t)$ кусочно-непрерывная при $t\geq 0$, это значит, что она или непрерывна, или имеет точки разрыва только первого рода

(в каждом конечном интервале число таких разрывов обязательно конечно);

2. Для всех отрицательных t<0 $f(t)=0$;

3. $|f(t)|$ возрастает при $t \to +\infty$ не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные $m>0$ и s, что для всех t

$$|f(t)| \le me^{st} \tag{60.2}$$

(Нижняя грань S_0 всех чисел s, для которых справедливо неравенство (60.2) называется показателем роста функции $f(t)$).

Условие 3 обеспечивает сходимость интеграла Лапласа. Этому условию удовлетворяют все ограниченные функции, а также все степенные функции $t^k(k>0)$.

Определение. Любая функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям 1- 3, называется оригиналом; функция $F\ (p)$ определяемая формулой (61.1), называется изображением $f(t)$ (или изображением по Лапласу).

Связь между изображением и соответствующим оригиналом будем обозначать:

$$f(t) \leftarrow F\ (p) \qquad \text{или} \qquad F\ (p) \rightarrow f(t)$$

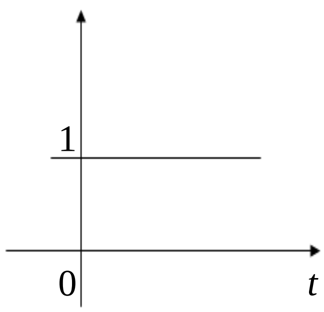
Отметим, что, как правило, для функций, с помощью которых описываются физические процессы, условия 1-3 выполняются.

Преимущества операционного исчисления заключаются в том, что действие дифференцирования заменяется умножением, а действие интегрирования заменяется делением.

2.Единичная функция и её изображение.

Рассмотрим функцию Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$$



Найдём изображение для этой функции:

$$p = s + i\tau, \qquad \text{s = Rep}$$

$$\text{F (p)} = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$$

Это имеет место, если Rep>0, следовательно,

$$\theta(t) \leftarrow \frac{1}{p} \tag{60.3}$$

Заметим, что, если для функции g(t), удовлетворяющей условиям 1 и 3 , не выполняется условие 2, то для функции

$$f(t)=\theta(t)\cdot g(t)=\begin{cases} g(t), & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

условие 2 выполняется, следовательно, эта функция является оригиналом.

Условимся в дальнейшем опускать множитель $\theta(t)$, считая эти функции равными нулю при $t<0$.

Тогда (60.3) можно записать в виде

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}$$

3.Изображения некоторых простейших функций.

1. Найдём изображение функции $e^{\lambda\tau}$, где λ - комплексная постоянная

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}e^{\lambda t}dt=\int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t}dt,$$

этот интеграл сходится, если $\operatorname{Re}(p-\lambda)>0 \Rightarrow \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\lambda$, тогда

$$F(p)=\frac{1}{p-\lambda} \quad \text{т.е.} \quad e^{\lambda t} \leftarrow \frac{1}{p-\lambda}.$$

2. Найдём изображение оригинала $f(t)=\cos\omega t$, где ω - действительное число,

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}\left[e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right], \text{ тогда}$$

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\cos\omega t dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{i\omega t}dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(p-i\omega)t}dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(p+i\omega)t}dt=$$

$$\frac{1}{2(p-i\omega)}+\frac{1}{(p+i\omega)}=\frac{p+i\omega+p-i\omega}{2(p^2+\omega^2)}=\frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \operatorname{Re}p>0.$$

Итак
$$\boxed{\cos\omega t \leftarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}}$$

3.Упражнение. Доказать, что $\boxed{\sin\omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$

4.Найти изображение оригинала

$$f(t)=e^{-\alpha t}\cos\omega t, \quad \alpha \text{ - комплексное число.}$$

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\cdot e^{-\alpha t}\cos\omega t dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\cdot e^{-\alpha t}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-(p+\alpha-i\omega)t}dt+\int\limits_0^{\infty} e^{-(p+\alpha+i\omega)t}dt=$$

$$=\frac{1}{2(p+\alpha-i\omega)}+\frac{1}{2(p+\alpha+i\omega)}=\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2},$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{p}+\alpha)>0.$$

Итак: $$\boxed{e^{-\alpha t}\cos\omega t \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{p}{(p+\alpha)^2+\omega^2}}$$

5.Для оригинала $e^{-\alpha t}\sin\omega t$ имеем изображение

$$\boxed{e^{-\alpha t}\sin\omega t \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}}$$

6.Найти изображение оригинала $f(t)=shat$.

Так как $shat=\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$, a – любое комплексное число, то

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}shatdt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\left(e^{at}-e^{-at}\right)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-(p-a)t}dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-(p+a)t}dt=$$

$$\frac{1}{2(p-a)}-\frac{1}{2(p+a)}=\frac{a}{p^2+a^2}$$

$\mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Re}\,a|$.

т.е. $$\boxed{shat \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{a}{p^2-a^2}}$$

7.Оригиналу $chat$ соответствует изображение

$$\boxed{chat \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2-a^2}}, \quad \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Re}\,a|.$$

Сформулируем следующее:

Теорема. Для всякого оригинала $f(t)$ его изображение $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>S_0$, где S_0 - показатель роста функции $f(t)$.

Следствие 1 .Если $f(t)$ - оригинал, то $\lim\limits_{\mathrm{Re}\,p\to\infty} F(p)=0$.

Доказательство. Если S_0- показатель роста функции $f(t)$ и $S=\mathrm{Re}\,p$, то $|f(t)|\le\mu e^{(S_0+\varepsilon)t}$, где $\mu>0,\varepsilon>0$ и

$$|F(p)| \le \mu \int_0^\infty e^{(S_0+\varepsilon-S)t}dt = \frac{\mu}{S-(S_0+\varepsilon)}$$

Откуда следует, что при $S \to \infty$, $|F(p)| < \varepsilon$.

4.Основные свойства преобразования Лапласа.

Теорема единственности. Преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ единственно в том смысле, что две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают во всех точках непрерывности для всех $t > 0$.

1. **Теорема линейности.**

Если $f(t) \leftarrow F(p)$, $g(t) \leftarrow G(p)$, то для любых комплексных λ и μ

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \leftarrow \lambda F(p) + \mu G(p)$$

Это свойство следует из определения преобразования Лапласа и линейности интеграла.

Пример. Найдём изображение оригинала

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \leftarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\frac{p+i\omega-p+i\omega}{p^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

2. **Теорема подобия**

Если $f(t) \leftarrow F(p)$, то для любого $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

Действительно, полагая $\alpha t = \tau$, получим

$$\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{2}\tau}d\tau = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. **Дифференцирование оригинала**.

Если $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$,..., $f^{(n)}(t)$ - оригиналы и $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

где $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{t\to 0} f^{(k)}(t), \quad k=0,1,\ldots,n-1.$

Предыдущая формула упрощается, если все $f^{(k)}(0)=0$ $k=0,n-1$, тогда

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p)$$

и в частности $f'(t)=pF(p)$, т.е. дифференцированию оригинала соответствует умножение на p его изображения.

4. **Интегрирование оригинала**.

Если $f(t) \leftarrow F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \leftarrow \dfrac{F(p)}{p}$.

Действительно, если $f(t)$- оригинал, то и функция $g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ - также оригинал, причём $g'(t)=f(t)$, $g(0)=0$.

Если $g(t) \leftarrow G(p)$, то дифференцируя $g(t)$, получим $f(t)=g'(t) \leftarrow pG(p)$, т.е. $F(p)=pG(p) \Rightarrow G(p)=\dfrac{F(p)}{p}$.

5. **Дифференцирование изображения**.

Если $F(p) \to f(t)$, то $F^{(n)}(p) \to (-t)^n f(t)$.

Действительно, так как функция $F(p)$ регулярна (аналитична) в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 - показатель роста функции $f(t)$, то дифференцируя функцию $F(p)$ по параметру p, имеем,

$$F'(p)=\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-pt} f(t)\right)dt=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\left(-tf(t)\right)dt$$

следовательно,

$$F'(p) \leftarrow (-t) f(t)$$

Общая формула доказывается по индукции.

6. Интегрирование изображения.

Если $f(t) \leftarrow F(p)$ и если $\dfrac{f(t)}{t}$ оригинал, то $\dfrac{f(t)}{t} \leftarrow \int\limits_p^\infty F(\xi)d\xi$

Доказательство. Пусть $\frac{f(t)}{t} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \Phi(p)$. Продифференцировав функцию $\Phi(p)$ (которая является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$), получим

$$\Phi'(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} -\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = -F(p) \quad ,$$

откуда

$$\Phi(p) - \Phi(\infty) = \int_p^\infty F(\xi)d\xi$$

где путь интегрирования (p,∞) лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$.

В силу следствия 1 $\Phi(\infty) = 0$ и

$$\Phi(p) = \int_p^\infty F(\xi)d\xi \quad \text{т.е.} \quad \frac{f(t)}{t} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \int_p^\infty F(\xi)d\xi$$

Пример. Найдём изображение интегрального синуса sit:

$$sit = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau .$$

Из свойства 6 имеем

$$\frac{\sin t}{t} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \int_p^\infty \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = arctg\xi \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - arctgp$$

откуда в силу свойства 4 имеем

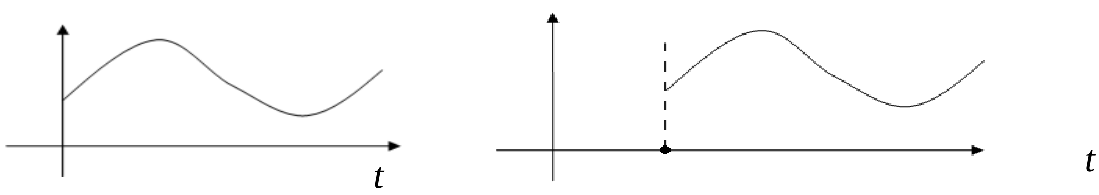
$$sit \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - arctgp\right)$$

7. **Теорема запаздывания оригинала**.

Если $f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} F(p)$ и $f(t) = 0$ при $t < \tau$, где $\tau > 0$, то

$f(t-\tau) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} e^{-p\tau} F(p)$.

На этой теореме основано изображение многих функций (в частности, функций, описывающих импульсные процессы). Графически это выглядит следующим образом:



т.е. график функции $f(t-\tau)$ сдвинут относительно графика $f(t)$ на τ, причём на участке $(0;\tau)$ график совпадает с осью Ot, так как на этом участке $t-\tau<0$ и поэтому $f(t-\tau)=0$. То есть процесс описывания функцией $f(t-\tau)$ начинается как бы с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$, отсюда термин “запаздывание”. Другими словами, запаздывание оригинала на время τ соответствует умножению изображения e^{-pt}.

8. Теорема смещения изображения.

Если $f(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}F(p)$, то для любого комплексного λ .

$$e^{\lambda t}f(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}F(p-\lambda)$$

Доказательство.

$$e^{\lambda t}f(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}\int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{\lambda t}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t}\cdot f(t)dt=F(p-\lambda)$$

Определение. Свёрткой двух функций f и g называется функция, которая обозначается $f*g$ и определяется равенством

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\xi)\cdot g(t-\xi)d\xi$$

Операция свёртки называется свёртыванием.

Пример: Найти свёртку функций

$f(t)=t$, $g(t)=e^t$.

$$t*e^t=\int_0^t \xi e^{t-\xi}d\xi=\begin{vmatrix} u=\zeta ....dv=-e^{t-\xi}d\xi \\ du=d\xi ......v=-e^{t-\xi}\end{vmatrix}=$$

$$=-\xi e^{t-\xi}\Big|_0^t+\int_0^t e^{t-\xi}d\xi=-t-e^{t-\xi}\Big|_0^t=-t-1+e$$

следовательно, $t*e^t=e^t-t-1$

9. Теорема умножения изображений

Если $f(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}F(p)$, $g(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}G(p)$, то свёртка функций $f*g$ соответствует произведению изображений:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\xi)\cdot g(t-\xi)d\xi\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}F(p)G(p)$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [1].

В заключение данного раздела приведем таблицу рассмотренных свойств изображений и таблицу изображений ряда элементарных и специальных функций, наиболее часто используемых в приложениях.

Таблица оригиналов и изображений.

Оригинал	Изображение
1. 1	$\frac{1}{p}$
2. $\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
3. $\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
4. $sh \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
5. $ch \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
6. e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
7. $\cos(t-t_0)$	$\frac{pe^{-pt_0}}{p^2+\alpha^2}$
8. $e^{-\alpha t}\sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
9. $e^{-\alpha t}\cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
10. $e^{at}\sin(\beta t+\varphi)$	$\frac{\beta\cos\varphi+(p-\alpha)\sin\varphi}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
11. $e^{at}\cos(\beta t+\varphi)$	$\frac{(p-\alpha)\cos\varphi-\beta\sin\varphi}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
12. t	$\frac{1}{p^2}$
13. t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
14. $t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
15. $t\sin \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$

16.	$t\cos\alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$
17.	$tsh\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$
18.	$tch\alpha t$	$\frac{p^2+\alpha^2}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$
19.	$\sin(t-\tau)\quad t-\tau>0$	$\frac{e^{-\tau.p}}{p^2+1}$
20.	$\cos(t-\tau)\quad t-\tau>0$	$\frac{pe^{-\tau.p}}{p^2+1}$
21.	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}F(p)$
22.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^\infty F(q)dq$
23.	$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0}F(p)$
24.	$f^{(n)}(t),\ldots f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$	$p^nF(p)$
25.	$f*g$	$F(p)\cdot I(p)$

Лекция №61. Восстановление оригинала по изображению

Ранее мы по заданному оригиналу разыскивали изображение. Приведём теорему, позволяющую по заданному изображению $F(p)$ описывать оригинал $f(t)$.

Теорема 1. (теорема обращения)

Пусть $f(t)\doteqdot F(p)$. Если функция $f(t)$ непрерывна в точке t и имеет в этой точке односторонние конечные производные, то

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{-pt}F(p)dp} \qquad (61.1)$$

Интеграл (61.1) берётся вдоль любой прямой $\operatorname{Re}p=b>S_0$, где S_0 - показатель роста функции $f(t)$ и понимается в смысле главного значения.

Формула (61.1) называется формулой обращения Лапласа или формулой Мелини.

Следствие. Оригинал $f(t)$ определяется однозначно по его изображению $F(p)$ во всех точках, где функция $f(t)$ дифференцируемая.

Теорема 2. (условие существования оригинала)

Пусть функция $F(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S$ и удовлетворяет условиям:

1) интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|F(a+i\delta)\right|d\delta$ сходится при любом $a > S$,

2) $MR = \max\limits_{p\in\Gamma_R}\left|F(p)\right| \to 0$ при $R\to\infty$, где Γ_R - дуга окружности $|p| = R, \operatorname{Re} p \geq a > S$, тогда $F(p)$ является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\omega}^{b+i\omega} e^{pt} F(p)dp, \tag{61.2}$$

где $a > S$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Теорема 3. (первая теорема разложения) Пусть функция $F(p)$ аналитическая в точке $p=\infty$, $F(\infty)=0$ и пусть её ряд Лорана в окрестности точки $p=\infty$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}$$

Тогда оригиналом функции $F(p)$ является функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}t^n, \tag{61.3}$$

Причём этот ряд сходится при всех t. Функцию $f(t)$ называют целой функцией экспоненциального типа.

По этой теореме можно определить оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$, если функция $F(p)$ является аналитической в бесконечно удалённой точке.

Замечание. Справедливо и обратное утверждение: если $f(t) = Q(t)\cdot g(t)$ - оригинал, причём $g(t)$ целая функция экспоненциального типа, то её изображение $F(p)$ есть функция, аналитическая в бесконечно удалённой точке.

Функция $f(z)$ называется мероморфной, если в каждой ограниченной части плоскости она аналитическая, за исключением, быть может, конечного числа полюсов

Теорема 4. Пусть мероморфная функция $F(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S$ и удовлетворяет условиям:

1) существует система окружностей C_n: $|p| = R_n, R_1 < R_2 < ..., R_n \to \infty \quad (n \to \infty)$ такие, что $\max\limits_{p \in C_n} |F(p)| \to 0$,

2) при любом $a > s$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\delta)| d\delta$ сходится,

тогда $F(p)$ - изображение, оригиналом для которого служит функция

$$\boxed{f(t) = \sum_{(p_k)} res\left[F(p)e^{pt}, p_k\right]}, \qquad (61.4)$$

где сумма берётся по всем полюсам функции $F(p)$.

Теорема 4. называется второй теоремой разложения.

Следствие. Если $F(p) = \frac{Q_n(p)}{R_m(p)}$, где $Q_n(p)$ и $R_m(p)$-многочлены степени m и n соответственно, не имеющие общих нулей, и если $n < m$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{e} \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \left\{F(p)e^{pt}(p - p_k)^{m_k}\right\}\Bigg|_{p = p_k}, \qquad (61.5)$$

где $p_1, p_2, ..., p_e$ - различные нули многочлена $R_m(p)$, m_k - кратность нуля p_k.

Рассмотрим примеры.

1.Найти оригинал изображения, который задаётся формулой

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}$$

Решение: $F(p) = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 2} + 20\frac{p}{p^2 + 3^2} \risingdotseq \frac{5}{2}\sin 2t + 20\cos 3t$

Ответ: $f(t) = \frac{5}{2}\sin 2t + 20\cos 3t$

2.Найти оригинал $f(t)$ по его изображению.

$$F(p) = \frac{p + 8}{p^2 + p - 2}$$

Функция $F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p_1 = 1$ и $p_2 = -2$.

Воспользуемся формулой

$$F(p) = \frac{Q_n(p)}{R_m(p)} \risingdotseq \sum_{k=1}^{m} \frac{Q_n(p)}{R_m(p)} e^{pt}(p - p_k)\Big|_{p = p_k},$$

т.е. $f(t) = \left[\frac{p + 8}{p + 2}e^{pt}\right]\Bigg|_{p=1} + \left[\frac{p + 8}{p - 1}e^{pt}\right]\Bigg|_{p=-2} = \frac{9}{3}e^t + \frac{6}{-3}e^{-2t} = 3e^t - 2e^{-2t}$

Этот же результат можно получить, если представить $F(p)$ в виде суммы простейших дробей:

$$F(p)=\frac{p+8}{p^2+p-2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+2}$$

$$p+8=A(p+2)+B(p-1)$$

$$\begin{matrix} 9=A\cdot 3\Rightarrow A=3 \\ 6=-3\cdot B\Rightarrow B=-2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{p+8}{p^2+p-2}=\frac{3}{p-1}-\frac{2}{p+2}$$

По таблице соотношения оригиналов и изображений имеем:

$\frac{3}{p-1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}3e^t$; $-\frac{2}{p+2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}-2e^{-2t}$. Окончательно, получаем: $f(t)=3e^t-2e^{-2t}$

3. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$F(p)=\frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2}.$$

По формуле (4) имеем:

$$F(p)=\frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2}=\frac{1+2p^2}{(p-i)^2(p+i)^2},$$

т.е. в точках $p_1=i, p_2=-i$ функция $F(p)$ имеет полюсы второго порядка. По формуле (4) имеем

$$f(t)=\sum_k res\left[F(p)e^{pt},p_k\right]$$

Вычислим вычеты функции $F(p)$ в точках $p_1=i, p_2=-i$

$$f(t)=\left[\frac{1+2p^2}{(p+i)^2}e^{pt}\right]'_{p=i}+\left[\frac{1+2p^2}{(p-i)^2}e^{pt}\right]'_{p=-i}=\frac{1}{2}t\cos t+\frac{3}{2}\sin t$$

Второй способ. Функцию $F(p)$ представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1+2p^2}{(p+i)^2}=\frac{1+p^2+p^2}{(p+i)^2}=\frac{1}{p^2+1}+\frac{p^2}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}+\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}+\frac{1}{(p^2+1)^2}$$

Первые две дроби представляют собой табличные изображения, соответствующие оригиналам: $\sin t$ и $t\cos t$

Вычислим оригинал для изображения. $F_1(p)=\frac{1}{(1+p^2)^2}$ Для этого воспользуемся свойством 9 преобразования Лапласа, т.е. свёрткой функций $\sin t$ и $\sin t$

$\sin t=\frac{1}{p^2+1}$, поэтому по теореме произведения изображений

$$F_1(p)=\frac{1}{\left(1+p^2\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}\int_0^t \sin\xi\sin(t-\xi)d\xi=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(2\xi-t)-\cos t\right]d\xi=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2\xi-t)\Big|_0^t-\frac{1}{2}\cos t\cdot\xi\Big|_0^t=\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{t}{2}\cos t=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t$$

Следовательно, учитывая, что

$$t\cos t\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}\quad,$$

получим

$$f(t)=\sin t+t\cos t+\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}t\cos t$$

4.Найти оригинал $f(t)$, если $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p+1}$

Наличие множителя $e^{-p\tau}$ свидетельствует о том, что нужно использовать теорему запаздывания, т.е.

$$f(t-\tau)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}e^{-p\tau}f(p)$$

в нашем случае $\tau=1\Rightarrow\dfrac{1}{p+1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}e^{-t}\Rightarrow\dfrac{e^{-p}}{p+1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}e^{-(t-1)}\cdot\theta(t-1)$

5. Найдите оригинал $f(t)$, если $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$. Функция имеет полюса $p_1=1, p_2=-1$, каждый второго порядка. Поэтому

$$f(t)=\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right]'_{p=1}+\left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right]'_{p=-1}=\frac{1}{2}tsht$$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется оригиналом?
2. Сформулируйте теорему подобия.
3. Сформулируйте теорему обращения.
4. Запишите формулу дифференцирования оригинала.
5. Дайте определение преобразованию Лапласа.
6. Дайте определение свертки функций.

Лекция №62.

Вычисление дифференциальных уравнений и систем с помощью методов операционного исчисления

1. **Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.** Одним из важнейших приложений операционного исчисления является решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом операционного исчисления.

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_2x(t)=f(t) \tag{62.1}$$

и найдём его частное решение при начальных условиях

$$x(0)=x_0 \quad , \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \tag{62.2}$$

Операционный метод решения дифференциального уравнения заключается в том, что мы будем менять оригиналов – искомую функцию $x(t)$ и правую часть $f(t)$, с их соответствующими изображениями $X(p)$ и $F(p)$.

Перейдём от уравнения (62.1), связывающему оригиналы $x(t)$ и $f(t)$, к уравнению, связывающему их изображения $X(p)$ и $F(p)$.

При этом воспользуемся свойством дифференцирования оригинала

$$\dot{x}(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} pX(p)-x(0)=pX(p)-x_0$$

$$\ddot{x}(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^2X(p)-px_0-\dot{x}_0$$

Подставим полученные выражения в уравнение для изображения.

$$p^2X(p)-px_0-\dot{x}_0+a_1(pX(p)-x_0)+a_2X(p)=F(p) \tag{62.3}$$

То есть мы получили алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $X(p)$. Это уравнение называется операторным.

Решая его, получим:

$$X(p)\left(p^2+a_1p+a_2\right)=F(p)+px_0+\dot{x}_0+a_1x_0$$

Следовательно,

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}+\frac{px_0+\dot{x}_0+a_1x_0}{p^2+a_1p+a_2} \tag{62.4}$$

Итак, изображение искомого решения найдено. Теперь по таблицам или по теореме обращения следует найти соответствующий ему оригинал $x(t)$, который и будет являться решением данного дифференционого уравнения.

В случае, когда начальные условия являются нулевыми, изображение $X(p)$ принимает простой вид:

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

Замечание 1. Изложенный метод решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть применен к решению дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами любого порядка.

2. Если в формуле (62.4) считать начальные условия x_0, $\dot{x}_0$ не заданными, а произвольными постоянными, то получится общее решение уравнения.

3. Так как $x(t)$ считается оригиналом, то при $t < 0$ нужно считать, что $x(t) = 0$. поэтому решение дифференциального уравнения верно при $t \geq 0$.

Хотя при решении конкретных примеров получающее решение очень часто остаётся верным и для случая $t < 0$ (конечно, если первая часть уравнения определена при всех t)

Рассмотрим примеры.

1. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2\cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1.$$

Решение. $x(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} X(p)$

$$x'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} pX(p) - x(0) = pX(p)$$

$$x''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1$$

$$\cos t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2 + 1}$$

Так что операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p) + X(p) + 1 = \frac{2p}{p^2 + 1}$$

$$X(p)\left(p^2 + 1\right) = \frac{2p}{p^2 + 1} - 1$$

$$X(p) = \frac{2p}{\left(p^2 + 1\right)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}$$

Найдём оригинал для $X(p)$.

$$\frac{1}{p^2+1}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\rightarrow}}\sin t\,; \qquad \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\rightarrow}}t\sin t$$

Следовательно, $X(p)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\rightarrow}}t\sin t-\sin t=(t-1)\sin t$.

Итак, $x(t)=(t-1)\sin t$

2.Решить задачу Коши

$$x''+3x'=e^t\,,\, x(0)=0\,,\, x'(0)=-1$$

$$x(t)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}}X(p)$$

$$x'(t)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}}pX(p)-x(0)=pX(p)$$

$$x''(t)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}}p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1$$

$$e^t\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\rightarrow}}\frac{1}{p-1}$$

$$p^2X(p)+1+3pX(p)=\frac{1}{p-1}$$

$$X(p)=\left(p^2+3p\right)=\frac{1}{p-1}-1$$

$$X(p)=\frac{1}{(p-1)p(p+3)}-\frac{1}{p(p+3)}$$

Представляя $X(p)$ в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами, и определяя эти коэффициенты, получим:

$$X(p)=\frac{1}{4(p-1)}-\frac{2}{2p}+\frac{5}{12(p+3)}$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$x(t)=\frac{1}{4}e^t+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$$

Эта функция и является решением дифференциального уравнения.

3. Найти решение уравнения $\ddot{x}+x=e^t$ при начальных условиях $x(1)=1, \dot{x}(1)=0$.

Пусть $t-1=\tau$, т.е. $t=\tau+1$

$$x(t)=x(\tau+1)=y(\tau)$$

Тогда уравнение и начальное условие перепишутся в виде

$$y''+y=e^{\tau+1} \qquad y(0)=1 \quad y'(0)=0$$

$$y(\tau)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}}y(p)$$

$$y'(\tau) \risingdotseq py(p) - y(0) = py(p) - 1$$

$$y''(\tau) \risingdotseq p^2 y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 y(p) - p$$

Подставляя в уравнение для изображений, получим

$$p^2 Y(p) - p + Y(p) = \frac{e}{p-1}$$

$$Y(p)\left(p^2+1\right) = \frac{e}{p-1} + p$$

$$Y(p) = \frac{e}{(p-1)\left(p^2+1\right)} + \frac{p}{p^2+1}$$

$$\frac{1}{(p-1)\left(p^2+1\right)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$$

$$1 = A\left(p^2+1\right) + (Bp+C)(p-1)$$

$$1 = Ap^2 + A + Bp^2 + Cp - Bp - C$$

$$\begin{array}{l|l} p^2 & A+B=0 \\ p & C-B=0 \\ p_0 & A-C=1 \end{array}\Bigg\} \qquad B = C \qquad \begin{cases} A+C=0 \\ A-C=1 \end{cases}$$

$$2A = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$C = -A = -\frac{1}{2}, \quad B = -A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(p-1)\left(p^2+1\right)} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{p}{2\left(p^2+1\right)} - \frac{1}{2\left(p^2+1\right)}.$$

Следовательно,

$$Y(p) = \frac{e}{2(p-1)} - \frac{ep}{2\left(p^2+1\right)} - \frac{e}{2\left(p^2+1\right)} + \frac{p}{p^2+1} =$$

$$= \frac{e}{2}\frac{1}{p-1} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\frac{p}{p^2+1} - \frac{e}{2\left(p^2+1\right)}$$

$$Y(p) \fallingdotseq \frac{e}{2}e^{\tau} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\cos\tau - \frac{e}{2}\sin\tau,$$

т.е. $y(\tau) = \frac{e}{2}e^{\tau} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\cos\tau - \frac{e}{2}\sin\tau$

или

$$x(t) = \frac{e}{2}e^{t-1} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\cos(t-1) - \frac{e}{2}\sin(t-1) = \frac{1}{2}e^{t} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\cos(t-1) - \frac{e}{2}\sin(t-1)$$

2.**Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом.** Решение производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Примеры. 1. Решить системы уравнений.

$$\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' + x = 0 \end{cases} \qquad y(0) = 1 \quad x(0) = 1.$$

$$x(t) \leftarrow X(p) \quad y(t) \leftarrow Y(p)$$

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$$

$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y(0) = pY(p) + 1$$

$$\begin{cases} pX + Y - 1 = 0 \\ pY + 1 + X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = 1 - pX \\ p(1 - pX) + 1 + x = 0 \end{cases}$$

$$p - p^2 X + 1 + X = 0$$

$$X\left(1 - p^2\right) = -1 - p$$

$$X = -\frac{1+p}{1-p^2} \Rightarrow X = \frac{1}{p-1}$$

$$Y = 1 - \frac{1}{p-1} = \frac{p-p-1}{p-1} = -\frac{1}{p-1}$$

$$X(p) = \frac{1}{p-1} \rightarrow e^t, Y(p) = -\frac{1}{p-1} \rightarrow -e^t$$

Ответ: $x(t) = e^t, y(t) = -e^t$

2. Решить системы уравнений.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 5 \end{matrix}$$

$$x(t) \rightarrow X(p) \qquad x'(t) \rightarrow pX(p) - 0 = pX(p)$$

$$y(t) \rightarrow Y(p) \qquad y'(t) \leftarrow pY(p) - 5$$

$$\begin{cases} pX(p) = X + 2Y \\ pY - 5 = 2X + Y + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$X(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} \quad , \quad Y(p) = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)}$$

$$\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3}$$

$$A = -\frac{2}{3} \ , \ B = -2 \ , \ C = \frac{8}{3} \ .$$

Откуда аналогично $x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$, $\quad y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$.

3.Решение интегральных уравнений.

Определение. Уравнение называется интегральным, если оно содержит неизвестную функцию под знаком интеграла.

Например, интегральными уравнениями являются равенства вида:

$$\int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \text{ или } x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Примеры 1. Решить интегральное уравнение.

$$\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = \sin t$$

Левая часть является свёрткой двух функций $x(t)$ и *cos* t .

Воспользуемся формулой для преобразования Лапласа свёртки:

$$x(t) \doteq X(p),$$

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}, \quad \sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}.$$

Известно, что свёртке функции соответствует произведения изображений

$$x(t) * \cos t \doteq x(p)\frac{p}{p^2+1}.$$

Следовательно, уравнение в изображениях будет выглядеть следующим образом

$$X(p) \cdot \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$$

$X(p) = \frac{1}{p}$. Тогда решение уравнения будет $x(t) = 1$.

2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^t x(\tau)(t-\tau)^3 d\tau = \frac{1}{3}t^4$$

$$x(t) \doteq X(p) \qquad t^3 \doteq \frac{3!}{p^4} \qquad t^4 \doteq \frac{4!}{p^5}$$

$$X(p) \cdot \frac{6}{p^4} = \frac{1}{3}\frac{2^4}{p^5}$$

$$X(p) = \frac{8p^4}{p^5 6} \text{ или } X(p) = \frac{4}{3p}$$

Тогда решение уравнения будет $x(t) = \frac{4}{3}$.

3. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)d\tau = 1 + 2\cos t - x(t)$$

$$x(t) \doteq X(p)$$

$$\sin t \leftarrow\!\!\!\!\!\!\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{}}\ \frac{1}{p^2+1}$$

$$1 \leftarrow\!\!\!\!\!\!\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{}}\ \frac{1}{p}\ ,\quad \cos t \leftarrow\!\!\!\!\!\!\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{}}\ \frac{p}{p^2+1}$$

$$X(p)\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p}+\frac{2p}{p^2+1}-X(p)$$

$$X(p)=\frac{p^2+1}{p}+2p$$

$$X(p)=p+\frac{1}{p}+2p=3p+\frac{1}{p}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}pe^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\frac{p}{t}e^{pt}\Bigg|_{b-i\infty}^{b+i\infty}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{1}{t}e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\left(e^{(b+i\infty)t}-e^{-(b-i\infty)t}\right)$$

$$X(p)\left(\frac{1}{p^2+1}+1\right)=\frac{1}{p}+\frac{2p}{p^2+1}$$

$$X(p)\cdot\frac{p^2+2}{p^2+1}=\frac{1}{p}+\frac{2p}{p^2+1}$$

$$X(p)=\frac{p^2+1}{p\left(p^2+2\right)}+\frac{2p}{p^2+2}$$

$$X(p)=\frac{3p}{p^2+2}+\frac{1}{p\left(p^2+2\right)}$$

$$\frac{1}{p\left(p^2+2\right)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p\left(p^2+2\right)}$$

$$Ap^2+2A+Bp^2+Cp=1$$

$$\begin{array}{ll} 2A=1 & A=\frac{1}{2} \\ C=0 & \\ A+B=0 & B=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Тогда, подставляя вместо A и B, находим

$$X(p)=\frac{1}{p\left(p^2+2\right)}=\frac{1}{2p}+\frac{5}{2}\frac{p}{p^2+2}\,.$$

Решение уравнения будет $x(t)=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cos\sqrt{2}t$.

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка?
2. Какое уравнение называется интегральным?

3. Для решения каких задач применяются методы операционного исчисления?

Модуль 21. Уравнения математической физики

Лекция №63. Понятие дифференциальных уравнений в частных производных и их классификации. Решение задачи Коши для бесконечной струны. Задача Коши, граничные условия, смешанные задачи

В курсе будут изучаться дифференциальные уравнения (ДУ) с частными производными (ЧП), т.е. уравнения, содержащие неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные.

ДУ с ЧП находят широкое применение в прикладных науках: квантовая механика, электродинамика, термодинамика, теория тепла и массопереноса и др. При математическом описании и моделировании различных физических процессов. Поэтому такие уравнения в теории ДУ с ЧП объединяются под общим названием уравнений математической физики. Они, как правило, имеют бесчисленное множество решений. При исследовании конкретной физической задачи необходимо из этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые граничные условия, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Совокупность граничных и начальных условий называют краевыми условиями задачи. Краевая задача уравнения математической физики считается поставленной корректно, если решение задачи, удовлетворяющее краевым условиям, существует, единственно и устойчиво, т.е. малые изменения любого из исходных данных задачи вызывают соответственно малое изменение решения. Это важно для приложений ДУ с ЧП, поскольку реальные данные прикладной задачи часто получены из опыта и, таким образом, содержат некоторую погрешность. Поэтому необходимо, чтобы малые погрешности в данных задачи приводили к малым изменениям в ее решении.

Дифференциальным уравнением с частными производными (ДУ с ЧП) называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных (ФНП) и ее частных производных. Наивысший порядок частных производных (существенно входящих в уравнение) называется порядком этого уравнения.

ДУ вида

$$F_1(x, y, U(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0 \qquad (63.1)$$

относительно неизвестной функции U(x, y) представляет общий вид ДУ с ЧП, если хотя бы одна из частных производных функции u существенно входит в (63.1).

ДУ с ЧП называется линейным (ЛДУ с ЧП), если неизвестная функция и ее производные входят в это ДУ линейно (в первой степени). Так, уравнение вида

$$a_{11}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1(x, y, U(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \qquad (63.2)$$

описывает общий вид ЛДУ с ЧП второго порядка.

Примеры ДУ с ЧП, как уже отмечалось, широко используются для математического моделирования и описания различных физических задач. Эти уравнения и называются дифференциальными уравнениями математической физики. Основные типы этих уравнений:

I. Уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (63.3)$$

II. Уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (63.4)$$

III. Уравнения параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (63.5)$$

К исследованию волнового уравнения (63.3) приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т.д.

К исследованию уравнения Лапласа (63.4) приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т.д.

К исследованию уравнения теплопроводности или уравнения Фурье (63.5) приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде и т.д.

Классификация ДУ с ЧП второго порядка

В уравнении (63.2) производим замену переменных: $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi(x, y)$. Тогда

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Нас интересует, при каком выборе видов ξ, η упрощается задача (63.2). Это ниже покажем. Если выразить частные производные в (63.2) через новые переменные:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \end{cases} \tag{63.6}$$

Значение производной из (63.6) поставим (63.2),

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{a}_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \overline{F}(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0 \tag{63.7}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 \\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}\right\} \qquad (63.8)$$

Выберем ξ и η так, что $\bar{a}_{11} = 0$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с частными производными.

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (63.9)$$

Если $z = \varphi(x, y)$ некоторое частное решение (63.9), то при $\xi = \varphi(x, y)$ превратится в ноль коэффициент $\bar{a}_{11} = 0$.

Значит, если функция $Z = \varphi(x, y)$ является решением (63.9), то $\varphi(x, y) = C$ является решением нижеследующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{11}dx^2 = 0 \qquad (63.10)$$

Дифференциальное уравнение (63.10) называется характеристическим уравнением ЛДУ с ЧП второго порядка (63.2), а его решения называются характеристиками.

Уравнение (63.10) разлагается на два уравнения следующих видов:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (63.11)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (63.12)$$

Уравнение (63.3) называется гиперболического типа, если в точке $M(x, y)$ выполняется $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, эллиптического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, параболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Теперь рассмотрим отдельно каждый из этих типов.

I. В уравнениях гиперболического типа уравнения (63.11) и (63.12) имеют двух действительных решений, так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

Если иметь в виду $\overline{a}_{11} = 0$ или $\overline{a}_{22} = 0$, то уравнение (63.10) имеет двух характеристик. Их, соответственно, обозначив $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi(x, y)$ уравнение (63.7) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi(\xi, \eta, u(\xi, \eta), \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}) \qquad (63.13)$$

Уравнение (63.13) принимает канонический вид уравнения гиперболического типа.

Если в (63.13) выполним замену $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$, то оно примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = \Phi_1. \quad (\Phi_1 = 4\Phi) \qquad (63.14)$$

II. В уравнениях эллиптического типа уравнения (63.11) и (63.12) имеют комплексные решения, так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Функция $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ будет комплексным решением уравнения (63.11).

Если выполнить замену $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ в уравнении (63.9), то получим тождество

$$a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Отделив действительную и мнимую части тождества, получим

$$a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

$$a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} = 0$$

Из уравнений вытекает $\overline{a_{11}} = \overline{a_{22}}, \overline{a_{12}} = 0$. Уравнение (63.7) принимает вид.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (63.15)$$

Здесь $\Phi = -\frac{\overline{F}}{\overline{a_{22}}}$.

III. В уравнениях параболического типа уравнения (63.11) и (63.12) имеют единственное решение, так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Решение обозначим $\xi=\varphi(x,y)$, для второго выберем произвольную функцию $\eta=\eta(x,y)$, не зависимую от φ. При этом Якобиан должно быть отлично от нуля.

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$$

В этом уравнении

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=0$$

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial\eta}\right)$$

$$\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0.$$

Здесь $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. Канонический вид уравнения параболического вида уравнения (63.7) имеет вид

$$\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=\Phi(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}).\qquad (\Phi=-\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}).$$

Пример: Привести к каноническому виду

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Решение: Так как a_{11}=1, a_{12}=-x, a_{22}=x^2, и $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=x^2-1\cdot x^2=0$ это уравнение параболического типа. Найдем решение характеристического уравнения.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{-x}{1}=-x,$$ отсюда $y=-\frac{x^2}{2}+C$ или $y+\frac{x^2}{2}=C_1$.

Берем за $\xi=y+\frac{x^2}{2}$, а выберем $\eta=\eta(x,y)$ так, что Якобиан $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$. Можно взять за η=x,

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Условие выполняется. Перейдем к новым переменным $\xi=y+\frac{x^2}{2}$, η=x по формуле (63.6) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}x+\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

Выражения подставим в уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \xi}-2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-$$

$$-2x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

Получили канонический вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$.

Лекция №64. Задачи колебания струны. Задача Коши для теплового уравнения

В математической физике под струной понимают гибкую упругую нить. Напряжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Например, пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси OX от 0 до l. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе, или не отклоняя струны, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения, струна начнет колебаться.

Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и в определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси OX и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $U(x, t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент t. (рис.1)

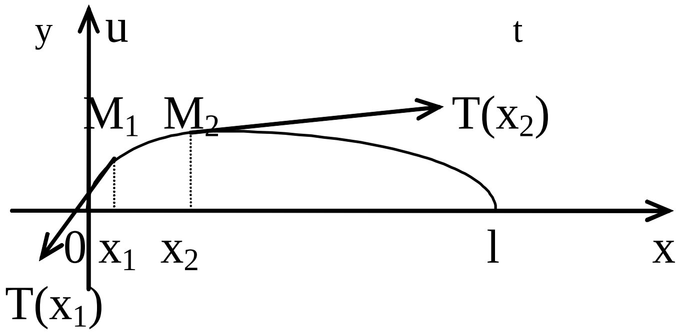


Рис 1.

Рассмотрим произвольный кусок струны (x_1, x_2). Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости *XOU*, то будем предполагать, что длина элемента струны равна его проекции x_2-x_1 , потому что

$$\overset{\cup}{M_1 M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+U_x^{12}}dx \approx x_2 - x_1 = S.$$

По закону Гука не меняется по времени натяжение в каждой точке струны. Натяжение в каждой точке струны и от x тоже не зависит. Сумма проекции всех сил на оси *OX* равна нулю. Внешние силы и силы инерции параллельны оси *OU*, так как мы рассматриваем продольные колебания струны.

$$T(x_1)\cos\alpha_1(x_1) - T(x_2)\cos\alpha_2(x_2) = 0$$

Здесь $\alpha(x)$ – угол, между положительной оси *OX* и касательной, проведенной к струне в точке с абсциссой x. В силу того, что колебение малое

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} = 1$$

значить, $T(x_1) \approx T(x_2)$.

Теперь, используя принципы Даламбера, выводим уравнения колебания струны.

Сумма проекции на ось *OU* упругих сил в точках M_1 и M_2 равен

$$y = T_0\ [sin\alpha(x_2) - sin\alpha(x_1)].$$

По предположению

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

отсюда

$$y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right]$$

здесь

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

получим

$$y = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \tag{64.1}$$

Если обозначить приложенную к струне силу параллельную оси *Ou* через *P(x,t)*, тогда проекция внешней силы на ось *Ou* будет

$$\int_{x_1}^{x_2}P(x,t)dx \tag{64.2}$$

Если $\rho(x)$ есть линейная плотность струны, то сила инерции на части M_1M_2 струны равна

$$-\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx \tag{64.3}$$

Сумма проекций на ось *Ou* сил, приложенных на части M_1M_2 струны равна нулю.

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P(x,t)\right]dx = 0$$

Отсюда выводится уравнение колебания струны.

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x,t). \tag{64.4}$$

Если ρ=*const* , то (64.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{64.5}$$

здесь $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, f(x,t) = \frac{P(x,t)}{\rho}$ Если нет внешних сил, то есть *P(x,t)*=0, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Это уравнение называется уравнением свободного колебания струны.

Решение уравнения колебания струны. Задача Коши. Формула Даламбера.

Пусть задано уравнение свободного колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{64.6}$$

Заменим переменных $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. (Потому что $x - at = C_1$ и $x + at = C_2$ характеристики уравнения (64.6)).

1) если выразить производные в уравнении через новые переменные, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta} a.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-a)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-a)(a) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-a) \cdot a =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} a^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} a^2 - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

Выражение подставим в (64.6) и получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{64.7}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \tag{64.8}$$

Интегрируем по η и получим, $\frac{\partial u}{\partial \xi} = w(\xi)$ а последнее равенство интегрируем по ξ и получим

$$u(\xi, \eta) = \int w(\xi) d\xi + Q_2(\eta)$$

$w(\xi)$ - произвольная функция от ξ, $Q_2(\eta)$ - произвольная функция от η.

Если обозначить $\int w(\xi) d\xi = Q_1(\xi)$, то получим равенство $u(\xi, \eta) = Q_1(\xi) + Q_2(\eta)$.

В последнем уравнении заново перейдем в переменные $(x; t)$,

$$u(x, t) = Q_1(x - at) + Q_2(x - at) \tag{64.9}$$

Если функции Q_1 и Q_2 из (64.9) два раза дифференцируемые, то функция $U(x, t)$ называется решением уравнения (64.6).

Задача Коши. Найти решение уравнения (64.6), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (64.10)$$

Функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$, заданные на $(-\infty, +\infty)$.

Решение задачи Коши. Q_1 и Q_2 выберём так, чтобы они удовлетворяли начальным условиям (64.10). Подставим (64.9) в (64.10),

$$u\big|_{t=0} = Q_1(x) + Q_2(x) = \varphi_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = -a\left[Q_1\copyright(x) + Q_2\copyright(x)\right] = \varphi_1(x)$$

Интегрируем последнее,

$$Q_1(x) + Q_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)dz + C\,.$$

Составим систему

$$\left.\begin{aligned} Q_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz + \frac{c}{2} \\ Q_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz + \frac{c}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (64.11)$$

(64.11) поставим в (64.9),

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)dz + \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)dz - \frac{c}{2} =$$

$$= \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz \qquad (64.12)$$

Функция (64.12) является решением по Даламберу.

Пример. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = x^2, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin x$$

Решение. Так как $u\big|_{t=0} = Q^0(x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) = \sin x$, то по формуле Даламбера получим решение

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\sin z dz=$$
$$=x^2+a^2t^2-\frac{1}{2a}(-\cos z)\Big|_{x-at}^{x+at}==x^2+a^2t^2-$$
$$-\frac{1}{2a}[\cos(x+at)-\cos(x-at)]=x^2+a^2t^2+\frac{1}{2a}\sin x\sin at$$
.

Модуль 22. Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция №65. Элементы комбинаторики. Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Алгебра событий. Классическое определение вероятности. Относительная частота. Статистическая вероятность. Геометрическая вероятность

На протяжении длительного времени человечество изучало и использовало для своей деятельности лишь так называемые детерминистические закономерности. Однако, поскольку случайные события врываются в нашу жизнь помимо нашего желания и постоянно окружают нас, и более того, поскольку все явления природы являются случайными, необходимо научиться их изучать и разработать для этой цели методы изучения.

По форме проявления причинных связей законы природы и общества делятся на два класса: детерминированные (предопределенные) и статистические.

Например, на основании законов небесной механики по известному в настоящем положению планет Солнечной системы может быть практически однозначно предсказано их положение в любой наперед заданный момент времени, в том числе очень точно могут быть предсказаны солнечные и лунные затмения. Это пример детерминированных законов.

Вместе с тем не все явления поддаются точному предсказанию. Так, долговременные изменения климата, кратковременные изменения погоды не являются объектами для успешного прогнозирования, т.е. многие законы и закономерности гораздо менее вписываются в детерминированные рамки. Такого рода законы называются статистическими. Согласно этим законам, будущее состояние системы определяется не однозначно, а лишь с некоторой вероятностью.

Теория вероятностей, как и другие математические науки, возродилась и развилась из потребностей практики. Она занимается изучением закономерностей, присущих массовым случайным событиям.

Теория вероятностей изучает свойства массовых случайных событий, способных многократно повторяться при воспроизведении определенного комплекса условий. Основное свойство любого случайного события, независимо от его природы, — мера, или вероятность его осуществления.

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет. **Невозможным** называют событие, которое заведомо не произойдет. **Случайным** называют событие, которое может либо произойти, либо не произойти.

Теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, так как невозможно учесть влияние на случайное событие всех причин. С другой стороны, оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий, независимо от их конкретной природы, подчиняется определенным закономерностям, а именно — вероятностным закономерностям.

Итак, *предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий*.

Некоторые задачи, относящиеся к массовым случайным явлениям, пытались решать, используя соответствующий математический аппарат, еще в начале XVII в. Изучая ход и результаты различных азартных игр, Б. Паскаль, П. Ферма и Х. Гюйгенс в середине XVII века заложили основы классической теории вероятностей. В своих работах они неявно использовали понятия вероятности и математического ожидания случайной величины. Только в начале XVIII в. Я.Бернулли формулирует понятие вероятности.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

В развитие теории вероятностей огромный вклад внесли русские и советские математики, такие как П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, А. Прохоров и др.

Особое место в развитии теории вероятностей принадлежит и узбекистанской школе, яркими представителями которой являются академики В.И. Романовский, С.Х. Сираждинов, Т.А. Сарымсаков, Т.А. Азларов, Ш.К. Фарманов, профессора И.С. Бадалбаев, М.У. Гафуров, Ш.А. Хашимов и др.

Как уже было отмечено, потребности практики способствовали зарождению теории вероятностей, они же питают ее развитие как науки, приводя к появлению все новых ее ветвей и разделов. На теорию вероятностей опирается математическая статистика, задача которой состоит в том, чтобы по выборке восстановить с определенной степенью достоверности характеристики, присущие генеральной совокупности. От теории вероятностей отделились такие отрасли науки, как теория случайных процессов, теория массового обслуживания, теория информации, эконометрическое моделирование и др.

Основные понятия теории вероятностей — это опыт или эксперимент и события. Действия, которые осуществляются при определенных условиях и обстоятельствах, мы назовем *экспериментом*. Каждое конкретное осуществление эксперимента называется *испытанием*.

Всякий мыслимый результат эксперимента называется *элементарным событием* и обозначается через ω. Случайные события состоят из некоторого числа элементарных событий и обозначаются через $A, B, C, D,...$

Множество элементарных событий таких, что

1) в результате реализации эксперимента всегда происходит одно из элементарных событий ω;

2) при одном испытании произойдет только одно элементарное событие ω называется *пространством элементарных событий* и обозначается через Ω.

Таким образом, любое случайное событие является подмножеством пространства элементарных событий.

По определению пространства элементарных событий достоверное событие можно обозначить через Ω.

Невозможное событие обозначается через $\varnothing$.

Пример 1. Бросается игральная кость. Пространство элементарных событий, отвечающее данному эксперименту, имеет следующий вид: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$.

Пример 2. Пусть в урне содержатся 2 красных, 3 синих и 1 белый, всего 6 шаров. Эксперимент состоит в том, что из урны вынимаются наудачу шары. Пространство элементарных событий, отвечающее данному эксперименту, имеет следующий вид: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, где элементарные события имеют следующие значения: ω_1 – появился белый шар; ω_2, ω_3 – появился красный шар; $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ – появился синий шар. Рассмотрим следующие события:

A — появление белого шара;

B — появление красного шара;

C — появление синего шара;

D — появление цветного (небелого) шара.

Здесь мы видим, что каждое из этих событий обладает той или иной степенью возможности: одни – большей, другие – меньшей. Очевидно, что степень возможности события *B* больше, чем события *A*; события *C* — чем события *B*;события *D*— чем события *C*. Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие.

Это число обозначим через $P(A)$ и назовем вероятностью события *A*. Дадим теперь определение вероятности.

Пусть пространство элементарных событий Ω является конечным множеством и элементы его суть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Будем считать, что они являются равновозможными элементарными событиями, т.е. каждое элементарное событие не имеет больше шансов появления, чем другие. Как известно, каждое случайное событие *A* состоит из элементарных событий как подмножество Ω.

Вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{65.1}$$

где m — число благоприятствующих элементарных событий для *A*, n — число всех элементарных событий, входящих в Ω.

Если в примере 1 через *A* обозначить событие, состоящее в том, что выпадет четное число очков, то $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

В примере 2 вероятности событий имеют следующие значения:

$$P(A) = \frac{1}{6};\ P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ P(D) = \frac{5}{6}.$$

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. *Вероятность достоверного события равна единице*.

Действительно, если событие достоверно, то все элементарные события благоприятствуют ему. В этом случае $m=n$ и, следовательно,

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1\cdot$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю*.

Действительно, если событие невозможно, то ни одно элементарное событие не благоприятствует ему. В этом случае $m=0$ и, следовательно,

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0\cdot$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей*.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. В этом случае $0<m<n$, а значит, $0<\frac{m}{n}<1$ и, следовательно,

$$0<P(A)<1\cdot$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам

$$0\le P(A)\le 1\cdot \qquad (65.2)$$

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

Таким образом, относительная частота события *A* определяется формулой

$$W(A)=\frac{m}{n}, \qquad (65.3)$$

где *m* — число появлений события, *n* — общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

Пример 4. В течение года на одном из объектов было проведено 24 проверки, причем было зарегистрировано 19 нарушений законодательства. Относительная частота нарушений законодательства равна

$$W(A)=\frac{19}{24}\cdot$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности. Это есть статистическое определение вероятности.

В заключение рассмотрим геометрическое определение вероятности.

Если пространство элементарных событий Ω рассматривать как некоторую область на плоскости или в пространстве, а A как ее подмножество, то *вероятность события* A будет рассматриваться как отношение площадей или объемов A и Ω, и находиться по следующим формулам:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \qquad (65.4)$$

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}. \qquad (65.5)$$

Контрольные вопросы

1. На какие классы делятся законы природы и общества по форме проявления причинных связей?
2. На какие виды можно подразделить события?
3. Что является предметом теории вероятностей?
4. Что вы знаете об истории развития теории вероятностей?
5. Что такое эксперимент, испытание, элементарное событие и событие, как они обозначаются?
6. Что называется пространством элементарных событий?
7. Как определяется вероятность события?
8. Какие свойства вероятности вы знаете?
9. Что вы знаете об относительной частоте события?
10. В чем сущность статистического определения вероятности?
11. Каково геометрическое определение вероятности?

Лекция № 66. Операции над событиями. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса

При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B часто возникает вопрос: насколько связаны эти события друг с другом, в какой мере наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями может служить причинная связь — когда наступление одного из событий ведет к обязательному осуществлению другого или же, наоборот, когда наступление одного события исключает шансы другого.

Если в результате эксперимента события A и B не могут наступить одновременно, то они называются *несовместными* событиями, в противном случае *совместными*.

Пример 1. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.

Говорят, что *событие A влечет за собой событие B*, если в результате эксперимента из наступления события A обязательно следует наступление события B, и обозначают это через $A \subset B$.

Пример 2. Бросается игральная кость. Событие «выпало 4» влечет за собой событие «выпало четное число очков».

Суммой двух событий A и B называют событие, состоящее в наступлении события A или события B, или обоих этих событий. Оно обозначается через $A+B$ или $A \cup B$. *Суммой нескольких событий* называют событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называют событие, состоящее в совместном наступлении событий A и B. Оно обозначается через AB или $A \cap B$. *Произведением нескольких событий* называют событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

Пример 3. В ящике содержатся детали, изготовленные заводами №1 и №2. Если A – появление стандартной детали, а B – деталь изготовлена заводом №1, то AB – появление стандартной детали завода №1.

Противоположное событие для события A обозначается через $\overline{A}$. Оно считается наступившим тогда и только тогда, когда A не наступает.

Два события называют *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от наступления или ненаступления другого. В противном случае эти события называются *зависимыми*.

Пусть A и B — два случайных события по отношению к некоторому эксперименту, причем $P(B) \neq 0$. Из определения зависимых событий следует, что вероятность одного из событий зависит от наступления или ненаступления другого. Поэтому, если нас интересует вероятность события *A*, то важно знать, наступило ли событие *B*.

Вероятность события *A* при условии, что произошло событие *B*, называется *условной вероятностью* и обозначается через $P(A/B)$.

Пример 4. В урне содержится 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают наудачу по одному шару, не возвращая их в урну. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие *A*), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие *B*).

Решение. После первого испытания в урне осталось всего 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность равна

$$P(A/B) = \frac{3}{5}.$$

Пусть события *A* и *B* — несовместные, причем вероятности этих событий даны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие *A*, либо событие *B*, т.е. вероятность суммы этих событий *A+B* ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1 (сложение вероятностей несовместных событий). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (66.1)$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 12.1.*Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \qquad (66.2)$$

Пример 5. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие *A*)

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность появления синего шара (событие *B*)

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

События *A* и *B* несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому искомая вероятность равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Так как противоположные события вместе образуют достоверное событие, то из теоремы 12.1 вытекает, что

$$P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})=1,$$

поэтому

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (66.3)$$

Теорема 2 (умножение вероятностей зависимых событий). *Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B). \qquad (66.4)$$

Пример 6. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый из взятых валиков окажется конусным (событие *B*), равна

$$P(B)=\frac{3}{10}.$$

Условная вероятность того, что второй из валиков окажется эллиптическим (событие *A*), вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, равна

$$P(A/B)=\frac{7}{9}.$$

Тогда по формуле (3.4) искомая вероятность равна

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B)=\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{10}=\frac{7}{30}.$$

Теперь перейдем к случаю, когда события *A* и *B* — независимые, и найдем вероятность произведения этих событий.

Так как событие *A* не зависит от события *B*, то его условная вероятность $P(A/B)$ равна его безусловной вероятности $P(A)$, т.е.

$$P(A/B)=P(A).$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3 (умножение вероятностей независимых событий). *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (66.5)$$

Следствие 2. *Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теперь перейдем к случаю, когда событияA и B — совместные, и найдем вероятность суммы этих событий.

Теорема 4 (сложение вероятностей совместных событий). *Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий с вычетом вероятности их произведения:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (66.6)$$

Пример 7. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A (попадание первого орудия) и B (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события AB (оба орудия дали попадание) равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Искомая вероятность равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Если независимые события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вместе образуют достоверное событие, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий можно найти по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) \quad (66.7)$$

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если они несовместны и вместе образуют достоверное событие, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$; $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Предположим, что событие A может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, которые назовем *гипотезами*. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P(A/H_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Так как $A\Omega = A$, то

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Из несовместности $H_1, H_2, \dots, H_n$ вытекает несовместность событий $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$.

Применяя формулу (66.1), имеем

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

Согласно формуле (66.4) (так как события $H_1, H_2, \dots, H_n$ могут быть и зависимыми), заменив каждое слагаемое $P(AH_i)$ в правой части последнего выражения произведением $P(A/H_i)P(H_i)$, получим *формулу полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \qquad (66.8)$$

Пример 8. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь из наудачу взятого набора — стандартная.

Решение. Обозначим через A событие «извлеченная деталь стандартна». Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие H_1), либо из второго набора (событие H_2).

Вероятность того, что деталь будет вынута из первого набора, равна

$$P(H_1) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что деталь будет вынута из второго набора, равна

$$P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

По условиям задачи $P(A/H_1) = 0{,}8$ и $P(A/H_2) = 0{,}9$.

Тогда искомая вероятность находится по формуле полной вероятности и равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Пусть теперь для тех же событий, что и при выводе формулы полной вероятности, появилось событие A, и ставится задача отыскать условные вероятности гипотез $P(H_k / A)$, $k = \overline{1, n}$.

Из формулы (12.4) имеем

$$P(H_k / A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)}.$$

отсюда получаем,

$$P(AH_k) = P(H_k)P(A/H_k).$$

Отсюда и из предыдущего соотношения, применяя формулу полной вероятности, выводим *формулу Байеса*:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \qquad (66.9)$$

Пример 9. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза H_1);
2) деталь проверил второй контролер (гипотеза H_2).

По условиям задачи имеем:

$P(H_1) = 0{,}6$ (вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру);

$P(H_2) = 0{,}4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P(A/H_1) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером);

$P(A/H_2) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной вторым контролером).

Искомую вероятность найдем по формуле Байеса

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0.98} \approx 0{,}58996 \cdot$$

Контрольные вопросы

1. Какие события называются несовместными, а какие совместными?
2. Что называется суммой событий и как она обозначается?
3. Что называется произведением событий и как оно обозначается?
4. Что называется разностью событий и как она обозначается?

5. Какие события называются независимыми, а какие зависимыми?
6. Что такое условная вероятность и какова ее формула?
7. Чему равна вероятность противоположного события?
8. О чем идет речь в теоремах умножения вероятностей зависимых и независимых событий?
9. О чем теорема сложения вероятностей совместных событий?
10. Какие события образуют полную группу событий?
11. Что такое формула полной вероятности?
12. Что такое формула Байеса и как она выводится?

Лекция № 67. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может либо произойти (успех), либо не произойти (неудача). Будем считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$. Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли*.

В качестве таких испытаний можно рассматривать, например, производство изделий на определенном оборудовании при постоянстве технологических и организационных условий, в этом случае изготовление годного изделия — успех, бракованного — неудача. Эта ситуация соответствует схеме Бернулли, если считать, что процесс изготовления одного изделия не зависит от того, были годными или бракованными предыдущие изделия.

Другим примером является стрельба по мишени. Здесь попадание — успех, промах — неудача.

Поставим своей задачей вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n-k$ раз, т.е. будет k успехов и $n-k$ неудач.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Последовательность n независимых испытаний можно рассматривать как сложное событие, являющееся произведением n независимых событий. Следовательно, вероятность того, что в n

испытаниях событие *A* наступит *k* раз и не наступит *n*—*k* раз, по теореме 3 умножения вероятностей независимых событий, равна

$$p^k q^{n-k}.$$

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из *n* элементов по *k* элементов, т.е. C_n^k.

Так как эти сложные события несовместны, то по теореме 1 сложения вероятностей несовместных событий, искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появление *k* раз события *A* в *n* испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \qquad (67.1)$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*.

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что в течение 4 суток из ближайших 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии на продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0{,}75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = \frac{1215}{4096} \approx 0{,}297 \cdot$$

В ряде задач представляет интерес наивероятнейшее число успехов, т.е. такое число m успехов, вероятность которого самая большая среди вероятностей (4.1). Так как при увеличении *k* вероятности (4.1) сначала возрастают, а затем, с определенного момента, начинают убывать, то для m должны иметь место соотношения

$$P_n(m) \ge P_n(m-1) \qquad (67.2)$$

и

$$P_n(m) \ge P_n(m+1). \qquad (67.3)$$

Используя формулу (4.1) и соотношение $p+q=1$, из (4.2) и (4.3), получаем соответственно неравенства

$$(n-m+1)p \ge mq \tag{67.4}$$

и

$$(m+1)q \ge (n-m)p\,. \tag{67.5}$$

Окончательно получим, что m лежит в интервале единичной длины:

$$np-q \le m \le np+p\,. \tag{67.6}$$

Однако, стоит заметить, что использование формулы Бернулли при больших значениях *n* достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами.

Например, если $n=50$, $k=30$, $p=0{,}1$, то для отыскания вероятности $P_{50}(30)$ надо вычислить выражение $P_{50}(30)=\dfrac{50!}{30!\cdot 20!}\cdot(0{,}1)^{30}\cdot(0{,}9)^{20}$, где $50!=30414093\cdot 10^{57}$, $30!=26525286\cdot 10^{25}$, $20!=24329020\cdot 10^{11}$.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно *k* раз в *n* испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(k)$ *того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции*

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\phi(x)$$

при $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. При этом следует учитывать, что $\phi(-x)=\phi(x)$, так как функция $\phi(x)$ четная.

Итак, вероятность того, что событие *A* появится в *n* независимых испытаниях ровно *k* раз, приближенно равна

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\phi(x), \tag{67.7}$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 2. Найти вероятность того, что событие *А* наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $n = 400$; $k = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Воспользуемся формулой (4.7):

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \phi(x) = \frac{1}{8} \cdot \phi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение *x:*

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$$

По таблице находим $\phi(0) = 0{,}3989$.

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки, ввиду их громоздкости, опущены):

$$P_{400}(80) = 0{,}0498.$$

Пусть теперь требуется вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие *А* появится в *n* испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»). Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Интегральная теорема Лапласа. *Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(k_1, k_2)$ *того, что событие А появится в n испытаниях от* k_1 *до* k_2 *раз, приближенно равна определенному интегралу*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad (67.8)$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ *и* $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальной таблицей для интеграла $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для $x \geq 0$, а для $x < 0$ воспользуемся нечетностью функции $\Phi(x)$, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *функцией Лапласа*.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (67.9)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 3. Вероятность того, что организация не прошла проверку налоговой инспекции, равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных организаций не прошедших проверку окажется от 70 до 100 организаций.

Решение. По условию $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Воспользуемся формулой (4.9):

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938; \quad \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(70, 100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Ранее было отмечено, что по статистическому определению вероятности в качестве вероятности можно взять относительную частоту, поэтому представляет интерес оценка разности между ними. Вероятность того, что отклонение относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$, равна

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (67.10)$$

Пример 4. Вероятность того, что деталь не стандартна, равна $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение. По условию $n = 400$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $\varepsilon = 0{,}03$.

Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)$.

Пользуясь формулой (4.10), имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)\approx 2\Phi\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Следовательно, $2\Phi(2)=0{,}9544$. Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44 % этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Контрольные вопросы

1. Что называется схемой Бернулли?
2. Как выводится формула Бернулли?
3. Как находится наивероятнейшее число успехов?
4. О чем идет речь в локальной теореме Лапласа?
5. О чем идет речь в интегральной теореме Лапласа?
6. Как находится вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности?

Лекция №68. Дискретные случайные величины. Закон распределения. Виды дискретных распределений. Числовые характеристики дискретных случайных величин

В предыдущих темах неоднократно приводились события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 есть возможные значения этой величины.

Случайной величиной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ... , 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Так как в результате испытаний происходят элементарные события, то можно связать понятия случайной величины и элементарных событий и дать другое определение случайной величины.

Случайной величиной называется функция $X = X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω, $\omega \in \Omega$.

Пример 3. При подбрасывании двух монет число выпавших гербов X есть случайная величина, которая может принимать значения 0, 1 и 2. Пространство элементарных событий состоит из следующих элементарных событий:

$$\omega_1 = \{ГГ\},\ \omega_2 = \{РГ\},\ \omega_3 = \{ГР\},\ \omega_4 = \{РР\}.$$

Тогда X принимает следующие значения:

$$X(\omega_1) = X(ГГ) = 2, \quad X(\omega_2) = X(РГ) = 1,$$

$$X(\omega_3) = X(ГР) = 1, \quad X(\omega_4) = X(РР) = 0.$$

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами $X, Y, Z, \ldots$, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами $x, y, z, \ldots$. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они обозначаются через x_1, x_2, x_3.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным. В качестве примера таковой можно привести случайную величину из примера 1.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. В качестве примера такой величины можно привести случайную величину из примера 2.

Для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности. С другой стороны, во многих задачах нет необходимости рассматривать случайные величины как функции от элементарного события, а достаточно знать лишь вероятности возможных значений случайной величины, т.е. закон распределения случайной величины.

Законом распределения вероятностей или просто *законом распределения дискретной случайной величины* называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать в виде таблицы, графика и формулы.

Рассмотрим различные способы задания закона распределения вероятностей на примерах.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности. Сумма вероятностей во второй строке таблицы должна быть равна 1. В таблице задан закон распределения дискретной случайной величины из примера 3.

x_i	0	1	2
p_i	1 / 4	1 / 2	1 / 4

Пример 4. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 5000 сум, пять выигрышей по 1000 сум и десять выигрышей по 500 сум. Найти закон распределения случайной величины *X* — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения *X*: $x_1 = 5000$, $x_2 = 1000$, $x_3 = 500$, $x_4 = 0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}05$, $p_3 = 0{,}1$, $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0{,}84$.

Тогда искомый закон распределения имеет вид

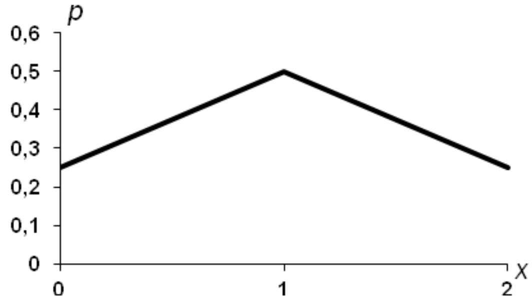
x_i	0	500	1000	5000
p_i	0,84	0,1	0,05	0,01

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*. На рисунке приведен многоугольник распределения случайной величины X из примера 3. Теперь рассмотрим некоторые дискретные распределения, заданные посредством формул: биномиальное, геометрическое и Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A (успеха) постоянна и равна p (следовательно, вероятность непоявления (неудачи) равна q=1–p). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях. Возможные значения X таковы: 0, 1, 2, ..., n. Вероятности этих возможных значений находятся по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где k= 0, 1, 2, ..., n.



Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть формулы Бернулли можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Так как $p + q = 1$, то сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1.Таким образом, биномиальный закон распределения имеет вид

x_i	n	$n-1$	...	k	...	0
p_i	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

В качестве примера биномиального распределения можно привести распределение случайной величины из примера 3.

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A (успеха) равна p $(0 < p < 1)$ и, следовательно, вероятность его непоявления (неудачи) равна q=1–p. Испытания продолжаются до первого успеха. Таким образом, если событие A появилось в k-м испытании, то в предшествующих k – 1 испытаниях оно не появлялось.

Если через X обозначить дискретную случайную величину, равную числу испытаний до первого успеха, то ее возможными значениями будут натуральные числа 1, 2, 3, ...

Пусть в первых k – 1 испытаниях событие A не наступило, а в k-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме 3.3 умножения вероятностей независимых событий, равна

$$P(X = k) = q^{k-1} p. \qquad (68.1)$$

Геометрическим называют распределение вероятностей, определяемое формулой (5.1), так как полагая в этой формуле k = 1, 2, ..., получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q ($0 < q < 1$):

$$p,\ qp,\ q^2 p,\ \ldots,\ q^{k-1} p,\ \ldots$$

Просуммировав бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, легко убедиться, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Таким образом, геометрический закон распределения имеет вид

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{k-1} p$	...

Пример 5. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $k = 3$. Искомая вероятность по формуле (67.1) равна:

$$P(X = 3) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются локальной теоремой Лапласа. Однако она дает большую погрешность, если вероятность события мала ($p \le 0{,}1$).

Если сделать допущение, что произведение np при $n \to \infty$ сохраняет постоянное значение, а именно $np = \lambda$, то вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз, находится по следующей формуле

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (68.2)$$

Эта формула выражает закон распределения *Пуассона* вероятностей массовых (n велико) и маловероятных (p мало) событий. Имеются специальные таблицы для распределения Пуассона.

Пример 6. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. По условию $n=5000$, $p=0{,}0002$, $k=3$. Найдем λ:

$$\lambda=np=5000\cdot 0{,}0002=1.$$

Искомая вероятность по формуле (5.2) равна:

$$P_{5000}(3)=\frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1}=\frac{1}{6e}\approx 0{,}06.$$

Как мы видели выше, закон распределения полностью характеризует дискретную случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют *числовыми характеристиками случайной величины*.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности и обозначается через *M(X)*.

Пусть случайная величина *X* принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание *M(X)* случайной величины *X* определяется равенством

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n. \qquad (68.3)$$

Если дискретная случайная величина *X* принимает бесконечное множество возможных значений, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i. \qquad (68.4)$$

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины *X*, зная закон ее распределения

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Искомое математическое ожидание равно

$$M(X)=3\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}3=3{,}9.$$

Теперь приведем свойства математического ожидания.

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной*: $M(C)=C$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*:

$$M(CX)=CM(X).$$

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*:

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y).$$

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых*:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Свойство 5. *Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании*:

$$M(X)=np.$$

Математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует. По этой причине наряду с математическим ожиданием рассматриваются и другие числовые характеристики.

Пусть X — случайная величина и $M(X)$ — ее математическое ожидание. *Отклонением случайной величины* называется разность $X-M(X)$.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2. \qquad (68.5)$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно воспользоваться следующей формулой:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \qquad (68.6)$$

Пример 6. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Математическое ожидание *M(X)* равно:

$$M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Закон распределения случайной величины X^2 имеет вид:

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

Математическое ожидание $M(X^2)$ равно:

$$M(X^2) = 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}6 + 25\cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Искомая дисперсия равна

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Дисперсия, как и математическое ожидание, имеет несколько свойств.

Свойство 6. *Дисперсия постоянной величины равна нулю*: $D(C) = 0$.

Свойство 7. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат*:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Свойство 8. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Свойство 9. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий*:

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется случайная величина в общем случае и на языке функций?
2. Что такое дискретная случайная величина?
3. Что такое непрерывная случайная величина?
4. Что вы знаете о законе распределения дискретной случайной величины?
5. Что вы знаете о биномиальном законе распределения?
6. Каковы особенности геометрического закона распределения?
7. В каких случаях используют распределение Пуассона?

Лекция № 69. Функции распределения и плотности непрерывных случайных величин, их свойства

Дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Однако такой способ задания неприменим для непрерывных случайных величин.

Например, рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют интервал (a, b). Очевидно, что невозможно составить перечень всех возможных значений X. Поэтому целесообразно дать общий способ задания любых типов случайных величин, для чего вводятся функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть x — действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Если x изменяется, то изменяется и $F(x)$, т.е. $F(x)$ — функция от x.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x) = P(X < x). \qquad (69.1)$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Теперь рассмотрим свойства функции распределения.

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* $[0, 1]$: $\qquad 0 \le F(x) \le 1. \qquad (69.2)$

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

Свойство 2. $F(x)$ — *неубывающая функция, т.е.*:

$$F(x_1) \le F(x_2), \quad \text{если } x_1 < x_2. \qquad (69.3)$$

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале* (a, b), *равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (69.4)$$

Пример 1. Случайная величина X задана следующей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1\\ x/4+1/4 & при \quad -1<x\le 3\\ 1 & при \quad x>3\end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0,\ 2)$:

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0).$$

Решение. Так как на интервале $(0,\ 2)$, по условию,

$$F(x)=x/4+1/4,$$

то

$$F(2)-F(0)=(2/4+1/4)-(0/4+1/4)=1/2.$$

Итак,

$$P(0<X<2)=1/2.$$

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.*

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу* $(a,\ b)$, *то*: 1) $F(x)=0$ *при* $x\le a$; 2) $F(x)=1$ *при* $x\ge b$.

Доказательство. 1) Пусть $x_1\le a$. Тогда событие $X<x_1$ невозможно (так как значений, меньших x_1, величина X по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть $x_2\ge b$. Тогда событие $X<x_2$ достоверно (так как все возможные значения X меньше x_2) и, следовательно, вероятность его равна единице.

Следствие 3. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0;\qquad \lim_{x\to\infty}F(x)=1. \tag{69.5}$$

График функции распределения непрерывной случайной величины в силу свойства 1 расположен в полосе, ограниченной прямыми $y=0$, $y=1$.

Из свойства 2 вытекает, что при возрастании x в интервале $(a,\ b)$, в котором заключены все возможные значения случайной величины, график имеет вид либо наклона вверх, либо горизонтальный.

В силу свойства 3 при $x \le a$ ординаты графика равны нулю; при $x \ge b$ ординаты графика равны единице.

График функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис.1.

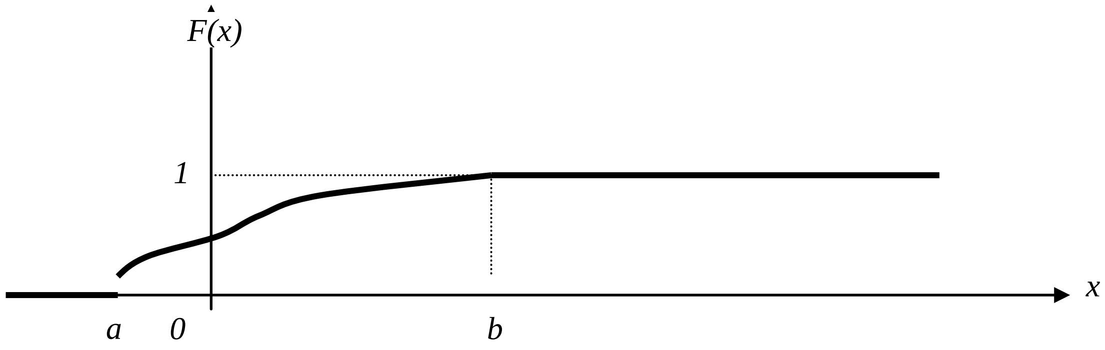


Рис. 1.

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана следующим законом распределения:

x_i	1	4	8
p_i	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и вычертить ее график.

Решение. Если $x \le 1$, то по свойству 3 $F(x) = 0$.

Если $1 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}3$. Действительно, X может принять значение 1 с вероятностью 0,3.

Если $4 < x \le 8$, то $F(x) = 0{,}4$. Действительно, если x_1 удовлетворяет неравенству $4 < x_1 \le 8$, то $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1$, которое может быть осуществлено, когда X примет значение 1 с вероятностью 0,3 или значение 4 с вероятностью 0,1. Поскольку эти два события несовместны, то вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей 0,3 + 0,1 = 0,4.

Если $x > 8$, то по свойству 3 $F(x) = 1$.

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ 0{,}3 & при \quad 1<x\le 4\\ 0{,}4 & при \quad 4<x\le 8\\ 1 & при \quad x>8\end{cases}.$$

График этой функции приведен на рис. 2.

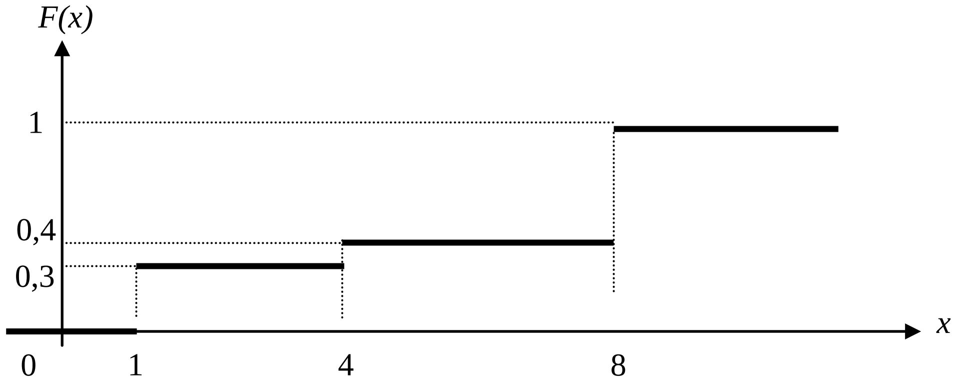


Рис. 2.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которая называется функцией плотности.

Функцией плотности непрерывной случайной величины X *называется функция* $f(x)$ — *первая производная от функции распределения* $F(x)$:

$$f(x)=F'(x). \qquad (69.6)$$

Отсюда следует, что функция распределения является первообразной для функции плотности. Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины функция плотности неприменима.

Зная функцию плотности, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a,\ b)$, равна определенному интегралу от функции плотности, взятому в пределах от a до b:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (69.7)$$

Доказательство. Из формулы (69.4) получаем

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a).$$

По формуле Ньютона–Лейбница

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$P(a\le X<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Так как $P(a\le X<b)=P(a<X<b)$, то получаем

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 3. Задана функция плотности случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 2x & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}5;\ 1)$.

Решение. Искомая вероятность по формуле (7.7) равна

$$P(0{,}5<X<1)=\int_{0{,}5}^{1} 2x\,dx=x^2\Big|_{0{,}5}^{1}=1-0{,}25=0{,}75.$$

Зная функцию плотности распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz. \qquad (69.8)$$

Пример 4. Найти функцию распределения по данной функции плотности:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le a\\ 1/(b-a) & при \quad a<x\le b\\ 0 & при \quad x>b\end{cases}.$$

Построить график найденной функции.

Решение. Воспользуемся формулой (15.8). Если $x\le a$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=0$. Если $a<x\le b$, то $f(x)=1/(b-a)$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{a} 0\,dz+\int_a^x \frac{1}{b-a}\,dz=\frac{x-a}{b-a}.$$

Если $x>b$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dz+\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\,dz+\int\limits_{b}^{x}0\,dz=\frac{b-a}{b-a}=1\cdot$$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le a\\ (x-a)/(b-a) & при \quad a<x\le b\\ 1 & при \quad x>b\end{cases}.$$

График этой функции изображен на рис. 3.

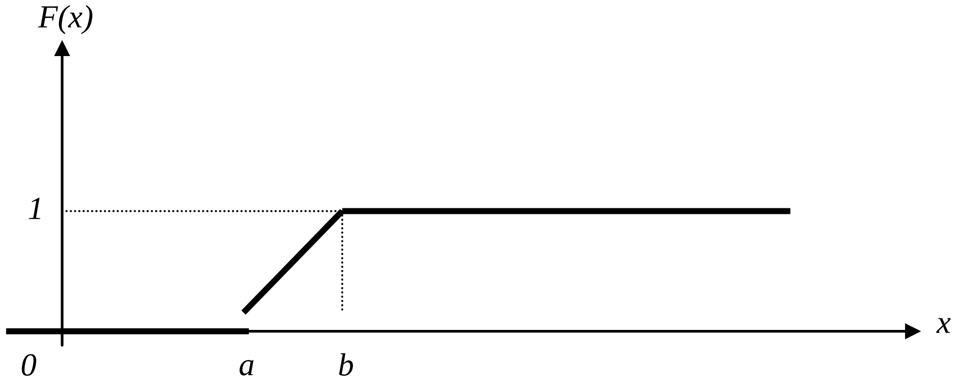


Рис. 3.

Приведем два свойства функции плотности.

Свойство 4. Функция плотности — неотрицательная функция:

$$f(x)\ge 0. \qquad (69.9)$$

Доказательство. Функция распределения — неубывающая функция, следовательно, ее производная $F'(x)=f(x)$ — функция неотрицательная.

Свойство 5. Несобственный интеграл от функции плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1\cdot \qquad (69.10)$$

Контрольные вопросы

1. Почему целесообразно дать общий способ задания любых типов случайных величин?
2. Что называется функцией распределения случайной величины?
3. Что вы знаете о 1-свойстве функции распределения?
4. Какими свойствами обладают графики функций распределения непрерывной и дискретной случайной величины?

Лекция №70. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Виды непрерывных распределений

Как и дискретные случайные величины, непрерывные случайные величины также имеют числовые характеристики. Рассмотрим математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией плотности $f(x)$ и возможные значения этой случайной величины принадлежат отрезку $[a,b]$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называется следующий определенный интеграл

$$M(X)=\int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (70.1)$$

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси Ox, то математическое ожидание имеет следующий вид

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx. \qquad (70.2)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называется следующий определенный интеграл

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)\,dx. \qquad (70.3)$$

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси Ox, то дисперсия имеет следующий вид

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)]^2 f(x)\,dx. \qquad (70.4)$$

Для вычисления дисперсии более удобны соответственно следующие формулы

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2 \qquad (70.5)$$

и

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2. \qquad (70.6)$$

Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для дискретной случайной величины, следующим равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,. \tag{70.7}$$

Пример 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0 \\ x & \textit{при} \quad 0 < x \le 1. \\ 1 & \textit{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

Решение. Найдем функцию плотности:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0 \\ 1 & \textit{при} \quad 0 < x \le 1. \\ 0 & \textit{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле (70.1):

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = x^2/2 \,\Big|_0^1 = 1/2\,.$$

Найдем дисперсию по формуле (70.5):

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - [1/2]^2 = x^3/3 \,\Big|_0^1 - 1/4 = 1/12\,.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение по формуле (70.7):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/12} \approx 0{,}29\,.$$

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Функции плотности непрерывных случайных величин называются также *законами распределений*. Наиболее часто встречаются законы нормального, равномерного и показательного распределений.

Нормальным распределением с параметрами a *и* σ $(\sigma > 0)$ называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается следующей функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,. \tag{70.8}$$

Отсюда видно, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

Отметим вероятностный смысл этих параметров. Итак, $M(X)=a$, т.е. *математическое ожидание нормального распределения равно параметру* a, *и* $\sigma(X)=\sigma$, т.е. *среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру* σ.

Функция распределения нормальной случайной величины имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\,dz. \qquad (70.9)$$

Общим называется нормальное распределение с произвольными параметрами a и σ ($\sigma>0$). *Стандартным* называется нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$.

Легко заметить, что функция плотности стандартного нормального распределения имеет следующий вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (70.10)$$

Эта функция уже встречалась нам выше. Ее значения приведены в специальных таблицах в различной литературе по теории вероятностей и математической статистике.

Вероятность попадания нормальной случайной величины с произвольными параметрами a и σ в интервал (α,β) можно найти, пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$. Действительно, по теореме 70.10 имеем

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Введем новую переменную $z=(x-a)/\sigma$. Отсюда $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$. Найдем новые пределы интегрирования. Если $x=\alpha$, то $z=(\alpha-a)/\sigma$; если $x=\beta$, то $z=(\beta-a)/\sigma$.

Таким образом, имеем

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}(\sigma dz)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Используя функцию $\Phi(x)$, окончательно получим

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (70.11)$$

В частности, вероятность попадания стандартной нормальной случайной величины X в интервал $(0,\ x)$ равна

$$P(0 < X < x) = \Phi(x), \qquad (70.12)$$

так как в этом случае $a = 0$ и $\sigma = 1$.

Пример 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10,\ 50)$.

Решение. Воспользуемся формулой (70.11). По условию, $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, следовательно,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность равна

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

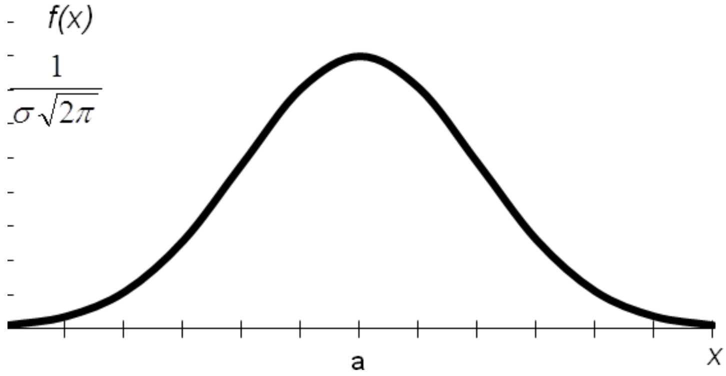


Рис. 1.

График функции плотности нормального распределения называется *нормальной кривой* (*кривой Гаусса*). Этот график изображен на рис. 1.

Равномерным распределением на отрезке $[a, b]$ называется распределение вероятностей случайной величины X, все возможные значения которой принадлежат этому отрезку, если ее функция плотности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a < x \le b \\ 0 & \text{при} \quad x > b \end{cases}. \qquad (70.13)$$

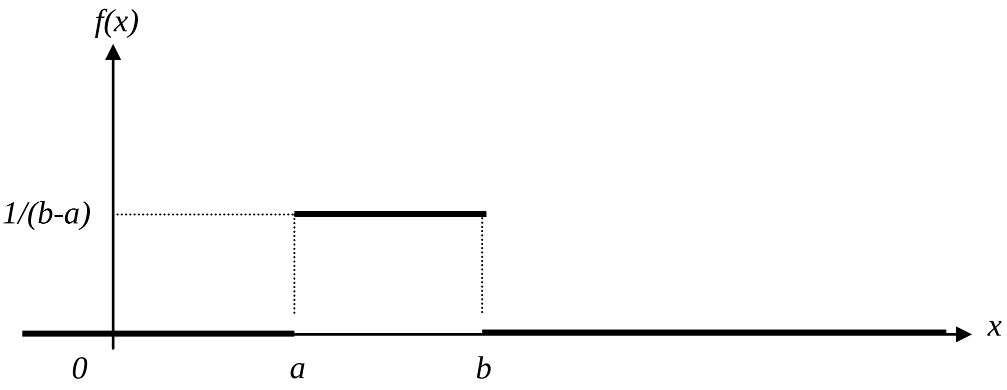


Рис.2.

Функция распределения равномерно распределенной на $[a, b]$ случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le a \\ (x-a)/(b-a) & при \quad a < x \le b \\ 1 & при \quad x > b \end{cases}. \qquad (70.14)$$

График функции плотности равномерного распределения приведен на рис. 2, а график функции распределения — на рис. 2.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию равномерной случайной величины. По формуле (70.1) имеем

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Далее, по формуле (70.5) имеем

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx - \left[\frac{a+b}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b - \left[\frac{a+b}{2}\right]^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Теперь найдем вероятность попадания непрерывной случайной величины *X*, распределенной равномерно на $[a, b]$, в интервал $(c,\ d)$, принадлежащий $[a, b]$.

Используя теорему 69.1 и формулу (70.13), имеем

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_c^d 1\cdot dx = \frac{d-c}{b-a}$$

или

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}. \qquad (70.15)$$

Показательным (экспоненциальным) распределением называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается функцией плотности

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x\ge 0\end{cases}, \qquad (70.16)$$

где λ — постоянная положительная величина.

Из определения видно, что показательное распределение определяется одним параметром λ. Найдем функцию распределения показательного закона:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{0} 0\,dz+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda z}\,dz=1-e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\ge 0\end{cases}. \qquad (70.17)$$

Графики функций плотности и распределения показательного закона изображены на рис. 3.

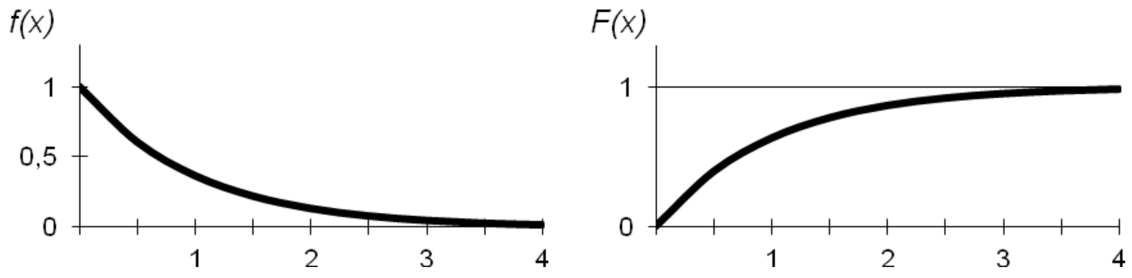


Рис. 3.

Найдем вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины *X*, которая распределена по показательному закону из формулы (70.17). Используя формулу (69.4), имеем

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=1-e^{-\lambda b}-(1-e^{-\lambda a})$$

или

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \qquad (70.18)$$

Пример 3. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0\\ 2e^{-2x} & при \quad x\ge 0\end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* попадает в интервал $(0{,}3;\ 1)$.

Решение. По условию $\lambda=2$. Воспользуемся формулой (70.18):

$$P(0{,}3<X<1)=e^{-(2\cdot 0{,}3)}-e^{-(2\cdot 1)}=e^{-0{,}6}-e^{-2}\approx 0{,}548-0{,}135\approx 0{,}41$$

Отметим вероятностный смысл параметра показательного распределения. *Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны обратной величине параметра* λ*, т.е.* $M(X)=1/\lambda$ *и* $\sigma(X)=1/\lambda$.

Пример 4. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0\\ 5e^{-5x} & при \quad x\geq 0\end{cases}.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию случайной величины *X*.

Решение. По условию $\lambda=5$. Следовательно,

$$M(X)=\sigma(X)=1/\lambda=1/5=0{,}2;$$

$$D(X)=[\sigma(X)]^2=1/\lambda^2=1/5^2=0{,}04.$$

Контрольные вопросы

1. Что является математическим ожиданием непрерывной случайной величины?
2. Что является дисперсией непрерывной случайной величины и как она вычисляется?
3. Что называется нормальным распределением?
4. Каков вероятностный смысл параметров нормального распределения?
5. Что такое общее и стандартное нормальные распределения, каковы их функции плотности и распределения?
6. Как находится вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал?
7. Что называется равномерным распределением?
8. Как вычисляется математическое ожидание и дисперсия равномерной случайной величины?
9. Как находится вероятность попадания равномерной случайной величины в заданный интервал?
10. Что называется показательным распределением?
11. Как находится вероятность попадания показательной случайной величины в заданный интервал?

Лекция 71. Элементы математической статистики. Функция эмпирического распределения и её свойства. Полигон и гистограмма. Выборочные характеристики и их законы распределения

Математическая статистика возникла (XVII в.) и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX — начало XX в.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пирсону и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смирнов), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учеными.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из

1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объём генеральной совокупности N=1000, а объём выборки n=100.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, это требование коротко формулируют так: выборка должна быть *репрезентативной (представительной).*

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. Если из 1000 ламп отобрано для обследования 100 ламп, то объем генеральной совокупности N=1000, а объем выборки n=100.

Повторная и бесповторная выборки и способы отбора.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуется бесповторным случайным отбором.

Выборка должна правильно представлять пропорцию генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть репрезентативной (представительной).

Выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Способы отбора можно подразделить на два вида:

1.Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относится:

а) простой случайный бесповторный отбор;

б) простой случайный отбор.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относится:

а) типический отбор;

б) механический отбор;

в) серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.

Например: Для извлечения n объектов из генеральных совокупности обьема N поступают так: выписывают карточки от 1 до N , которые тщательно перемешивают и наугад вынимают одну из них. Объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой подвергают обследованию. Так поступают n раз, в итоги получают простую случайную выборку объекта n.

Если извлеченные карточки возвращать в пачку, то выборка является повторной, если не возвращать в пачку, то выборка является простой случайной и не повторной.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее “типической” части

Например: Если детали изготовлены на нескольких станках, то отбор производит не из всей совокупности детали произведенными всеми станками, а из продукций каждого станка в отдельности.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность “механически” делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект.

Например: Если нужно отобрать 201 изготовленных станком деталей, то отбирают каждую 5 деталь.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают генеральной совокупности не по одному, а “сериями”, которые подвергаются сплошному обследованию.

Например: если изделия изготавливаются большой группой станков – автоматов, то подвергаются сплошному обследованию продукция только нескольких станков.

Статическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, $x_1 - n_1$раз,……, $x_n -$ n_n раз и $\sum ni = n$ объём выборки, наблюдаемые значения

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

называют вариантами, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, называют вариационным рядом.

Числа наблюдений называют частотами, а их отношение к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ относительными частотами.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Значение признака x число наблюдении

x_i	1	3	5
n_i	2	3	2

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n$$

статистическое распределение

x_i	1	3	5
w_i	2/7	3/7	2/7

Пример 1. Задано распределение частот выборки объема n = 20:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написать распределение относительных частот

x_i	2	6	12
n_i/n	0,15	0,5	0,35

$W_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15 \qquad W_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50 \qquad W_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$

0,15 + 0,50 + 0,35=1

Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения х относительную чистоту события Х<х.

$F^*(x) = \frac{N_x}{n}$, где N_x – число вариант, меньше х

n – объем выборок .

Свойства:

1) значение эмпирической функций принадлежат отрезку [0,1]

2) $F^*(x)$ – неубывающая функция

3) если x_1 – наименьший вариант, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если x_x – наибольший вариант, то $F^*(x) =$ 1 при $x > x_1$

Пример 2. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Решение: n = 12 + 18 + 30 = 60.

Наименьший вариант равен 2, то $F^*(x) = 0 \quad x \le 2 \quad x < 6 \quad x_1 = 2$

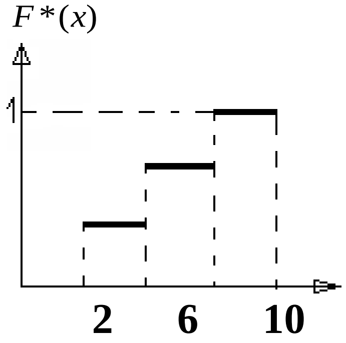
Наблюдалось 12 раз, то $F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2 \qquad 2 < x \le 6$

Значение x < 10, а $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ наблюдались $F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5$

при $6 < x \le 10$,

т.к. x = 10 наибольший вариант, то $F^*(x)$=1 при x > 10 искомая эмпирическая функция.

$$F*(x) = \begin{cases} 0..при..x \le 2 \\ 0{,}2..при..2 < x \le 6 \\ 0{,}56..при..< x \le 10 \\ 1..при..x > 10 \end{cases}$$



Пример 3. Найти эмпирическую функцию распределения выборки, если её статистическое распределение задано таблицей:

x_i	1	3	7	10
n_i	5	4	3	8

Решение. Найдём объём выборки:

n = 5 + 4 + 3 + 8= 20

Наименьшая варианта равна 1, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$

Значение x < 3, а именно 1 наблюдалось 5 раз, следовательно,

$F^*(x) = \frac{5}{20} = 0{,}25$ при $1 < x \le 3$

Значение X < 7, а именно 1 и 3 наблюдалось 5+4=9 раз, следовательно,

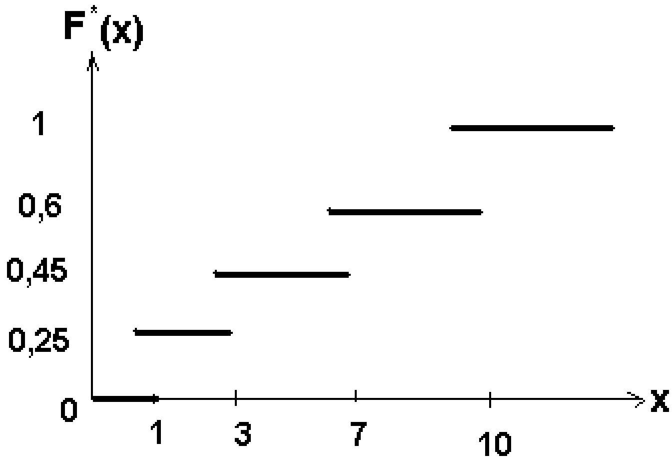
$F^*(x) = \frac{9}{20} = 0{,}45$ при $3 < x \le 7$

Значение X<10, а именно 1,3, 7 наблюдалось 5+4+3=12 раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{12}{20} = 0{,}6$ при $7 < x \le 10$, x = 10 – наибольшая варианта, следовательно,

$F^*(x) = 0$ при $x > 10$.

Итак, эмпирическая функция

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1 \\ 0{,}25 & при \quad 1 < x \le 3 \\ 0{,}45 & при \quad 3 < x \le 7 \\ 0{,}16 & при \quad 7 < x \le 10 \\ 1 & при \quad x > 10 \end{cases}$$



Полигон и Гистограмма

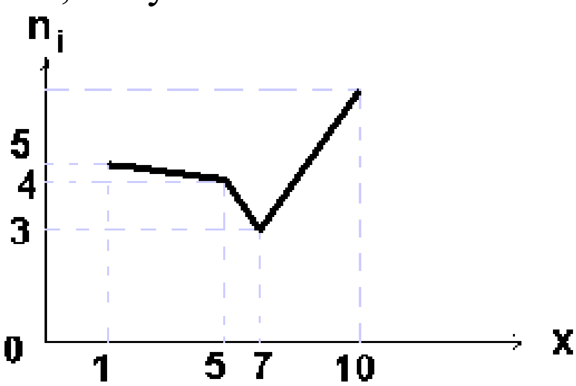
Полигоном часто называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1 n_1), (x_{2,} n_2)..,(x_{1,2}, n_x)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты $x_{1,}$ на оси ординат соответствующие им частоты n_j. Точки $(x_j n_j)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигон относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_z, w_1), (x_2 w_2)....(x_{1,2} w_{1,2})$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_2, а на оси ординат w_1. Точки $(x_j w_j)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон.

Пример 4. Построить полигон частот и относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	1	5	7	10
n_i	5	4	3	8

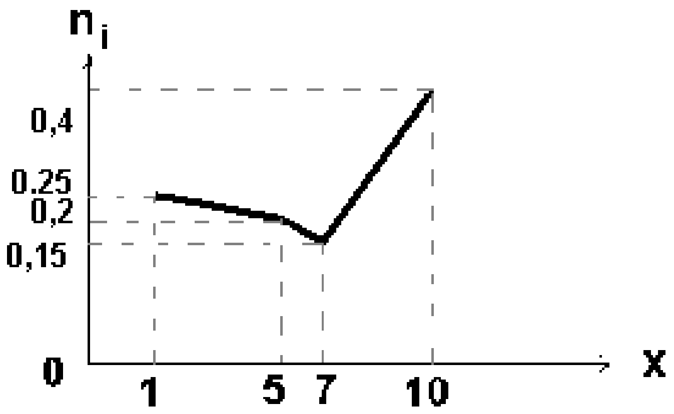
Решение. Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат соответствующие частоты; соединив точки x_i, n_i отрезками прямых, получим искомый полигон частот:



Найдём объём выборки n = 5 + 4 + 3 + 8 = 20; найдём относительные частоты:

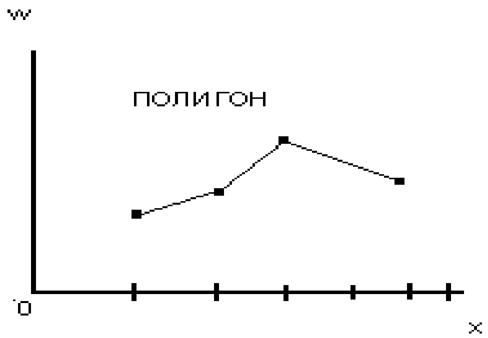
$$\omega_i = \frac{5}{20} = 0{,}25; \omega_2 = \frac{4}{20} = 0{,}2; \omega_3 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \omega_4 = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им относительные частоты. Соединив точки (x_i, ω_i) отрезками прямых, получим полигон относительных частот:



Пример 5. Даны распределения

X	1,5	3,5	5,5	7,5
Y	0,1	0,2	0,4	0,3



Гистограмма.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограммы, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h, для каждого частичного интервала находят сумму частот вариант, попавших в i – ый интервал.

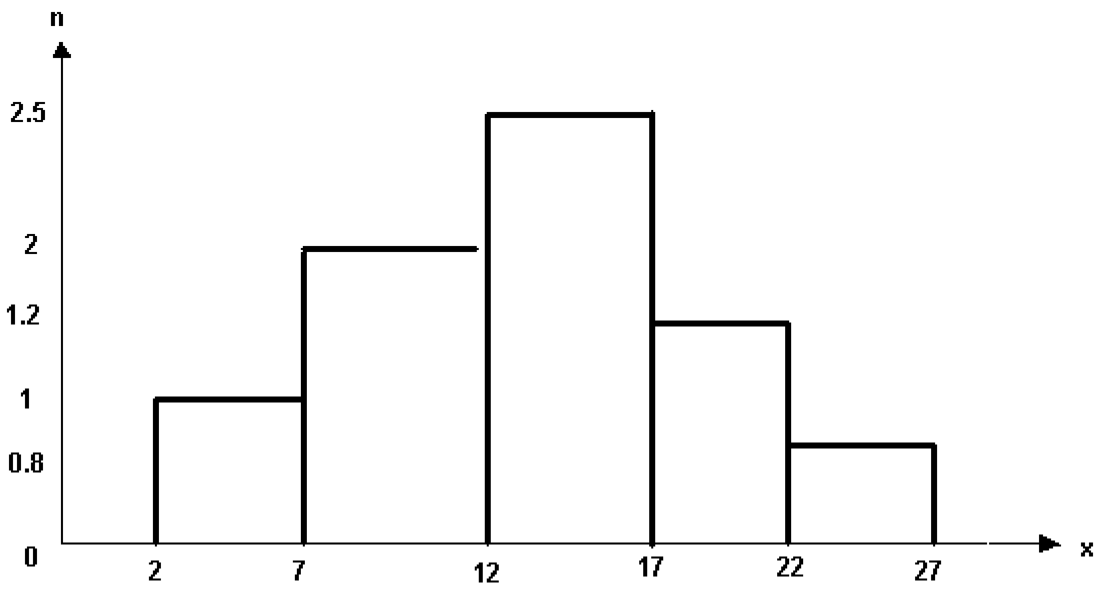
Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Площадь частичного i – го прямоугольника равна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ сумме частот вариант, попавших в i – ый интервал.

Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот. т.е объёму выборки n.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i – го прямоугольника равна $h \cdot \frac{\omega_i}{h} = \omega_i$ относительной частоте вариант, попавших в i – ый интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

Пример 6. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки.

Номер интервала i	*Частичный интервал* $x_1 - x_{2+1}$	*Сумма частот вариант интервала* n_i	*Плотность частоты* $\frac{n_i}{h}$
1	2-7	5	1
2	7-12	10	2
3	12-17	25	2,5
4	17-22	6	1,2
5	22-27	4	0,8



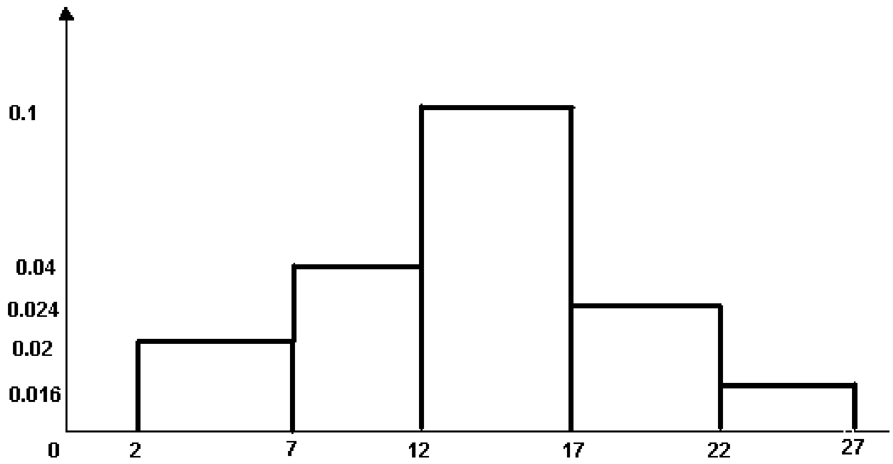
Чтобы построить гистограмму относительных частот найдём объём выборки и относительные частоты:

n = 5 + 10 + 25 + 6 + 4 = 50

$$\omega_1 = \frac{5}{50} = 0{,}1; \omega_2 = \frac{10}{50} = 0{,}2; \omega_3 = \frac{25}{50} = 0{,}5; \omega_4 = \frac{6}{50} = 0{,}12; \omega_5 = \frac{4}{50} = 0{,}08$$

Найдём плотность относительных частот, учитывая, что длина интервала h=5

$$\frac{\omega_1}{h}=\frac{0{,}1}{5}=0{,}02;\frac{\omega_2}{h}=\frac{0{,}2}{5}=0{,}04;\frac{\omega_3}{h}=\frac{0{,}5}{5}=0{,}1;\frac{\omega_4}{h}=\frac{0{,}12}{5}=0{,}024;\frac{\omega_5}{h}=\frac{0{,}08}{5}=0{,}016$$



Контрольные вопросы

1.Что изучает математическая статистика?

2.В чём состоит выборочный метод?

3.Назовите основные методы выборки. Чем они отличаются друг от друга?

4.Что называется объёмом выборки?

5.Что называется вариантой?

6.Что называется вариационным рядом?

7.Дайте определения статистического распределения выборки.

8.Что называется эмпирической функцией распределения?

9.Дайте определения полигона частот, относительных частот.

10. Что называется гистограммой частот, относительных частот?

Лекция 72. Элементы корреляционного-регрессионного анализа. Статистическая проверка гипотез. Распределение Стьюдента

Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его *A),* выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону *А*. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр θ равен определенному значению θ_0, выдвигают гипотезу: $\theta = \theta_0$. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагаемой величине параметра одного известного распределения.

Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и многие другие.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Например, статистическими являются гипотезы:

1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;
2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй - о параметрах двух известных распределений.

Гипотеза «на Марсе есть жизнь» не является статистической, поскольку в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать. *Нулевой (основной)* называют выдвинутую гипотезу *Но*.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание, a нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $a \neq 10$. Коротко это записывают так: H_0: $a=10$; H_1:$a \neq 10$.

Различают гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если λ — параметр показательного распределения, то гипотеза $H_0: \lambda = 5$—простая. Гипотеза H_o: математическое ожидание нормального распределения равно 3 — простая.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза $H: \lambda > 5$ состоит из бесчисленного множества простых вида $H_i : \lambda = b_i$ где b_i - любое число, большее 5. Гипотеза H_o: математическое ожидание нормального распределения равно 3 - сложная.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, ее называют *статистической.* В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Подчеркнем, что последствия этих ошибок могут оказаться весьма различными. Например, если отвергнуто правильное решение «продолжать строительство жилого дома», то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение «продолжать строительство», несмотря на опасность обвала стройки, то эта ошибка второго рода может повлечь гибель людей. Можно привести примеры, когда ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия, чем ошибка второго рода.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно. Эту величину обозначают через *U* или Z, если она распределена нормально, *F* или v^2 — по закону Фишера—Снедекора, *T*—по закону Стьюдента, z^2 - по закону «хи квадрат» и т. д.

Статистическим критерием (или просто *критерием)* называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия K принимают отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$F = \frac{s_2^1}{s_2^2}$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах дисперсии принимают различные, наперед неизвестные значения, и распределена по закону Фишера - Снедекора.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение критерия.

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_2^1 = 20$ и $s_2^2 = 5$, то наблюдаемое значение критерия *F*: $F_{набл} = \frac{s_2^1}{s_2^2} = \frac{20}{5} = 4$

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая — при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (область допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области - гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы — гипотезу принимают.

Поскольку критерий *К*- одномерная случайная величина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками (границами) $к_{крит}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю или левостороннюю) и двустороннюю критические области.

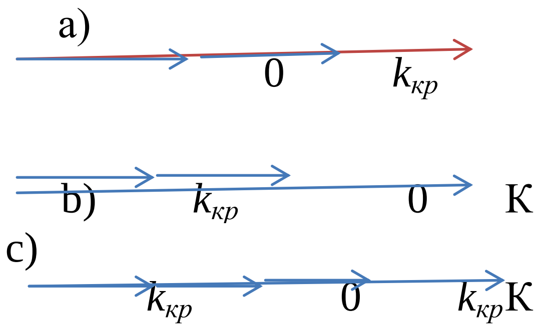
Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > к_{кр}$ где $к_{кр}$ - положительное число (*a).*

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < к_{кр}$, , где $к_{кр}$ —отрицательное число (b).

Односторонней называют правостороннюю или левостороннюю критическую область.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < к_1$, $K > k_2$, где $k_2 > к_1$

В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $к_{кр} > 0$: $K < - к_{кр}$,$K > к_{кр}$, или равносильным неравенством $|K| > k_{кр}$ (c).



Как найти критическую область? Для определенности начнем с нахождения правосторонней критической области, которая определяется неравенством $K > к_{кр}$, *где* $к_{кр} > 0$. Видим, что для отыскания правосторонней критической области достаточно найти критическую точку. Следовательно, возникает новый вопрос: как ее найти? Для ее нахождения задаются достаточной малой вероятностью— уровнем значимости *a.* Затем ищут критическую точку $k_{Кр}$, исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение, большее $k_{Кр}$,, была равна принятому уровню значимости:

$$P\left(K > k_{кр}\right) = a$$

Отыскание левосторонней и двусторонней критических областей сводится (так же, как и для правосторонней) к нахождению соответствующих критических точек.

Левосторонняя критическая область определяется неравенством

$$K < k_{кр},(k_{кр} < 0).$$

Критическую точку находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий примет значение, меньшее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K < k_{кр}) = a$$

Двусторонняя критическая область определяется неравенствами

$$K < k_1 \quad K > k_2.$$

Критические точки находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы сумма вероятностей того, что критерий примет значение, меньшее k_1 или большее k_2, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K < k_{кр}) + P(K > k_{кр}) = a$$

Распределение Стьюдента.

Пусть Z – нормальная случайная величина, причём M(Z)=0, $\sigma(Z) = 1$, а V- независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{K}}}$$

Имеем распределение, которое называют t- распределением или распределением Стьюдента.

Итак, отношение нормированной нормальной величины к квадратному корню «хи квадрат» с k степенями свободы, делённой на k, распределено по закону Стьюдента с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

Контрольные вопросы

1. Какая гипотеза называется статистической?
2. Какая гипотеза называется конкурирующей?
3. Что называют наблюдаемым значением?
4. В чём суть основного принципа проверки статистических гипотез?
5. В чём состоит ошибка первого рода?

6. Какую гипотезу называют нулевой?
7. В чём суть распределения Стьюдента?

Литература

Учебники и учебные пособия

1.Axmedov A.B., Shamsiyev D.N., Shamsiyev R.N., Pirmatov Sh.T. Oliy matematika. 1 qism. Darslik. –T.: Fan va texnologiya, 2018.

2.Holmurodov E., Yusupov A.I. Oliy matematika. 1 qism. O’quv qo’llanma. –T.: Noshir, 2013.

3.Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. 1 ва 2 кисм. Ўқув қўлланма. –Т.: Узбекистон, 2006.

4.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.280 с.

5.Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-Пресс, 2005. – 288 с.

6.Шипачев В.С. Основы высшей математики: учебное пособие для втузов – Москва: Юрайт, 2009. – 478 с.

7.Луканин Г.Л. и другие. Высшая математика. Учебник для студентов высших технических учебных заведений – М. Высшая школа, 2009. – 583 с.

8.Gerd Bauman, Mathematics for Engineers II. 2010. Munchen

9.Claudio Canute, Anita Tabacco, Mathematical Analysis I. Milan, 2008

Сборники задач и упражнений

1.Хуррамов Ш.Р. Олий математика. Мисол ва масалалар, назорат топшириклари. 1,2,3-кисмлар. –Тошкент: Фан ва технологиялар, 2015.

2.Лунгу К.Н., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Из-во: Айрис-Пресс, 2017. – 576 с.

3.Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике. – М. Из-во: Ozon; 2008. – 240 с.

4.Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 22-е изд.перераб. – М.: Лань, 2008. – 432 с.

5.Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х частях. 6-е издание. – М.: ООО «Издательский дом Альянс», 2010. – 368 с.

6.Зимина О.В., Кириллов А.И. Решебник. Высшая математика. 2005. – 365 с.

7.Смирнов Ю.М. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М:, Логос, 2005. – 372 с.

Содержание

Редактор Ахметжанова Г.М.

Для заметок

Для заметок