

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

НАВОИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

“УТВЕРЖДАЮ ”

Проректор по учебной работы:

_____ Н. Абдуазизов

« ____ » _____ 2018й.



А.Н. Товбаев

по дисциплине

«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»

А.Н. Товбаев, Учебно-методический комплекс по предмету “Теоретические основы электротехники” – Навои: НГГИ. – 2018. – ____.

**Составили: кандидат технических наук А.Н. Товбаев,
ассистент Х.Ш. Муродов**

Состав УМК по “Теоретические основы электротехники” входит: типовая программа, учебно-рабочая программа, лекционные занятия, технология образования и технологическая карта лекционных, лабораторных и практических занятий, общие вопросы, тесты, варианты итогового контроля, глосарий и критерии оценки.

Данный УМК рекомендуется преподавателям для обучения студентов по направлению «Электроэнергетика», Также научных сотрудников, аспирантов и научным исследователям

УМК обсуждена на заседании кафедры «Электроэнергетика» от 25 августа 2016 г. пр №1, и рекомендована на рассмотрение учебно-методическим советом факультета.

Зав кафедрой _____ к.т.н., доц. Товбаев А.Н.

УМК рассмотрена учебно-методическим советом факультета (пр№1 от “26” августа 2016г.) и рекомендована на утверждение учебно-методическим советом института.

**Председатель учебно-методического
совета факультета _____ д.п.н., проф. Бозорова С.Ж.**

УМК решением учебно-методическим советом института от “ ____” августа 2017 г протоколом №1 рекомендована в учебный процесс.

**Секретарь учебно-методического
совета института. _____ Норматова М.**

Согласовано:

Начальник учебно-методического отдела _____ Каримов И.А.

№	Состав содержание	
1.	Конспект лекции	
2.	Практические занятия	
3.	Лабораторные занятия	
4.	Самостоятельная работа	
5.	Глоссарий	
6.	Приложены	
6.1	Учебная программа	
6.2	Учебно-рабочая программа	
6.3	Раздаточные материалы	
6.4	Тесты	
6.5	Критерии оценок	
6.6	Общие вопросы	
6.7	Список литературы	

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

НАВОЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ



«Конспект лекции»

Тема 1: Введение. Общие понятия, характеризующие электрические и магнитные поля.

План:

1. Роль электротехники в современной промышленности.
2. Электростатическое поле.
3. Электрический ток

1. Роль электротехники в современной промышленности.

Электротехника как наука является областью знаний, в которой рассматриваются электрические и магнитные явления и их практическое использование. Современная энергетика-это в основном электроэнергетика.

Электрическая энергия применяется во всех областях человеческой деятельности. Производственные установки на заводах и фабриках имеют в подавляющем большинстве электрический привод.

Для измерений наиболее широко используются электрические приборы и устройства. При помощи электрических устройств можно измерять не электрические величины.

Современные электрические системы управления в большинстве случаев выполняются на базе электрических и электромеханических элементов. Цифровые и аналоговые вычислительные машины, построенные на базе электрических элементов, производят сложные расчеты и входят в состав автоматических системы управления (АСУ).

В настоящее время разрабатываются системы автоматизированного проектирования (САПР). Эти системы выполняются на базе современных ЦВМ.

Непрерывно расширяющиеся применения различных электротехнических и радиотехнических устройств обуславливают необходимость знания специалистами всех областей науки и техники основных понятий об электрических, магнитных и электромагнитных явлениях и их практическом использовании.

Теоретические основы электротехники (ТОЭ) является одной из основных дисциплин, многих высших технических учебных заведений (ВТУЗ) на ТОЭ базируются профилирующие дисциплины этих вузов.

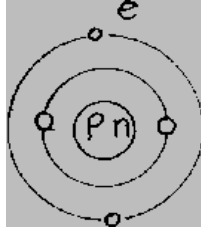
2. Электростатическое поле.

В настоящее время установлено, что электрический ток является упорядоченным движением заряженных частиц в проводящем теле.

Заряженные частицы всегда, существуют в теле и их наличие объясняется атомным строением вещества:

- Атом состоит из ядра, в котором сосредоточена практически вся масса атома и из электронов, вращающихся вокруг этого ядра. Заряд электрона условно принят отрицательным, а заряд ядра положительным.

Заряд ядра определяется зарядом протонов, входящих в состав атомного ядра. Кроме протонов в ядре имеются и нейтроны, не имеющие электрического заряда. Массы и заряды элементарных частиц измерены достаточно точно и установлены, что



$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

$$m_p = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

$$m_n = m_p + 2,5 m_e$$

$$q_e = e = -1,67 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

$$q_p = |e| = 1,67 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

В нейтральных атомах, в основных невозбужденных состояниях, число электронов и протонов равны. Под внешними воздействиями такое равновесие нарушается и появляются положительные и отрицательные ионы.

Вокруг электрона и нона существует электростатическое поле. Электростатическое поле является одной из форм существования материи и взаимодействие заряженных частиц осуществляется взаимодействием их полей.

Электростатическое поле характеризуется напряженностью поля:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{q}{\epsilon R^2} \quad (1.1) \quad \{E\} = 1 \frac{H}{Kл} = 1 \frac{B}{M} \epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} \frac{\Phi}{M}$$

Сила взаимодействия между точечными зарядами определяются законом Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{|q||q_0|}{\epsilon R^2} \quad (1.2) \quad \{F\} = 1A$$

С учетом (1.2) напряженность поля можно определить по формуле:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.3) \quad q_0 - \text{пробный заряд.}$$

Потенциальная энергия электростатического поля определяется по формуле:

$$W_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{|q||q_0|}{\epsilon R} \quad (1.4) \quad W_n = 1 \text{ Дж}$$

Помимо потенциальной энергии при введении пробного заряда q_0 электростатического поля заряда q поле характеризуется потенциалом поля:

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R} \quad (1.5) \quad \{\varphi\}_{\text{СИ}} = 1 \text{ Кл/М} = 1В$$

В качестве заряженные частицы перемещаются из точки с более высоким потенциалом, в точки с меньшим потенциалом, т.е для перемещения заряда необходимо наличие разности потенциалов

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

По перемещению зараженных частиц в веществе они делятся на три группы:

1. Проводники.
2. Полупроводники.
3. Диэлектрики.

Такое разделение объясняется наличием свободных (слабосвязанных) зарядов в веществе.

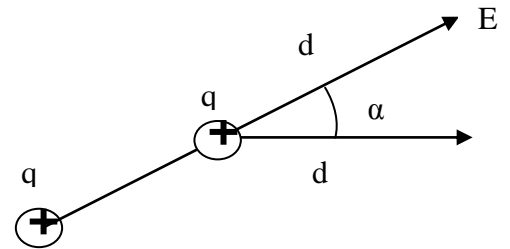
Работа совершаемая при перемещении электрического заряда в электростатическом поле определяется по формуле:

$$dA = Fdr = Fdl \cos\alpha \quad \alpha = (E dl)$$

$$dA = qE \cos\alpha dl$$

$$A = \int_1^2 Edl \cos\alpha = \frac{|q||q_0|}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$A = \frac{|q||q_0|}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.6)$$



Как видно из (1.6) работа зависит только от начального и конечного положений заряда q_0 и не зависит от формы его пути. Следовательно, электростатические силы являются консервативными, а электростатическое поле потенциальным.

Работа выполненная при перемещении единичного заряда в электростатическом поле характеризуются электродвижущей силой:

$$E = \frac{A}{q_0} = \{E\}_{cu} = 1B$$

3. Электрический ток.

Явление и процессы, связанные с движением электрических зарядов, составляют особую часть учения об электричестве – электродинамику.

Всякое упорядоченное движение электрических зарядов называется электрическим током. Электрический ток по природе возникновения делится на три типа:

1. Ток проводимости;
2. Ток перемещения или конвекционный ток;
3. Ток смещения.

Электрический ток характеризуется силой тока

$$I = \frac{dq}{dt} \{I\}_{cu} = 1 \frac{Kл}{c} = 1A$$

Помимо силы тока электрический ток характеризуется плотностью тока:

$$j = \frac{1}{\int_s dS} \quad (1.8) \quad \{j\}_{cu} = 1 \frac{A}{m^2}$$

С учетом (1.8) электрический ток можно определить как поток плотности тока через определенную площадку S.

$$I = \int_s j dS$$

Контрольные вопросы:

1. Что такое электростатическое поле?
2. Что такое электрический ток?

Тема 2: Электрическое сопротивление и проводимость. Источники и потребители электроэнергии.

План:

1. Основные элементы электрической цепи.
2. Резистивный элемент (резистор).
3. Индуктивный элемент (катушка индуктивности).
4. Емкостный элемент (конденсатор).

Ключевые слова: сопротивление, проводимость, резистор, катушка индуктивности, конденсатор, емкость

1. Основные элементы электрической цепи.

Электромагнитные процессы, протекающие в электротехнических устройствах, как правило, достаточно сложны. Однако во многих случаях, их основные характеристики можно описать с помощью таких интегральных понятий, как: напряжение, ток, электродвижущая сила (ЭДС). При таком подходе совокупность электротехнических устройств, состоящую из соответствующим образом соединенных источников и приемников электрической энергии, предназначенных для генерации, передачи, распределения и преобразования электрической энергии и (или) информации, рассматривают как **электрическую цепь**. Электрическая цепь состоит из отдельных частей (объектов), выполняющих определенные функции и называемых **элементами цепи**. Основными элементами цепи являются источники и приемники электрической энергии (сигналов). Электротехнические устройства, производящие электрическую энергию, называются **генераторами** или **источниками электрической энергии**, а устройства, потребляющие ее – **приемниками** (потребителями) электрической энергии.

У каждого элемента цепи можно выделить определенное число зажимов (**полюсов**), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Различают **двух–**и **многополюсные** элементы. Двухполюсники имеют два зажима. К ним относятся источники энергии (за исключением управляемых и многофазных), резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы. Многополюсные элементы – это, например, триоды, трансформаторы, усилители и т.д.

Все элементы электрической цепи условно можно разделить на **активные** и **пассивные**. Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия. К основным характеристикам элементов цепи относятся их вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики, описываемые дифференциальными или (и) алгебраическими уравнениями. Если элементы описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями, то они называются **линейными**, в противном случае они относятся к классу **нелинейных**. Строго говоря, все элементы являются нелинейными. Возможность

рассмотрения их как линейных, что существенно упрощает математическое описание и анализ процессов, определяется границами изменения характеризующих их переменных и их частот. Коэффициенты, связывающие переменные, их производные и интегралы в этих уравнениях, называются **параметрами** элемента.

Если параметры элемента не являются функциями пространственных координат, определяющих его геометрические размеры, то он называется **элементом с сосредоточенными параметрами**. Если элемент описывается уравнениями, в которые входят пространственные переменные, то он относится к классу **элементов с распределенными параметрами**. Классическим примером последних является линия передачи электроэнергии (длинная линия).

Цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными. Наличие в схеме хотя бы одного нелинейного элемента относит ее к классу нелинейных.

Рассмотрим пассивные элементы цепи, их основные характеристики и параметры.

2. Резистивный элемент (резистор)

Условное графическое изображение резистора приведено на рис. 1,а.

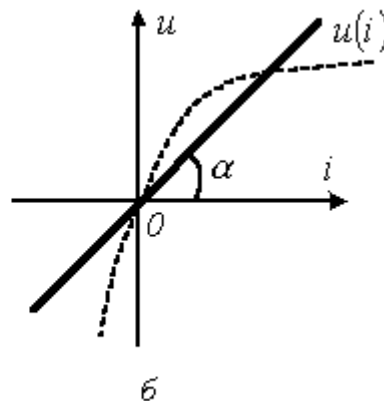
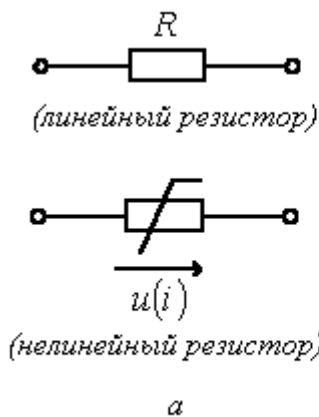


Рис.1

Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением. Последнее определяется геометрическими размерами тела и свойствами материала: удельным сопротивлением ρ (Ом·м) или обратной величиной – удельной

проводимостью $\gamma = \rho^{-1}$ (См/м).

В простейшем случае проводника длиной ℓ и сечением S его сопротивление определяется выражением

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\ell}{\gamma S} \text{ (Ом)}$$

В общем случае определение сопротивления связано с расчетом поля в проводящей среде, разделяющей два электрода. Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость (или $u(i)$), называемая вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость $u(i)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рис. 1,б), то резистор называется линейным и описывается соотношением

$$u = Ri = m Ritg \varphi$$

или

$$i = gu,$$

где $g = R^{-1}$ - проводимость. При этом $R = \text{const}$.

Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого нелинейно (рис. 1,б), как будет показано в блоке лекций, посвященных нелинейным цепям, характеризуется несколькими параметрами. В частности безынерционному резистору ставятся в соответствие статическое $R_{cm} = \frac{U}{I}$ и дифференциальное

$R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_I$ сопротивление.

3. Индуктивный элемент (катушка индуктивности)

Условное графическое изображение катушки индуктивности приведено на рис. 2,а. Катушка – это пассивный элемент, характеризующийся индуктивностью. Для расчета индуктивности катушки необходимо рассчитать созданное ею магнитное поле.

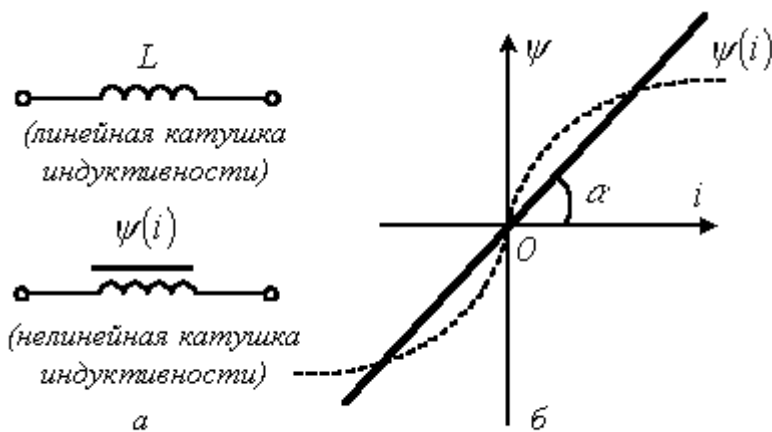


Рис.2

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушки,

$$L = \frac{\Psi}{i} \text{ (ГН)}$$

В свою очередь потокосцепление равно сумме произведений потока, пронизывающего витки, на число этих витков $\Psi = \sum w_k \Phi_k$, где

$$\Phi_k = \int_{S_k} \vec{B} d\vec{S}$$

основной характеристикой катушки индуктивности является зависимость $\psi(i)$, называемая вебер-амперной характеристикой. Для линейных катушек индуктивности зависимость $\psi(i)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рис. 2,б); при этом

$$L = m_L \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$$

Нелинейные свойства катушки индуктивности (см. кривую $\psi(i)$ на рис. 2,б) определяет наличие у нее сердечника из ферромагнитного материала, для которого зависимость $B(H) = \mu_0 \mu H$ магнитной индукции от напряженности поля нелинейна. Без учета явления магнитного гистерезиса нелинейная

катушка характеризуется статической $L_{cm} = \frac{\Psi}{I}$ и дифференциальной

$$L_{\partial} = \left. \frac{d\Psi}{di} \right|_I \text{ индуктивностями.}$$

4. Емкостный элемент (конденсатор)

Условное графическое изображение конденсатора приведено на рис. 3,а.

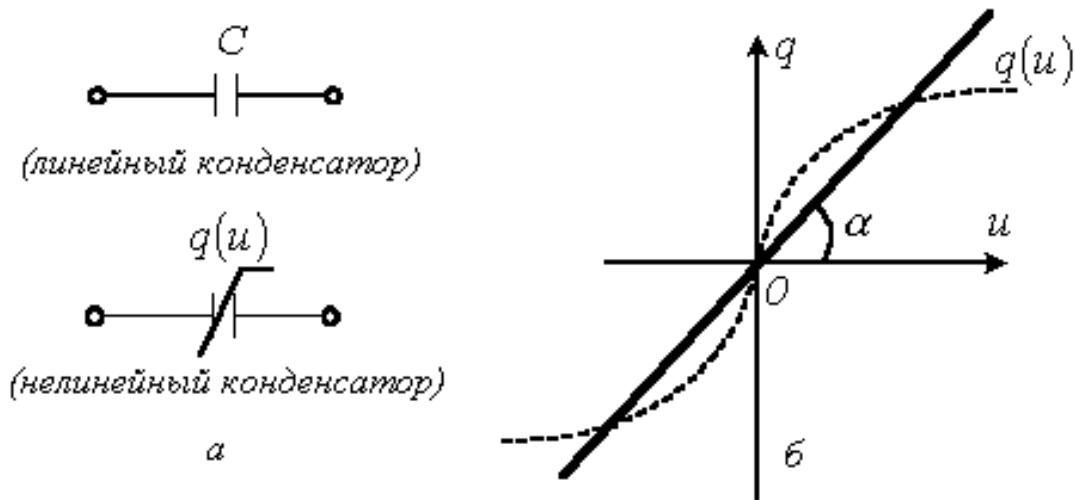


Рис.3

Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью. Для расчета последней необходимо рассчитать электрическое поле в конденсаторе. Емкость определяется отношением заряда q на обкладках конденсатора к напряжению u между ними

$$C = \frac{q}{u} (\Phi)$$

и зависит от геометрии обкладок и свойств диэлектрика, находящегося между ними. Большинство диэлектриков, используемых на практике, линейны, т.е. у них относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \text{const}$.

В этом случае зависимость $q(u)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, (см. рис. 3,б) и

$$C = m \text{ctg } \alpha = \text{const}$$

У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обуславливает нелинейность зависимости $q(u)$ (рис. 3,б). В этом случае без учета явления электрического гистерезиса нелинейный конденсатор характеризуется

статической $C_{ст} = \frac{q}{U}$ и дифференциальной $C_{д} = \left. \frac{dq}{du} \right|_U$ емкостями.

Каждый проводник имеет определенное сопротивление протеканию тока. Такое сопротивление зависит от материала и геометрических размеров проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1.9) \quad \{R\}_{Cu} = 1 \text{ Ом}$$

$$\rho_{Cu} = (20^\circ \text{C}) = 1,72 * 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м} \quad \rho_{Fe} = (20^\circ \text{C}) = 2,6 * 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

В электротехнике используют удельную проводимость

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

Сопротивление проводников зависит и от температуры

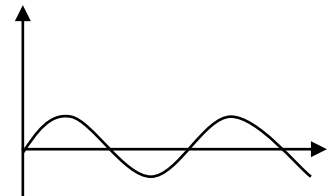
$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad (1.10)$$

По временным свойствам электрический ток делится на постоянный и переменный.

Переменные токи могут быть периодическими, синусоидально периодическими, не синусоидально периодическими, пульсирующими.

Контрольные вопросы:

1. Основные элементы электрической цепи.
2. Индуктивный элемент.
3. Резистивный элемент.
4. Емкостный элемент.



Тема 3: Законы Кирхгофа и баланс мощностей.

План:

1. Определение линейных электрических цепей.
2. Источник ЭДС и источник тока.
3. Напряжение на участке цепи.
4. Закон Ома.
5. Законы Кирхгофа.
6. Потенциальная диаграмма и энергетический баланс в электрической цепи.

Ключевые слова: сопротивление, проводимость, резистор, катушка индуктивности, конденсатор, емкость

1. Определение линейных электрических цепей.

Электрической цепью называют совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток.

Постоянным током называют ток, неизвестный во времени представляет собой направленное упорядоченное движение частиц, несущих электрические заряды.

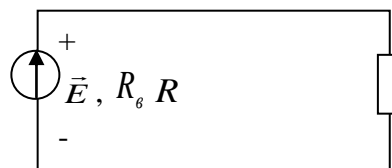
Упорядоченное движение носителей зарядов в проводниках называется электрическим полем, созданным в них источниками электрической энергии. Источники электрической энергии преобразуют химическую, механическую и другие виды энергии в электрическую. Источник электрической энергии характеризуется величиной и направлением электродвижущей силы (ЭДС) и величиной внутреннего сопротивления.

Для протекания электрического тока по контуру необходимо выполнение следующих условий:

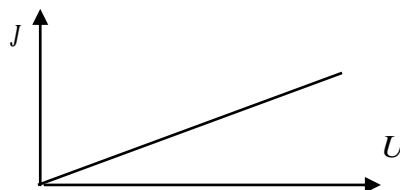
1. Наличие свободных зарядов,
2. Наличие источника энергии или электрического поля.
3. Замкнутость контура или цепи.

Изображение электрической цепи с помощью условных знаков называют электрической схемой.

Зависимость тока, протекающего по сопротивлению от напряжения на этом сопротивлении называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ).



Электрические цепи, в которых сопротивления имеют линейные ВАХ, называются линейными цепями.



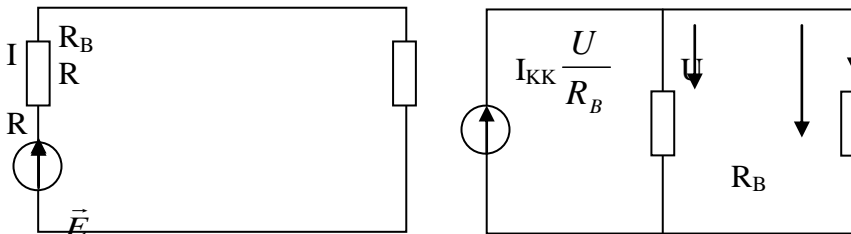
Электрические цепи, в которых имеются нелинейные сопротивления (ВАХ) называются нелинейными электрическими цепями.



2. Источник ЭДС и источник тока

В расчетах электрических цепей источник электрической энергии заменяют расчетным эквивалентом:

1. Источником ЭДС, последовательно включенным с ним R_B . (R_B - внешнее сопротивление, реальный источник энергии).
2. Источником тока с параллельно включенным с ним сопротивлением R_B .



Под источником ЭДС, понимают идеализированный источник питания, ЭДС которого постоянно не зависит от величины протекающего через него тока и равно ЭДС реального источника энергии. R_B - этого идеального источника равно нулю.

Под источником тока, понимают такой идеализированный источник питания, который дает ток I_{KK} , не зависящий от величины нагрузки R и равный

$$I_{KK} = E/R_B$$

Таким образом для источника тока $I_{KK} = \text{const}$ и при $R=0$ (КЗ) и при $R \rightarrow \infty$ (ХХ)

$$\text{При } R=0 \quad I_k R u_m = E u_m$$

$$\text{При } R=\infty \quad I_k (R u_m + R_B) = E u_m$$

Оба уравнения одновременно удовлетворяющиеся, если $R u_m / R_B \rightarrow \infty$

Это значит, что источник энергии работает в режиме источника ЭДС при $R_B \ll R$, в режиме источника тока при $R_B \gg R$. Приведем зависимость $I=f(U)$ для источника ЭДС и источника тока.

3. Напряжение на участке цепи.

Электрические цепи могут быть неразветвленными и разветвленными. Во всех элементах неразветвленной цепи протекает один и тот же ток. В разветвленной цепи по каждой ветви течет свой ток.

Ветвь - это участок цепи между двумя узлами.

Узел - есть точка цепи в которой сходится не менее трех ветвей.

Под напряжением на некотором участке эл.цепи понимают разность потенциалов между крайними точками этого участка

$$\varphi_a = \varphi_b + IR \quad U_{ac} = \varphi_a - \varphi_b \quad \varphi_a = \varphi_c + E + IR$$

$$U = \varphi_a - \varphi_b \quad \varphi_b = \varphi_c - E \quad U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR + E$$

$$U_{ab} = IR \quad \varphi_a = \varphi_c - E + IR$$

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR - E$$

Положительное направление указывает стрелкой (\rightarrow) напр. $U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$

$$U_{ca} = -U_{ac}$$

4. Закон Ома

Закон Ома для участков цепи не содержащего ЭДС:

$$U_{ab} = IR$$

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R}$$

Закон Ома для участков цепи с ЭДС имеет вид

$$I = \frac{U_{ac} + E}{R} = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) \pm E}{R}$$

5. Закон Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа гласит:

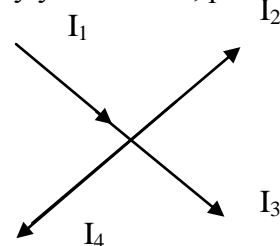
Алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю.

Для указанного узла $\sum I_i = 0$

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

или

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$



Закон Кирхгофа означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов они не скапливаются.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме ЭДС вдоль того же контура.

$$\sum IR = \sum E$$

Схемы замещения источников электрической энергии

Свойства источника электрической энергии описываются ВАХ $U(I)$, называемой внешней характеристикой источника. Далее в этом разделе для упрощения анализа и

математического описания будут рассматриваться источники постоянного напряжения (тока). Однако все полученные при этом закономерности, понятия и эквивалентные схемы в полной мере распространяются на источники переменного тока. ВАХ источника может быть определена экспериментально на основе схемы, представленной на рис. 4,а. Здесь вольтметр V измеряет напряжение на зажимах 1-2 источника I , а амперметр A – потребляемый от него ток I , величина которого может изменяться с помощью переменного нагрузочного резистора (реостата) R_H .

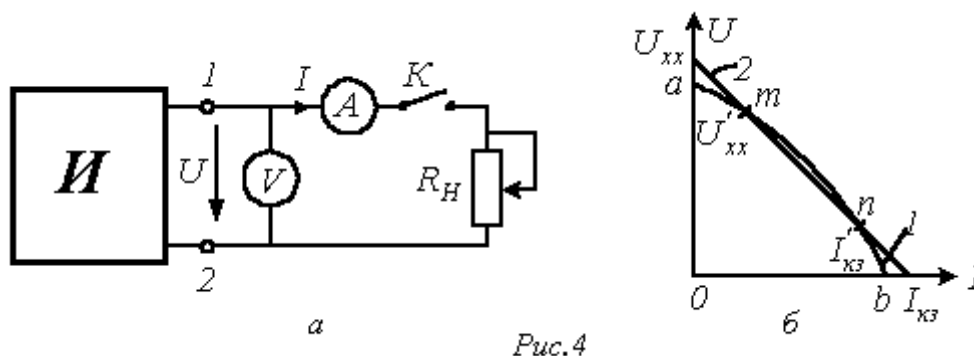


Рис.4

В общем случае ВАХ источника является нелинейной (кривая 1 на рис. 4,б). Она имеет две характерные точки, которые соответствуют:

а – режиму холостого хода $(I = 0; U = U'_{xx})$;

б – режиму короткого замыкания $(U = 0; I = I'_{кз})$.

Для большинства источников режим короткого замыкания (иногда холостого хода) является недопустимым. Токи и напряжения источника обычно могут изменяться в определенных пределах, ограниченных сверху значениями, соответствующими номинальному режиму (режиму, при котором изготовитель гарантирует наилучшие условия его эксплуатации в отношении экономичности и долговечности срока службы). Это позволяет в ряде случаев для упрощения расчетов аппроксимировать нелинейную ВАХ на рабочем участке m-n (см. рис. 4,б) прямой, положение которой определяется рабочими интервалами изменения напряжения и тока. Следует отметить, что многие источники (гальванические элементы, аккумуляторы) имеют линейные ВАХ.

Прямая 2 на рис. 4,б описывается линейным уравнением

$$U = U_{xx} - R_{сн} I, \quad (1)$$

где U_{xx} - напряжение на зажимах источника при отключенной нагрузке (разомкнутом ключе K в схеме на рис. 4,а); $R_{сн} = U_{xx} / I'_{кз}$ - внутреннее сопротивление источника.

Уравнение (1) позволяет составить последовательную схему замещения источника (см. рис. 5,а). На этой схеме символом E обозначен элемент, называемый идеальным источником ЭДС. Напряжение на зажимах этого элемента $U_{xx} = E = const$ не зависит от тока источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рис. 5,б. На основании (1) у

такого источника $R_{\text{вн}} = 0$. Отметим, что направления ЭДС и напряжения на зажимах источника противоположны.

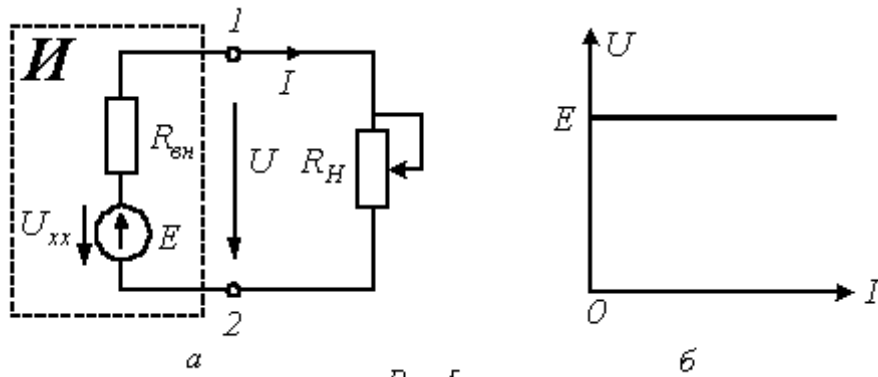


Рис.5

Если ВАХ источника линейна, то для определения параметров его схемы замещения необходимо провести замеры напряжения и тока для двух любых режимов его работы.

Существует также параллельная схема замещения источника. Для ее описания разделим левую и правую части соотношения (1) на $R_{\text{вн}}$. В результате получим

$$I = \frac{U_{\text{хх}}}{R_{\text{вн}}} - \frac{U}{R_{\text{вн}}} = I_{\text{кз}} - \frac{U}{R_{\text{вн}}}$$

или

$$I = J - g_{\text{вн}} U, \tag{2}$$

где $J = I_{\text{кз}}$; $g_{\text{вн}} = R_{\text{вн}}^{-1}$ - внутренняя проводимость источника.

Уравнению (2) соответствует схема замещения источника на рис. 6,а.

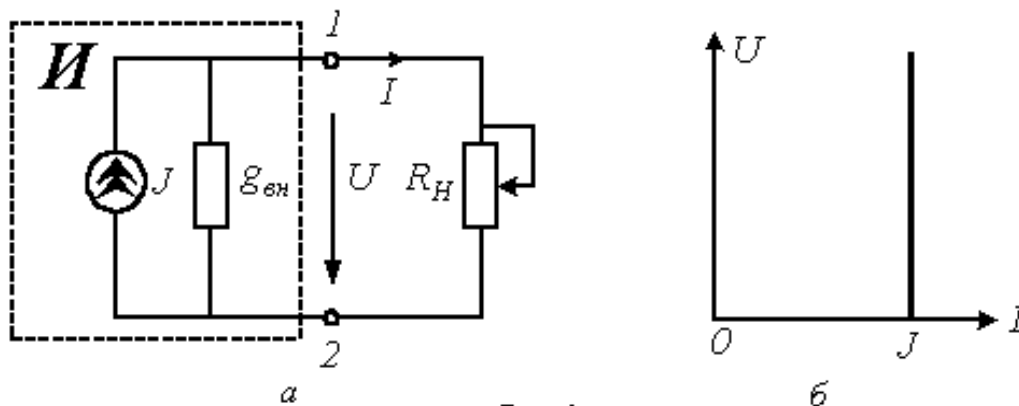


Рис.6

На этой схеме символом J обозначен элемент, называемый идеальным источником тока. Ток в ветви с этим элементом равен $J = I_{\text{кз}}$ и не зависит от напряжения на зажимах

источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рис. 6,б. На этом основании с учетом (2) у такого источника $\mathcal{E}_{\text{вн}} = 0$, т.е. его внутреннее сопротивление $R_{\text{вн}} = \infty$.

Отметим, что в расчетном плане при выполнении условия $E = JR_{\text{вн}}$ последовательная и параллельная схемы замещения источника являются эквивалентными. Однако в энергетическом отношении они различны, поскольку в режиме холостого хода для последовательной схемы замещения мощность равна нулю, а для параллельной – нет. Кроме отмеченных режимов функционирования источника, на практике важное значение имеет согласованный режим работы, при котором нагрузкой R_H от источника потребляется максимальная мощность

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{хх}}^2}{4R_{\text{вн}}}, \quad (3)$$

Условие такого режима

$$R_H = R_{\text{вн}}, \quad (4)$$

В заключение отметим, что в соответствии с ВАХ на рис. 5,б и 6,б идеальные источники ЭДС и тока являются источниками бесконечно большой мощности.

Контрольные вопросы:

1. Что такое линейная электрическая цепь.
2. Источник ЭДС и источник тока.
3. Напряжение на участке цепи.
4. Законы Ома
5. Законы Кирхгофа.
6. Потенциальная диаграмма и энергетический баланс в электрической цепи.

Тема 4: Последовательное, параллельное и смешанное соединенные электрической цепи. Преобразование соединении сопротивлений.

План:

1. Общие понятия линейных электрических цепей .
2. Последовательное соединение элементов.
3. Параллельное соединение элементов
4. Смешанное соединение элементов.

1. Общие понятия линейных электрических цепей

Многие электрические цепи имеют лишь один источник энергии и то или иное число пассивных элементов. Это могут быть приемники электрической энергии и различные вспомогательные элементы.

Расчет и анализ неразветвленных и некоторых разветвленных цепей с одним источником и пассивными элементами производится с помощью закона Ома, первого и второго законов Кирхгофа. Во многих случаях расчет и анализ осуществляется путем замены отдельных участков, а затем всей цепи одним элементом с эквивалентным сопротивлением и последующего перехода в процессе расчета к заданной цепи. В некоторых случаях целесообразно воспользоваться методом эквивалентного генератора.

Если большое число пассивных элементов вместе с источником э.д.с. образуют электрическую цепь, то их взаимное соединение может быть выполнено различными способами. Существуют следующие характерные схемы таких соединений.

2. Последовательное соединение элементов.

Последовательным, называется такое соединение элементов, когда условный конец первого элемента соединяется с условным началом второго, конец второго с началом третьего и т. д. При таком соединении во всех элементах цепи протекает один и тот же ток. При этой схеме могут быть соединены или все пассивные элементы цепи и тогда цепь будет одноконтурной неразветвленной (рис 1а), или может быть соединена только часть элементов многоконтурной цепи.

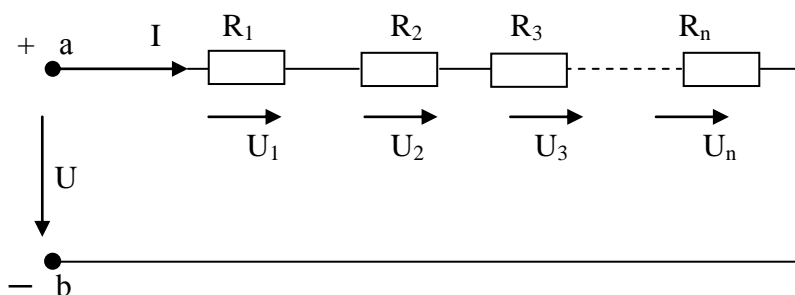


Рис 1.а

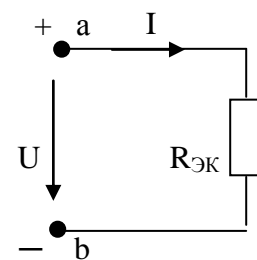


Рис 1.б

Если последовательно соединены n элементов, в которых протекает один и тот же ток I , то напряжение на зажимах цепи будет равно сумме падений напряжения на n , последовательно включенных элементах, т.е.,

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

или

$$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) I = R_{эк} I \quad (1)$$

где $R_{эк} = \sum R_k$ - эквивалентное сопротивление цепи.

Таким образом, эквивалентное сопротивление последовательно соединенных элементов равно сумме сопротивлений этих элементов.

Схема электрической цепи (рис 1а), может быть представлена эквивалентной схемой, (рис 1 б), состоящей из одного элемента, с эквивалентным сопротивлением $R_{\text{эк}}$. Для такой схемы $U = R_{\text{эк}}I$, что совпадает с уравнением (1).

При расчете цепи с последовательным соединением элементов при заданном напряжении источника питания и сопротивлениях элементов ток в цепи рассматривают по закону Ома.

$$I = U / R_{\text{эк}}$$

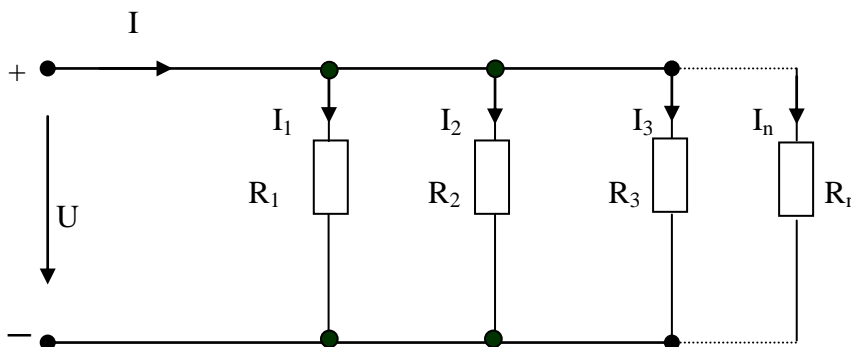
Падение напряжения на k -м элементе $U = R_{\text{эк}}I = R_k \times (U / R_{\text{эк}})$ зависит не только от сопротивления этого элемента $R_{\text{эк}}$, но и от эквивалентного сопротивления других элементов цепи. В этом заключается существенный недостаток последовательного соединения элементов. В предельном случае когда, сопротивление какого либо элемента цепи становится равным бесконечности (разрыв цепи), ток во всех элементах цепи становится равным нулю.

Так как при последовательном соединении то во всех элементах цепи один и тот же, то отношение падений напряжения на элементах равно сопротивлений этих элементов: $U_k / U_n = R_k / R_n$

3. Параллельное соединение элементов.

Параллельным, называется такое соединение резистивных элементов, элементов, при котором соединяются между собой как условные начала всех элементов, так и их концы (рис 2 а). Характерным для параллельного соединения является одно и тоже напряжение U на выводах всех элементов.

Каждый параллельно включенный элемент образует отдельную ветвь. Поэтому цепь с параллельным соединением элементов изображенная на (рис 2а) хотя и является простой цепью (так содержит два узла), в то же время разветвления.



$$I_k = \frac{U}{R_k} = G_k \cdot U \quad \text{Рис. 2а (2)}$$

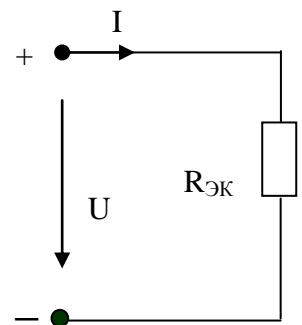


Рис. 2.б

В каждой параллельной ветви ток

где $G_k = \frac{1}{R_k}$ - проводимость k -й ветви. По первому закону Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n \text{ или } I = G_1 U + G_2 U + G_3 U + \dots + G_n U = (G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n) U = G_{\text{эк}} U,$$

где $G_{\text{эк}} = \sum G_k$ - эквивалентная проводимость цепи.

Таким образом, при параллельном соединении пассивных элементов их эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей этих элементов. Эквивалентная проводимость всегда больше проводимости любой части параллельных ветвей. Эквивалентной проводимости G соответствует эквивалентное сопротивление $R_{\text{эк}} = 1 / G_{\text{эк}}$.

Ток в неразветвленной части цепи с параллельным соединением элементов может быть определен из этой схемы по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R_{\text{эк}}} = G_{\text{эк}} \cdot U$$

следовательно если напряжение источника питания постоянно, то при увеличении числа параллельно включенных элементов (что приводит к увеличению эквивалентной проводимости) ток в неразветвленной части цепи (ток источника питания) увеличивается.

Из формулы (2) видно, что ток в каждой ветви зависит только от проводимости данной ветви и не зависит от проводимости других ветвей. Независимость режимов параллельных ветвей друг от друга это важное преимущество параллельного соединения пассивных элементов. В промышленных установках параллельное соединение электроприемников применяют в большинстве случаев. Самым наглядным примером является включение электрических осветительных ламп.

Так как при параллельном соединении ко всем элементам приложено одно и тоже напряжение, а ток в каждой ветви пропорционален проводимости этой ветви, то отношение токов в параллельных ветвях равно отношению проводимостей этих ветвей

$$\frac{I_k}{I_n} = \frac{G_k}{G_n} = \frac{R_n}{R_k}$$

или обратно пропорционально отношению их сопротивлений

4. Смешанное соединение элементов.

Смешанным соединением или последовательно-параллельным, называется такое соединение пассивных элементов, при котором на одних участках электрической цепи они соединены параллельно, а на других последовательно.

Такая цепь может иметь различное число узлов и ветвей. Пример смешанного соединения приведен на схеме (рис 3 а).

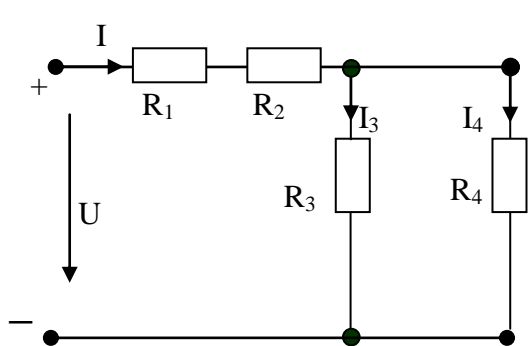


Рис. 3 а

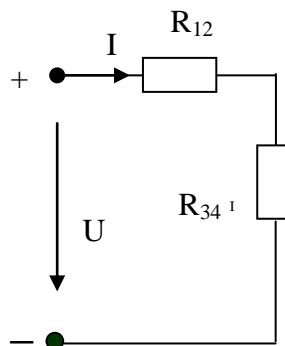


Рис. 3 б

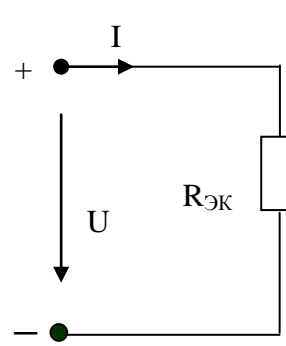


Рис. 3 в

Для расчета такой цепи необходимо последовательно определять эквивалентные сопротивления для тех частей схемы, которые представляют собой только последовательное или только параллельное соединение.

В рассматриваемой схеме имеется последовательное соединение элементов с сопротивлениями R_1 и R_2 . Эквивалентное сопротивление последовательно соединенных элементов

$$R_{12} = R_1 + R_2$$

Эквивалентное сопротивление параллельно соединенных элементов R_3 и R_4

$$R_{34} = \frac{1}{G_{34}} = \frac{1}{G_3 + G_4} = \frac{1}{1/R_3 + 1/R_4} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

Эквивалентная схема с сопротивлениями элементов R_{12} и R_{34} изображена на (рис. 3 б). Для этой схемы последовательного соединения R_{12} и R_{34} эквивалентное сопротивление $R_{эк} = R_{12} + R_{34}$, а соответствующая эквивалентная схема представлена на (рис.3в). Найдем ток в этой цепи:

$$I = \frac{U}{R_{эк}} = G_{эк} \cdot U$$

Это ток источника питания и ток в элементах R_1 и R_2 цепи. Для расчета токов I_3 и I_4 определяют напряжение на участке цепи с сопротивлением R_{34} (рис. 3б)

$$U_{34} = R_{34} I = R_{34} \frac{U}{R_{\text{эк}}}$$

тогда токи I_3 и I_4 определяют по закону Ома:

$$I_3 = \frac{U_{34}}{R_3} \quad I_4 = \frac{U_{34}}{R_4}$$

Подобным образом можно рассчитать и ряд других схем электрических цепей со смешанным соединением пассивных элементов.

Контрольные вопросы:

1. Последовательное соединение элементов.
2. Параллельное соединение элементов
3. Смешанное соединение элементов.

Тема 5: Схемы преобразований источников тока и ЭДС.

План:

1. Соединение вида «треугольник» и «звезда».
2. Преобразование треугольника сопротивлений в звезду.
3. Преобразование звезды сопротивлений в треугольник.

1. Соединение вида «треугольник» и «звезда»

В электрических цепях можно встретиться с соединениями пассивных элементов, которые не приводятся к сочетанию последовательных и параллельных соединений. Наиболее распространенными примерами таких соединений являются мостовые схемы, получившие широкое применение на практике и особенно в автоматике и измерительной технике.

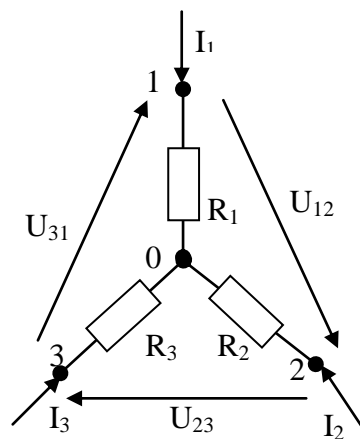


Рис. 1

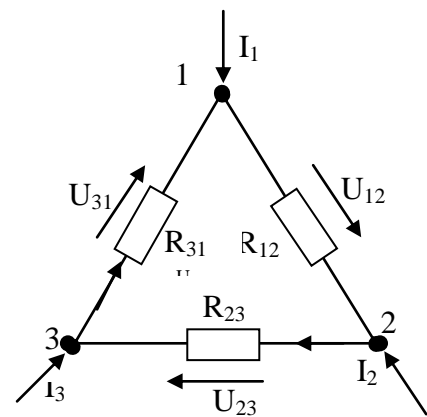


Рис.2

Соединение трех сопротивлений, имеющие вид трех–лучевой звезды (рис.1), называют соединением - звезда, а соединение трех сопротивлений так, что они образуют собой стороны треугольника (рис. 2),-соединением треугольник. В узлах 1,2,3 (потенциалы их φ_1 , φ_2 и φ_3) и треугольник и звезда соединяются с остальной частью схемы (не показанной на рисунках).

Если преобразование выполнить следующим образом, что при одинаковых значениях потенциалов (напряжений между внешними выводами) одноименных точек треугольника и звезды подтекающие к этим точкам токи одинаковы, то вся внешняя схема «не заметит» произведенной замены.

2. Преобразование треугольника сопротивлений в звезду.

В схемы треугольника выразим напряжение U_{12} через токи $I_1 - I_3$, протекающие к узлам 1-3, и сопротивления сторон треугольника.

На основании второго закона Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений в контуре из сопротивлений треугольника равна нулю (так как в ней нет ЭДС):

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0$$

По первому закону Кирхгофа при выбранных положительных направлениях токов для узла 1 имеем:

$$I_{31} = -I_1 + I_{12}, \text{ для узла 2 имеем } I_{23} = I_{12} + I_2$$

При установке двух узловых уравнений в контурной записи:

$$R_{12} I_{12} + R_{23} I_{12} + R_{23} I_2 + R_{31} I_{12} - R_{31} I_1 = 0$$

Выражая из этого уравнения ток:

$$I_{12} = (R_{31}I_1 - R_{23}I_2) / (R_{12} + R_{23} + R_{31})$$

получаем для ветви треугольника напряжение

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \cdot I_1 - \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \cdot I_2$$

Это же напряжение U_{12} в схеме звезды (рис.1) выразится (по второму закону Кирхгофа) как:

$$U_{12} = R_1I_1 - R_2I_2$$

Для эквивалентности треугольника и звезды сопротивлений напряжение U_{12} должно быть одинаковым в схемах (рис.1) и (рис. 2), а значит и одинаковы и коэффициенты при токах I_1 и I_2 .

Следовательно,

$$R_1 = R_{12}R_{31} / (R_{12} + R_{23} + R_{31}) \quad (1)$$

$$R_2 = R_{23}R_{12} / (R_{12} + R_{23} + R_{31}) \quad (2)$$

Аналогично (например, рассматривая выражения U_{23}) можно получить перестановкой индексов:

$$R_3 = R_{31}R_{23} \cdot (R_{12} + R_{23} + R_{31}) \quad (3)$$

И так, сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, делимому на сумму сопротивлений сторон треугольника.

4. Преобразование звезды сопротивлений в треугольник.

При необходимости перейти от сопротивлений звезды к сопротивлению эквивалентного треугольника, расчетные формулы можно получить решив приведенную систему уравнений (1), (2), (3), считая сопротивления лучей звезды известными, а сопротивления сторон треугольника искомыми. При этом получим:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + (R_1R_2) / R_3$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + (R_2R_3) / R_1 \quad (4)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + (R_3R_1) / R_2$$

Таким образом, сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и их произведения, деленного на сопротивление третьего луча.

На основании последних выражений часть схемы, содержащую трех-лучевую звезду сопротивлений, можно заменить треугольником сопротивлений, при этом ток распределение и распределение напряжений в остальной части схемы сохраняются.

Часто преобразования треугольника сопротивлений в звезду или обратный переход звезды сопротивлений к треугольнику позволяют преобразовать сложную электрическую схему в одноконтурную.

Контрольные вопросы:

1. Соединение вида «треугольник» и «звезда».
2. Преобразование треугольника сопротивлений в звезду.
3. Преобразование звезды сопротивлений в треугольник.

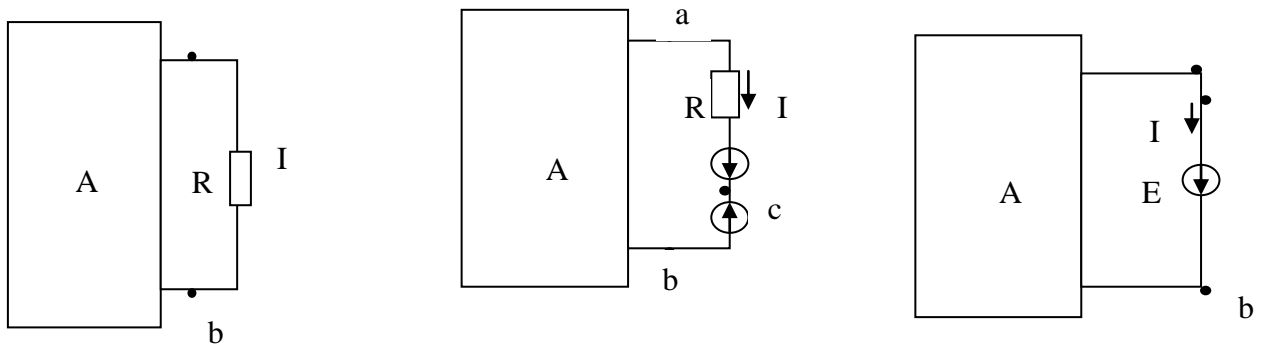
Тема 6: Методы расчетов электрических цепей при помощи законов Кирхгофа и метода замещения.

План:

1. Теорема компенсации.
2. Замена параллельных ветвей одной эквивалентной.
3. Метод двух узлов.
4. Метод узловых потенциалов.
5. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду.

1. Теорема компенсации.

В электрической цепи без изменения сопротивления можно заменить ЭДС, численно равной напряжению на заменяемом сопротивлении и направленной встречно току в этом сопротивлении



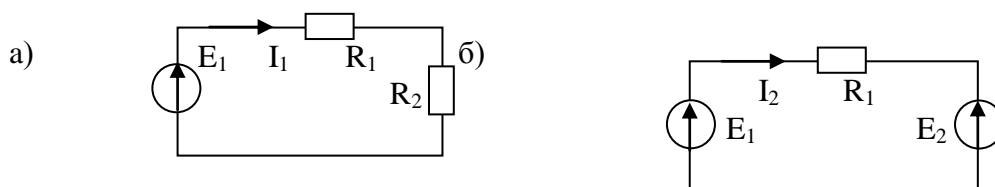
Для доказательства теоремы компенсации выделим из схемы одну ветвь с сопротивлением R , по которой течёт ток X , а всю остальную часть схемы условно обозначим прямоугольником.

Если в выделенную ветвь два одинаковых и противоположно направленных ЭДС $E = IR$, то ток в цепи от этого не изменится. Разность потенциалов в точках a и c равна нулю, т.к.

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E = \varphi_a - IR + IR = \varphi_a \neq \varphi_c - \varphi_a = 0$$

Те. Можно заворотить участок ac .

Пример: доказать тождественность схемы



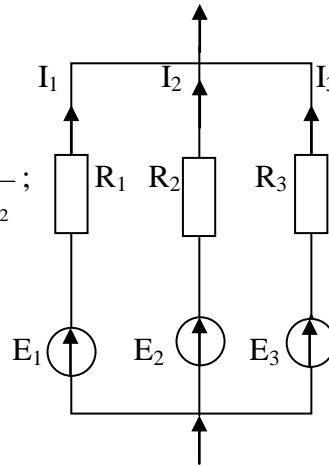
$$E_2 = E_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Решение

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} \text{ а } I$$

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = \frac{E_1 - E_2}{R} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E_1}{R_1 + R_2};$$

$$E_2 = I_1 R_1 = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \text{ в}$$



1. Замена параллельных ветвей одной эквивалентной.

Для указанной схемы токи в ветвях находятся по формуле:

$$I_n = (E_n - U_{ab}) g_n$$

$$\text{т.к. } I = I_1 + I_2 + I_3 \text{ } I_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n E_k g_k - U_{ab} \sum_{k=1}^n g_k$$

$$\text{если } g_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n g_k, \text{ то } I_{\text{э}} = E_{\text{э}} \cdot g_{\text{э}} - U_{ab} \cdot g_{\text{э}}: \quad g_{\text{э}} = \frac{1}{R} E = \frac{\sum E_k g_k}{\sum g_k}$$

P.S. Разрабатываемые схемы эквивалентны только в смысле поведения их по отношению по всей остальной части схем, но они не эквивалентны в отношении мощностей, выделяющихся в них. Например: в указанной схеме токи в ветвях протекают даже при $I=0$, тогда как в эквивалентной схеме при $I=0$ потребление энергии отсутствует.

3. Метод двух узлов

Часто встречаются схемы, содержащие всего два узла. Для таких схем наиболее удобным методом является метод двух узлов.

Под методом двух узлов понимают метод расчета электрических цепей, в котором за искомое принимают напряжение между двумя узлами схемы.

Затем через него определяется токи ветвей.

В этой схеме ток к узлам а и в не подтекает. ($I=0$).

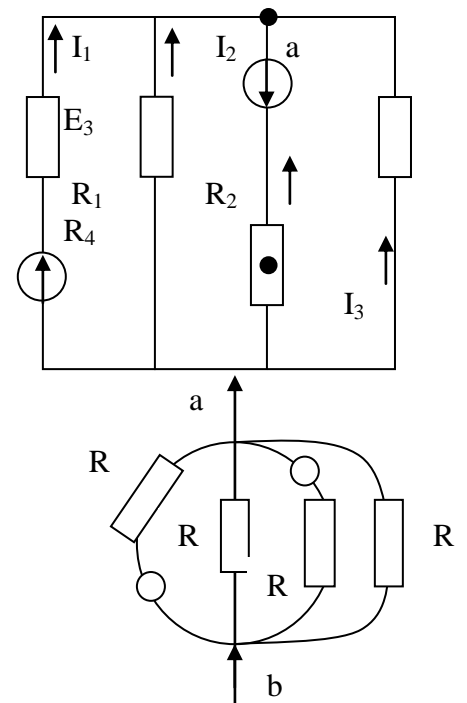
Тогда из:

$$I = \sum E_k g_k - U_{ab} \sum g_k$$

$$\sum E_k g_k = U_{ab} \sum g_k$$

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k}{\sum g_k}$$

Токи в ветвях определяются по формуле $I_k = (E_k - U_{ab}) \cdot g_k$



4. Метод узловых потенциалов

Ток в любой ветви схемы может быть найден по закону Ома для участков цепи содержащего ЭДС. Для этого необходимо знать потенциалы узлов схемы.

Метод, в котором за неизвестные принимают потенциалы узлов схемы, называют методом узловых потенциалов.

Пусть в схеме изменится n узлов. Т.к. заземление любой точки схемы не изменит тока распределения, можно принимать одну из узлов с потребляемой $\varphi=0$. Таким образом число узлов уменьшается на одну ($n-1$).

Число неизвестных в методе узловых потенциалов равно числу уравнений, которые надо составить для схемы по первому закону Кирхгофа.

Объясняем применение данного метода на примере. Рассмотрим схему, в котором довольно больше количество ветвей и сравнительно небольшое число узлов.

Т.к. узел 4 заземлен необходимо определить потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

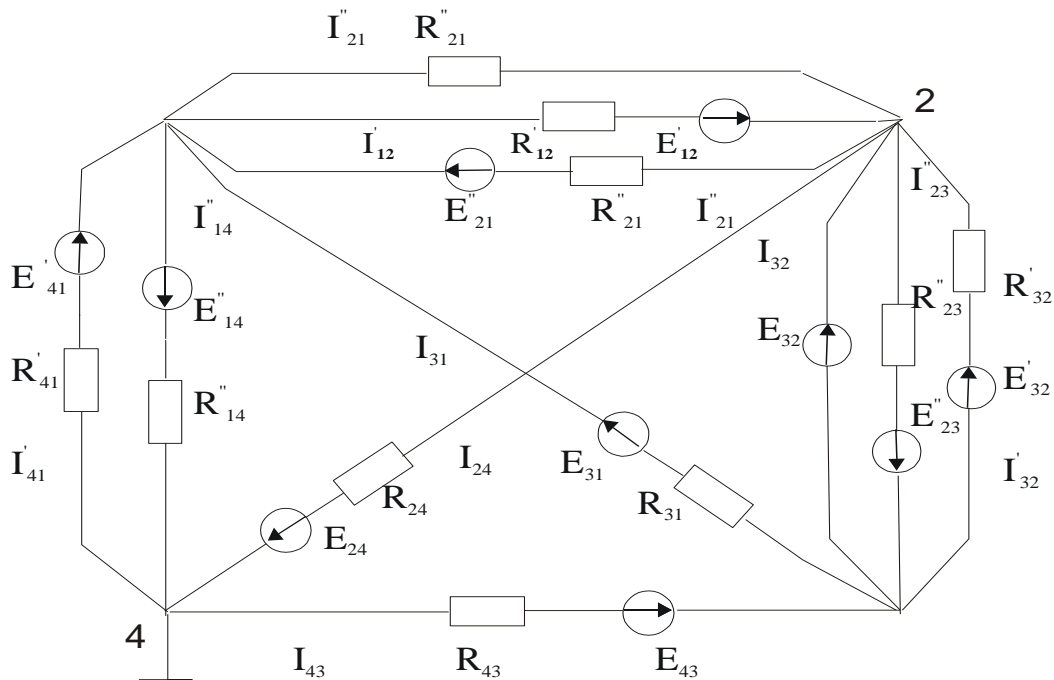
Для первого узла составим уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$I_{41}^1 - I_{14}^{11} + I_{21}^{1111} - I_{12}^1 + I_{21}^{11} + I_{31} = 0$$

Если токи выразить по закону Ома:

$$\begin{aligned} & [E_{41}^1 - (\varphi_1 - \varphi_4)]g_{41}^1 - [E_{41}^{11} - (\varphi_4 - \varphi_1)]g_{14}^{11} + [0 - (\varphi_1 - \varphi_2)]g_{21}^{1111} - [E_{12}^1 - (\varphi_2 - \varphi_1)]g_{12}^1 + \\ & [E_{21}^{11} - (\varphi_1 - \varphi_2)]g_{21}^{11} + [E_{31}(\varphi_1 - \varphi_3)]g_{31} = 0 \end{aligned}$$

Это уравнения можно переписать в следующем виде:



$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}$$

$$G_{11} = g_{41}^1 + g_{13} + g_{12}^{11} + g_{41}^{11} + g_{12}^1 + g_{12}^{1111} (\sum g_k)$$

$$\text{Здесь } G_{12} = -(g_{12}^1 + g_{12}^{1111} + g_{12}^{11})$$

$$G_{13} = -g_{13}$$

$$I_{11} = E_{41}^1 g_{14}^1 + E_{31} g_{31} + E_{21}^{11} g_{21}^{11} - E_{14}^{11} g_{41}^{11} - E_{12}^1 g_{21}^1$$

Ток I_{11} - условный ток первого узла – сумма токов, направленных к узлу1. (+) означает, что ток подходит к узлу, (-) – отходит от узла.

Подобные уравнения можно записать и для других узлов.

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}$$

$$\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22}$$

$$\varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33}$$

$$\varphi_1 G_{n-1,1} + \varphi_2 G_{n-1,2} + \varphi_{n-1} G_{n-1,n-1} = I_{n-1,n-1}$$

где G_{kk} - сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле K , G_{km} - сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы k и m .

I_{kk} - узловый ток K узла. Токи в ветвях находим по формулам:

$$I_{41}^1 = \frac{E_{14}^1 - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R_{41}}$$

$$I_{21}^{11} = \frac{0 - (\varphi_1 - \varphi_2)}{R_{12}^{11}}$$

$$I_{43} = \frac{E_{43} - (\varphi_3 - \varphi_4)}{R_{43}}$$

Пример: Найти токи в ветвях схемы вышеприведенной и сделать проверку по второму закону Кирхгофа, если дано:

$$E_{41}^1 = 10B, E_{14}^{11} = 6B, E_{43} = 8B$$

$$E_{12}^1 = 20B, E_{21}^{11} = 30B, E_{31} = 14B, E_{24} = 10B,$$

$$E_{23}^{11} = 12B, E_{32}^1 = 7B, R_{41}^1 = 100M, R_{14}^{11} = 20M, R_{12}^1 = 100M,$$

$$R_{21}^1 = 100M, R_{21}^{11} = 500M, R_{31} = 200M, R_{24} = 40M, R_{43} = 20M,$$

$$R_{23}^{11} = 40M, R_{32}^1 = 20M, I_{k32} = 1,5A$$

$$I_1, I_2, \dots, I_n - ?$$

Решения: Записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11} \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22} \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33} \end{cases}$$

Определим проводимости

$$G_{11} = \frac{1}{R_{41}^1} + \frac{1}{R_{14}^{11}} + \frac{1}{R_{12}^1} + \frac{1}{R_{21}^{11}} + \frac{1}{R_{21}^{111}} + \frac{1}{R_{31}^1} = 2,4 \text{ См}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_{12}^1} + \frac{1}{R_{21}^{11}} + \frac{1}{R_{21}^{111}} + \frac{1}{R_{24}^1} + \frac{1}{R_{32}^1} + \frac{1}{R_{23}^{11}} = 1,4 \text{ См}$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_{32}^1} + \frac{1}{R_{23}^{11}} + \frac{1}{R_{31}^1} + \frac{1}{R_{43}^1} = 1,75 \text{ См}$$

$$G_{12} = G_{21} = -\left(\frac{1}{R_{21}^{111}} + \frac{1}{R_{12}^1} + \frac{1}{R_{21}^{11}} \right) = -0,4 \text{ См}$$

$$G_{13} = -0,5 \text{ См} \quad G_{23} = G_{32} = -(0,25 + 0,5) = -0,75 \text{ См}$$

Подсчитываем узловые токи:

$$I_{11} = \frac{E_{41}^1}{R_{41}^1} - \frac{E_{14}^{11}}{R_{14}^{11}} + \frac{E_{31}^1}{R_{31}^1} - \frac{E_{12}^1}{R_{12}^1} + \frac{E_{21}^{11}}{R_{21}^{11}} = 15 \text{ А}$$

$$I_{22} = \frac{E_{32}^1}{R_{32}^1} - \frac{E_{23}^{11}}{R_{23}^{11}} + \frac{E_{12}^1}{R_{12}^1} - \frac{E_{21}^{11}}{R_{21}^{11}} + \frac{E_{24}^1}{R_{24}^1} + I_{k32} = -1,5 \text{ А}$$

$$I_3 = \frac{E_{43}^1}{R_{43}^1} - \frac{E_{31}^1}{R_{31}^1} + \frac{E_{23}^{11}}{R_{23}^{11}} - \frac{E_{32}^1}{R_{32}^1} + -I_{k32} = -5 \text{ А}$$

В итоге получим следующую систему уравнений:

$$2,4\varphi_1 - 0,4\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = 15 \Rightarrow \varphi_1 = 6 \text{ В}$$

$$-0,4\varphi_1 + 1,4\varphi_2 - 0,75\varphi_3 = -1,5 \Rightarrow \varphi_2 = 0,06 \text{ В}$$

$$-0,5\varphi_1 - 0,75\varphi_2 + 1,75\varphi_3 = -5 \Rightarrow \varphi_3 = -1,07 \text{ В}$$

Токи в ветвях вычисляется по закону Ома для участка цепи содержащего ЭДС:

$$I_{41}^1 = \frac{E_{41}^1 - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R_{41}^1} = 4 \text{ А} \quad I_{21}^{111} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_{21}^{111}} = -1,185 \text{ А}$$

$$I_{32}^1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_{32}^1}{R_{32}^1} = 2,93 \text{ А} \quad I_{43}^1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_{43}^1}{R_{43}^1} = 4,55 \text{ А}$$

Если проверим решение по первому закону Кирхгофа для контура:

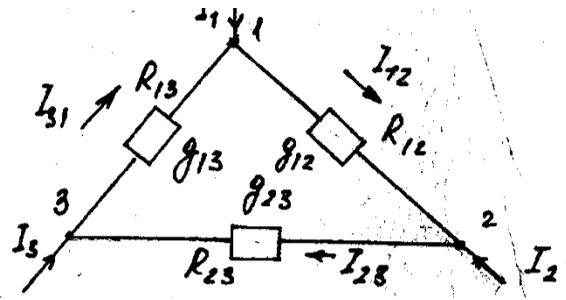
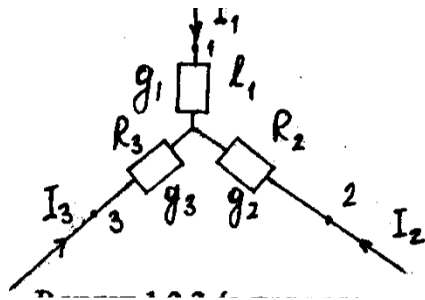
$$1. \sum IR = I_{41}^1 R_{41}^1 + I_{21}^{111} R_{21}^{111} + I_{32}^1 R_{32}^1 - I_{43}^1 R_{43}^1 = 4 \cdot 1 + 1,185 \cdot 5 + 2,92 \cdot 2 - 4,55 \cdot 2 \approx -5 \text{ В}$$

$$2. \sum E = E_{41}^1 - E_{32}^1 - E_{43}^1 = 10 - 7 - 8 = -5 \text{ В}$$

$$\text{Итак} \quad \sum IR = \sum E \quad -5 = -5$$

5. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду.

Соединение трех сопротивлений, имеющих вид трех лучевой звёзды, называют соединением звездой, а соединение трех сопротивлений так, что они образуют собой стороны треугольника - соединением треугольника.



В узлах 1,2,3 (с потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.) и треугольник и звезда соединяются с остальной частью схем.

При расчетах электрических цепей часто оказывается полезным преобразовать треугольник в треугольник. При этом преобразование необходимо выполнить таким образом, чтобы внешняя схема не "заметила" этого. Для этого потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, должны оставаться неизвестной.

Приведем формулы преобразований

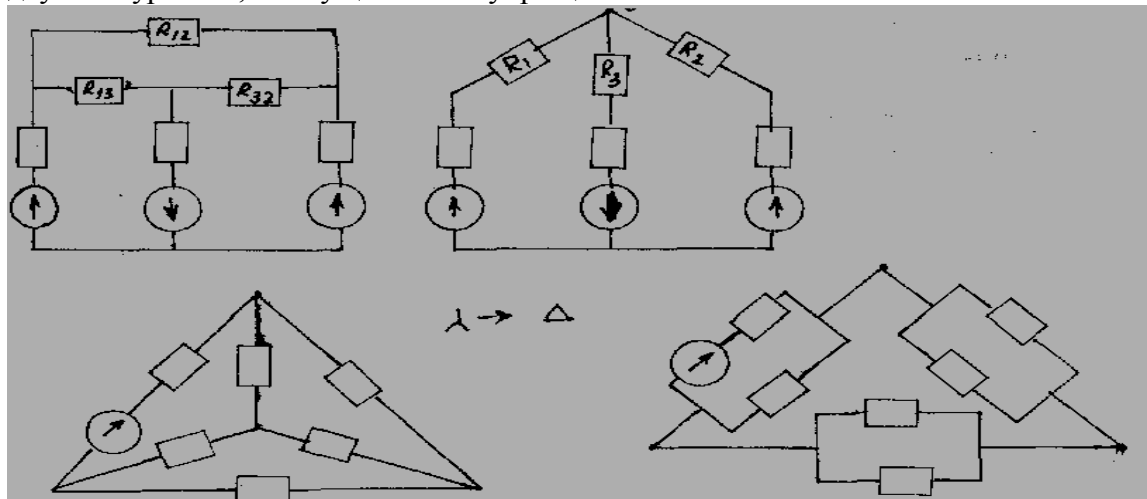
$$1. \quad g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} \quad R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{m}{R_3}$$

$$g_{13} = \frac{g_1 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \quad R_{13} = \frac{m}{R_2}$$

$$g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \quad R_{23} = \frac{m}{R_1}$$

$$2. \quad R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

При указанных преобразованиях трехконтурные цепи можно сделать двухконтурными, что существенно упрощает



Контрольные вопросы:

1. Метод двух узлов
2. Метод контурных токов.
3. Метод наложения.
4. Метод узловых потенциалов.
5. Преобразование звезды в треугольник.
6. Преобразование треугольника в звезду

Тема 7: Метод расчета сложных электрических цепей.

План:

1. Составление уравнений для расчета токов в схемах при помощи законов Кирхгофа.
2. Метод пропорциональных величин.
3. Метод контурных токов.
4. Метод наложения.

1. Составление уравнений для расчета токов в схемах при помощи законов Кирхгофа.

При расчетах с помощью законов Кирхгофа число неизвестных токов равно числу ветвей схемы. Составление уравнений осуществляется в следующем порядке:

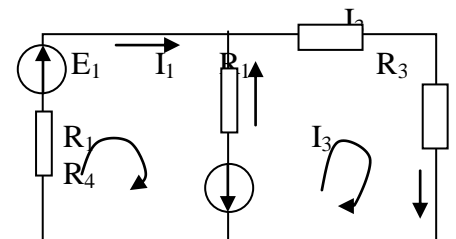
1. Выбрать положительные направления токов в ветвях и обозначить в схеме.
2. Определяется положительное направление обхода контуров для составлений уравнений по второму закону Кирхгофа.

Для получения линейно независимых уравнений по первому закону Кирхгофа составляют число уравнений, равно числу узлов без единицы. Общее число уравнение по 1, и 2- му закону Кирхгофа равняется числу ветвей. Отсюда видно, что число уравнений по 2-му закону Кирхгофа равно числу ветвей минус число уравнений по 1 -му закону.

При составлений уравнений по 2-му закону необходимо следить, чтобы каждый новый контур входило хотя бы одна новая ветвь. Такие контуры называются независимы.

Пример: Найти токи в ветвях схемы, в которой

$$E_1=80 \text{ В}, E_2=64 \text{ В}, R_1=6 \text{ Ом}, \\ R_2=4 \text{ Ом}, R_3=3 \text{ Ом}, R_4=1 \text{ Ом}$$



Решение: Выбираем направление токов в ветвях. В схеме 2 узла. Значит по первому уравнению Кирхгофа составим одно уравнение $I_1 + I_2 = I_3$. Число ветвей равно 3. Следовательно, по 2-му закону Кирхгофа составим 2 уравнения для первого контура

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1 + E_2$$

$$I_2 R_2 - I_3 (R_3 + R_4) = -E_2$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Решение полученной системы уравнений дает $I_1 = 14 \text{ А}$, $I_2 = -15 \text{ А}$, $I_3 = -1 \text{ А}$. Знак «-» означает, что направление токов $I_2 = I_3$ не совпадают с направлениями принятыми для них.

2. Метод пропорциональных величин.

Для практических расчетов электрических цепей разработан ряд методов, более удобных чем методы расчета цепей по законам Кирхгофа.

В методе пропорциональных величин в самой удаленной от источника ЭДС ветви схемы (исходной ветви) произвольно задаем некоторым током. Далее подвигаясь к входным зажимам, находим токи в ветвях и напряжения U_{\min} схемы, если бы в исходной ветви протекал заданный ток.

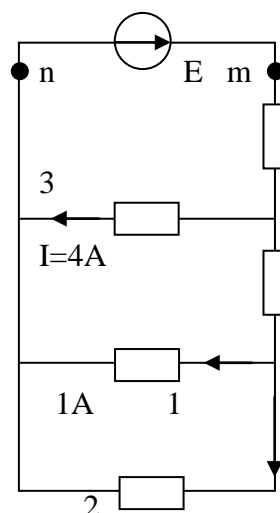
Т.к. найденное значение напряжения в начале схемы в общем случае не будет равно ЭДС источника, то для нахождения истинного значения токов необходимо умножить их на коэффициент, равный:

$$K = E / U_{\min}$$

Этот метод применим для расчета цепей, состоящих только из последовательных, и параллельных соединений сопротивлений и при наличии в схеме одного источника.

Пример: Найти токи в ветвях схемы методом пропорциональных величин. В схеме сопротивления указаны в Омах

Решение: Задаем тока в сопротивление 4 Ом, равным 1 А и подсчитываем токи в остальных ветвях. $U = 1 * 4 = 4$ В $I = 2$ А и т.д. по полученным данным



напряжения между точками m и n равно

$$U_{\min} = 1 * 4 + 3 * 3 + 3 * 4 = 25 \text{ В} \quad \text{т.к.} \quad E = 100 \text{ В}$$

то все токи следует умножить на $K = 100 / 25 = 4$

. Метод контурных токов.

При расчете методом контурных токов полагается, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляются по отношению контурных токов, а токи ветвей определяются через контурные токи.

Метод контурных токов позволяет при составлении системы уравнений для расчета электрических цепей не записывать уравнение по 1-му закону Кирхгофа и тем самым уменьшает общее количество уравнений расчета. Расчет проводится в следующем порядке:

1. Определяются независимые замкнутые контуры и задаются условие положительного направления контурных токов.
2. Число уравнений при расчете по 2-му закону Кирхгофа равно числу контурных токов.
3. Для замкнутых контуров ЭДС источников питания принимаются положительными, если их направления совпадают с направлением контурных токов.

Пример: Дано: $R_{01} = 0,6$ Ом

$R_{02} = 0,3$ Ом

$R_1 = 3$ Ом

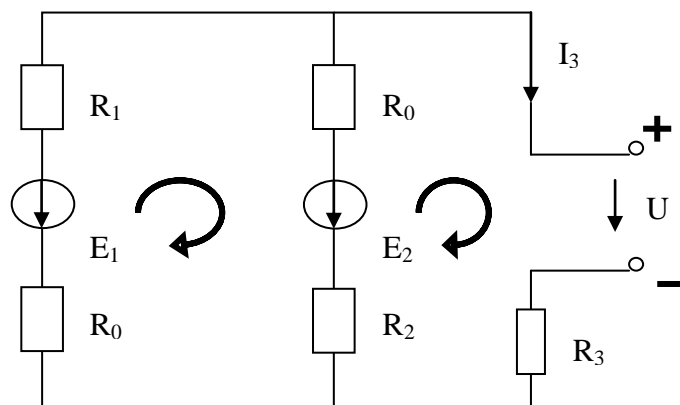
$R_2 = 6$ Ом

$R_3 = 6$ Ом

$E_1 = 30$ В

$E_2 = 30$ В

$U = 36$ В



I_1, I_2, I_3 -?

Составим уравнение для контурных токов:

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = (R_{01} + R_{02} + R_1 + R_2)I_{11} - (R_{02} + R_2)I_{22} \\ -E_2 = (R_{02} + R_2 + R_3)I_{22} - (R_{02} + R_2)I_{11} + U \end{cases}$$

Т.к. $I_1 = I_{11}$ $I_3 = I_{22}$

По первому закону Кирхгофа $I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_2 = I_1 - I_3 = I_{11} - I_{22}$

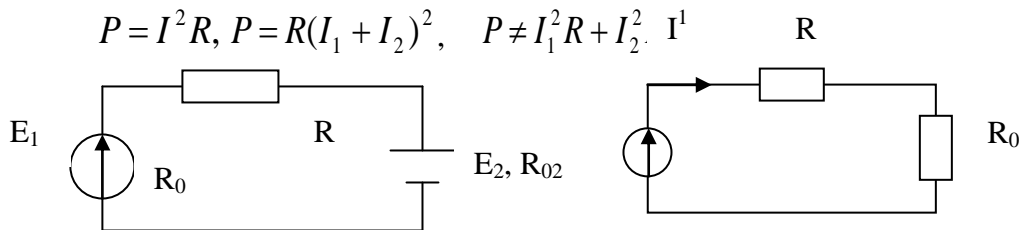
4. Метод наложения

Метод наложения токов (метод суперпозиции) применяется для расчета сложных электрических цепей постоянного тока с несколькими источниками энергии. Наиболее целесообразно применяются этот метода при наиболее большом числе источников. Метод наложения заключается в том, что воздействие нескольких источников питания (ЭДС и напряжений) на электрическую цепь можно рассматривать как результат воздействия на нее каждого из источников независимо из воздействия других источников в схеме. При этом ток каждой ветви определяется как алгебраическая сумма токов, вызываемых в ней действием из источников.

Порядок расчета по методу наложения токов:

1. Рассчитывают токи возникающие от действия каждой из ЭДС, мысленно удаля остальные из схемы.
2. В схеме оставляется внутренние от действия сопротивлений других ЭДС.
3. Токи в ветвях находятся путем алгебраического сложения частичных токов.
4. Методом наложения нельзя пользоваться для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей как сумма мощностей от частичных токов, т.к. мощность является квадратичной функцией тока

$$P = I^2 R, P = R(I_1 + I_2)^2, P \neq I_1^2 R + I_2^2 R$$



Пример:

Дано:

$R = 4 \text{ Ом}$

$E_1 = 36 \text{ В}$

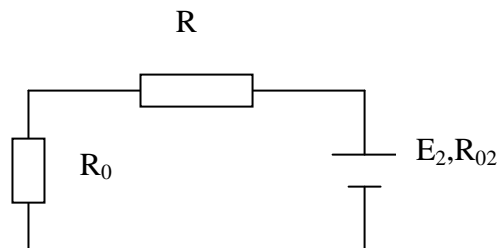
$R_{01} = 0,3 \text{ Ом}$

$E_2 = 12 \text{ В}$

$E_2 = 0$

$R_{02} = 0,01 \text{ Ом}$

I -?



Тема 8: Замещение нескольких параллельных ветвей с источником ЭДС и тока одной эквивалентной ветвью.

План:

1. Понятие о двухполюсниках.
2. Метод эквивалентного генератора (ХХ и КЗ)
3. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке.
4. Передача энергии по линиям передачи.

1. Понятие о двухполюсниках.

В любой электрической схеме, всегда можно мысленно выделить какую-то одну ветвь, а всю остальную часть можно независимо от ее структуры и сложности условно преобразовать некоторым прямоугольником.

А по отношению к выделенной ветви вся схема, обозначенная прямоугольником представляет собой т.н. двухполюсник.

Таким образом, двухполюсник - это обобщенное название схемы, которая двумя выходными зажимами присоединена к выделенной ветви.

Если в двухполюсниках есть источник ЭДС или тока то его называют активным, если нет источника энергии то пассивным. (А,П).

2. Метод эквивалентного генератора (МЭГ).

На практике часто приходится изучать режим работы только одной из ветвей сложной электрической схемы. При этом не следует, производить громоздкий расчет всей схемы, а целесообразно воспользоваться методом эквивалентного генератора.

Согласно методу Э.Г. воздействие всех источников сложной электрической цепи на исследуемую ветвь можно заменить воздействием последовательно включенного с ветвью эквивалентного источника (генератора) ЭДС $E_{\text{ЭКВ}}$, равную напряжению холостого хода $U_{\text{КК}}$ на зажимах разомкнутой исследуемой ветви и внутреннего сопротивления $R_{\text{ЭКВ}}$, равное входному сопротивлению схемы со стороны зажимов исследуемой ветви.

Расчет по методу ЭГ производится в следующем порядке:

1. Произвольно выбирается направление тока в исследуемой ветви
2. Для осуществления режим холостого хода отключают исследуемую ветвь.
3. Определяется напряжение холостого хода $U_{\text{КК}}$ на зажимах разомкнутой ветви.
4. Необходимо определить входное (эквивалентные) сопротивление схемы со стороны зажимов разомкнутой ветви.

5. Ток в исследуемой ветви находят по выражению:
$$I = \frac{U_{\text{КК}} \pm E}{R_{\text{Э}} + R}$$

Здесь R - сопротивление ветви, в которой исследуется ток

$R_{\text{Э}}$ - входное сопротивление схемы со стороны зажимов выделенной ветви.

$U_{\text{КК}}$ - напряжение холостого хода на зажимах разомкнутой выделенной ветви.

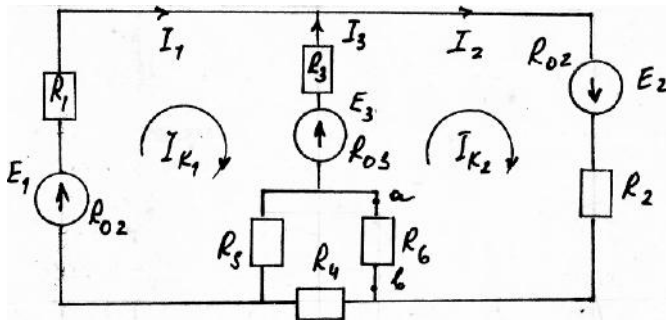
E - ЭДС, находящиеся в исследуемой ветви. Если ветвь не содержит ЭДС, то она применяется равной нулю.

Знаки (+) и (-) выбираются в соответствии с знаком Ома для ветви с источником. При этом если ЭДС совпадает по направлению с током то берется знак (+), в противном случае знак (-).

Рассмотрим применение МЭГ на примере схемы.

1. Определим напряжение холостого хода $U_{ab} = U_{xx}$.

Для этого произвольно выберем положительное направление токов. Удаляем из



схемы резистор R_B и по методу контурных токов составляем систему уравнений;

$$I_{K1} (R_{01} + R_1 + R_{03} + R_3 + R_5) - I_{K2} (R_{03} + R_3 + R_5) = E_4 - E_3$$

$$-I_{K1} (R_{03} + R_3 + R_5) + I_{K2} (R_{03} + R_3 + R_2) = E_2 - E_3$$

С учетом данных

$$24,2 \cdot I_{K1} - 19,2 \cdot I_{K2} = 12$$

$$-19,2 I_{K2} + 24,2 I_{K1} = 34$$

Дано:

$$E_1 = 22B, \quad E_2 = 24B, \quad E_3 = 10 \text{ B}, \quad R_{01} = 0,2 \text{ Ом}, \quad R_{02} = 0 \text{ Ом}, \quad R_{03} = 1,2 \text{ Ом}, \quad R_1 = 20\text{ Ом},$$

$$R_3 = 80\text{ Ом}, \quad R_4 = 40\text{ Ом}, \quad R_5 = 50\text{ Ом}, \quad R_6 = 60\text{ Ом}.$$

Напряжение на разомкнутой верви:

$$U_{abx} = E_3 + I_3 R_3 + E_2 + I_2 R_2 = 41,22B$$

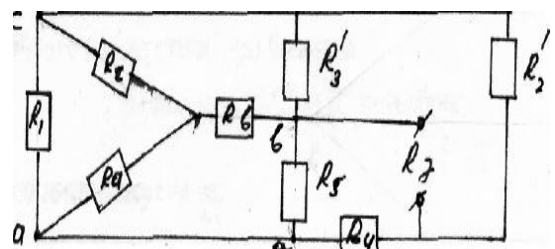
2. Определение эквивалентного входящего сопротивления $R_{ВВХ}$

Упростим схему

$$2,20\text{ Ом} R_1^1 = R_{01} + R_1$$

$$R_2^1 = R_{02} + R_2 = 10\text{ Ом}$$

$$R_3^1 = R_{03} + R_3 = 9,20\text{ Ом}$$



Далее соединение треугольников R_1^1, R_3^1, R_5^1 преобразуем в звезду

$$R_a = \frac{R_{aa} \cdot R_{aa}}{R_{aa} + R_{bb} + R_{cc}} = 1,03 \text{ Ом}$$

$$R_b = 4,3 \text{ Ом}, \quad R_c = 0,95 \text{ Ом}$$

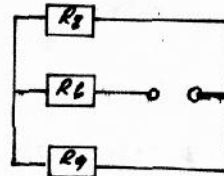
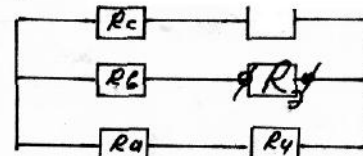
Тогда схема имеет вид

$$\text{Если обозначим } R_c + R_2 = R_8$$

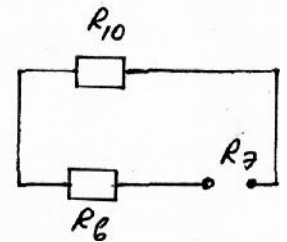
$$R_2 + R_4 = R_9$$

$$R_{10} = \frac{R_8 \cdot R_9}{R_8 + R_9}$$

$$\text{Тогда } R_{\text{ЭЭК}} = R_b + R_{10} = 5,71 \text{ Ом}$$



=>



3. По полученным данным U_{xx} и $R_{\text{ЭЭК}}$ определим ток I:

P.S. Метод эквивалентного генератора находит применение при расчете наименьших цепей постоянного тока с одним наименьшим элементом. Например, широко распространены мостовые схемы измерения неэлектрических величин электрическими методами в которых с помощью нелинейного элемента (преобразователя) включенного в одну диагональ мостовой схемы происходит неэлектрического воздействия в электрический сигнал (ток или напряжение) который фиксируется измерительным прибором.

При подключении АД нагрузки от последнего выделяется мощность

$$P = I^2 R = \frac{U_{xx}^2}{(R + R_{xx})} R$$

Максимальная мощность выделяется при $R = R_{xx} : \left(\frac{dI}{dR} = 0 \right)$

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{xx}^2}{4R_{xx}}$$

$$\text{Полезная мощность } P_{\text{полез}} = U_{xx} \cdot I = \frac{U_{xx}^2}{R_{xx} + R}$$

$$\text{КПД схемы: } \eta = \frac{P}{P_{\text{полез}}} = \frac{R}{R + R_{xx}}$$

P.S. При $R = R_{xx}$ $\eta = 0,5$. Этого недопустимо при больших мощностях. При Д" пренебрег.

4. Передача энергии по линиям передачи.

Схема передачи электрической энергии изображена на рис.

Где U - напряжение генератора в начале линии.

R_2 - нагрузка.

R - сопротивление проводников линии, при больших мощностях (10 МВт)

$$\eta = 0,94 \div 0,97 \quad \eta = \frac{R_2}{R + R_2}$$

Контрольные вопросы:

1. Понятие о двухполюсниках.
2. Метод эквивалентного генератора (ХХ и КЗ)
3. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузки.
4. Передача энергии по линиям передачи.

Тема 9: Электрические цепи переменного тока.

План:

1. Основные понятия и определения.
2. Получение синусоидальной. Д. С.
3. Действующие и средние значения синусоидальных э.д.с., напряжения и тока.

1. Основные понятия и определения.

Широкое применение в электрических цепях Электрарадио других установок находят периодические э.д.с., напряжения и токи. Периодические величины изменяются во времени по значению и направлению, причем эти изменения повторяются через некоторые равные промежутки времени T называемые периодом.

На практике все источники энергии переменного тока (генераторы электростанций) создают э.д.с., изменяющуюся по синусоидальному закону (рис 2.1).

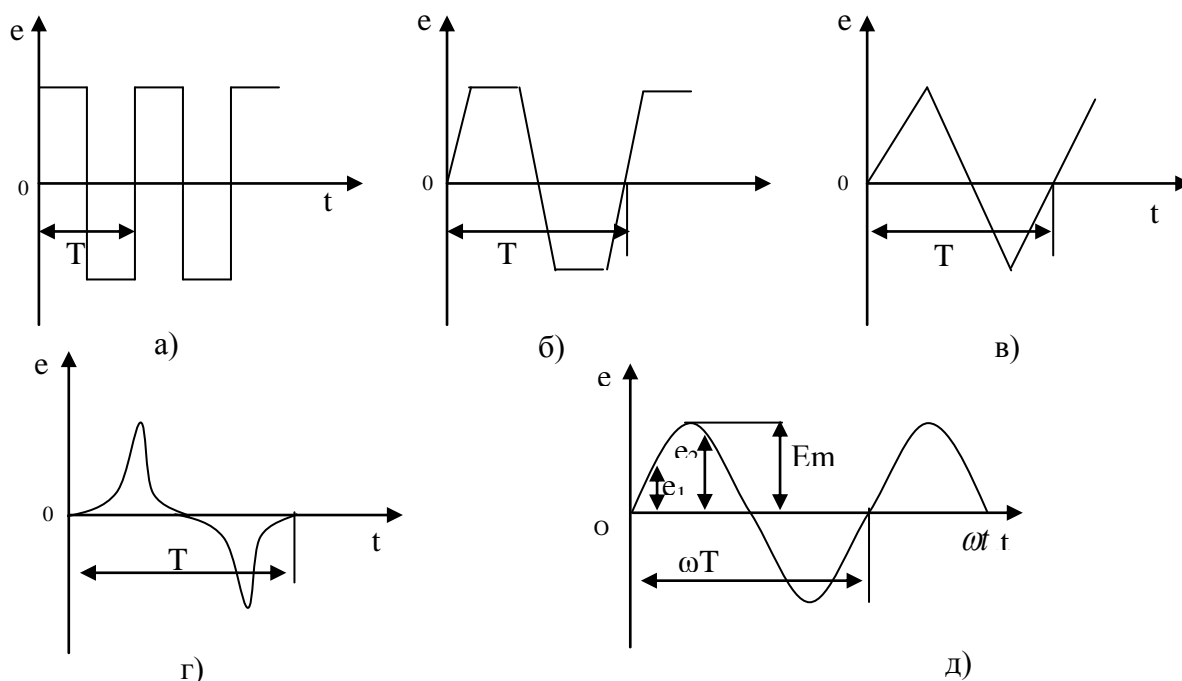


Рис.2.1. Переменные периодические э.д.с. различной формы:

а - прямоугольный; б-трапецеидальной; в – треугольной; г – произвольной;

Осно в том, что в процессе передачи электроэнергии на большие расстояния (сотни и даже тысячи километров) от источника до потребителя при многократной трансформации (изменении) напряжения временная зависимость напряжения остается неизменной, т. е. синусоидальной.

Любая периодическая величина имеет ряд характерных значений. Максимальное значение или амплитуду э.д.с., напряжения и тока обозначают соответственно E_m , U_m , I_m . Значение периодически изменяющейся величины в рассматриваемый момент времени называют мгновение ее значения и обозначают e , u , i – э.д.с., напряжения и ток соответственно, максимальное значение – чистый случай мгновенного значения.

Величина обратная периоду, т.е. число полных изменений периодической величины за 1с, называется частотой.

$$f = \frac{1}{T} \quad \Gamma\zeta = \frac{1}{\text{сек}} \quad (2.1)$$

Во всех энергосистемах СНГ и других европейских стран в качестве стандартной промышленной частоты принята $f=50\text{Гц}$, в США и Японии $f=60\text{Гц}$. Это обеспечивает получение оптимальной частоты вращения электродвигателей переменного тока и отсутствия заметного для глаза мигания осветительных ламп накаливания. Некоторые электротехнические устройства работают при более высокой частоте. Повышенная частота (обычно 175-200 Гц) позволяет снизить вес электродвигателей, применяемых для привода электроинструмента и средств автоматики. В установках сквозного нагрева металлов для горячей штамповки иковки применяют частоту от 300 до 10 000 Гц, а в установках поверхностного нагрева металлов – от 2000 до 1 000 000 Гц. В радиотехнических устройствах применяют частоту от 10^5 до $3 \cdot 10^{10}$ Гц.

Находят применение синусоидальные токи пониженной частоты. Частоту $f=S-10$ Гц применяются в металлургической промышленности. В некоторых странах для электропечи на железных дорогах применяют частоту $16\frac{2}{3}\text{Гц}(\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3})$

2.Получение синусоидальной э. д. с.

Синусоидальная э.д.с. в линейных цепях, где содержатся активные сопротивления, индуктивности и емкости, возбуждает ток, изменяющийся по закону синуса. Возникающие при этом э.д.с. в катушках и напряжения на конденсаторах, как это вытекает из выражений

$$e = -L \frac{di}{dt} \quad i = c \frac{du_c}{dt} \quad \text{также изменяется по закону синуса,}$$

так как производная синусоидальной функции есть функция синусоидальная. Напряжение на сопротивление будет также изменяться по синусоидальному закону так как $u = ir$.

Целесообразность технического использования синусоидального тока обусловлена так, что коэффициент полезного действия генераторов, двигателей, трансформаторов и линий электропередач при синусоидальной форме э.д.с., напряжения и тока получается наивысшим по сравнению с несинусоидальным током. Важную роль играет и тот факт, что расчет цепей, где э.д.с., напряжение и ток изменяются по закону синуса, значительно проще чем расчет цепей, где указанные величины изменяются по несинусоидальному закону.

Рассмотрим механизм возникновения и основные соотношения, характерные для синусоидальной э.д.с.. Для этого удобно использовать простейшую модель – рамку, вращающуюся с постоянной угловой скоростью и в равномерном магнитном поле.

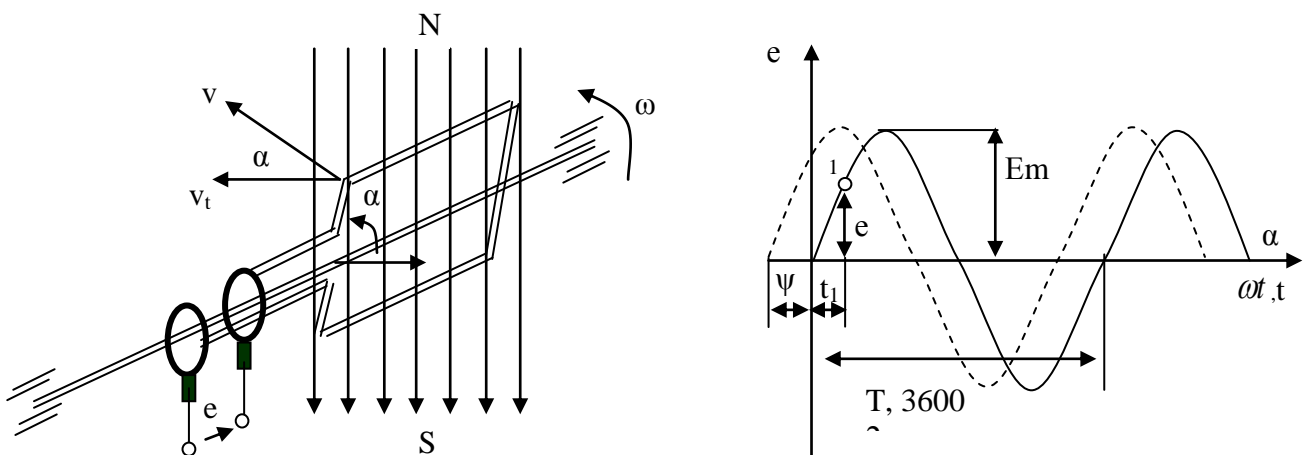


Рис.2.2. Принципиальная схема простейшего генератора синусоидальной э.д.с. (а) временная диаграмма(б)

Проводники рамки, перемещаются в магнитном поле, пересекают его и в них на основании закона электромагнитной индукции возникает электродвижущая сила. Величина э.д.с. пропорциональна магнитной индукции B , длине проводника l .

Скорости перемещения проводника относительно поля V_t .

Выразив скорость V_t через окружную скорость и угол α , получим V

$$e = BlV_t \quad e = BlV \sin \alpha.$$

Коэффициент перед синусом представляет собой наибольшее значение э.д.с., которое возникает в рамке при $\alpha=90^\circ$.

Угол α равен произведению угловой скорости вращения рамки на время t . $\alpha = \omega t$.

Таким образом, э.д.с., возникающая в рамке, будет равна $e = E_m \sin \alpha = E_m \sin \omega t$. (2.2)

За один оборот рамки происходит полный цикл изменения э.д.с.. Если при $t=0$ э.д.с. не равно нулю, то выражение э.д.с. записывается в виде

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2.3)$$

где e - мгновенное значение э.д.с. в любой момент времени;

E_m - максимальное значение э.д.с. или её амплитуда;

$(\omega t + \psi)$ - аргумент синуса или фаза, характеризующая значение э.д.с. в данный момент времени;

ψ - начальная фаза, определяющая значение э.д.с. при $t = 0$.

3. Действующие и средние значения синусоидальных э.д.с., напряжения и тока.

Как постоянный, так и синусоидальный токи используются для совершения какой-либо работы, в процессе которой электроэнергия преобразуется в другие виды энергии.

Для количественной оценки синусоидального тока (э.д.с. и напряжения), который в течении времени непрерывно периодически изменяется, используют значение постоянного тока по совершенной работе. Такое значение будет действующим для синусоидального тока.

Исходя из этого условия, действующим значением синусоидального тока называется такое значение постоянного тока, при прохождении которого в одном и том же резисторе с сопротивлением R за время одного периода T выделяется столько же теплоты, сколько и при прохождении синусоидального тока.

При синусоидальном токе $i = I_m \sin \omega t$ количество теплоты Q выделенное в резисторе R за время T .

$$Q_{\approx} = \int_0^T i^2 R dt,$$

а при постоянном токе

$$Q = RI^2 T \text{ согласно определению, } Q_{\approx} = Q \text{ тогда}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (2.4)$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока является его среднеквадратичным значением.

Чтобы найти соотношение между максимальным и действующим значениями синусоидального тока надо вычислить интеграл в (1).

$$\int_0^T i^2 dt = I_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt = I_m^2 \int_0^T \frac{dt}{2} - I_m^2 \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} dt \quad \text{так как } \int_0^T \cos 2\omega t dt = 0 \text{ получаем}$$

$$\int_0^T i^2 dt = I_m^2 \int_0^T dt = \frac{I_m^2 T}{2} \quad \text{подставляя это выражение в формулу (1) получим}$$

$$I = I_m / \sqrt{2} = 0,707 I_m \quad (2.5)$$

$$\text{Аналогично } E = E_m / \sqrt{2} = 0,707 E_m \quad (2.6)$$

$$U = U_m / \sqrt{2} = 0,707 U_m \quad (2.7)$$

Действующие значения синусоидальных величин в $\sqrt{2}$ раз меньше их амплитудных значений.

В большинстве электроизмерительных приборов, измеряющих ток и напряжение, используется принцип теплового или электродинамического эффекта. Поэтому они всегда показывают действующее значение, зная которое можно вычислить амплитуду. Так например, если вольтметр показывает 220 В синусоидального напряжения, то амплитуда этого напряжения равна $\sqrt{2} * 220 = 311$ В.

Под средним значением синусоидальной величины понимают её среднеарифметическое значение. Если определять среднее значение синусоидальных величин за период, то оно будет равно нулю, так как положительная и отрицательная половина синусоидальных кривых совпадают по форме. Поэтому среднее значение синусоидального тока, э.д.с. и напряжения определяют за полупериода.

За среднее значение синусоидального тока можно принять такое значение постоянного тока, при котором за полпериода переносится такой же электрический заряд, что и при синусоидальном токе.

Согласно этому можно написать

$$I_{cp} \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i dt \quad (2.8),$$

где I_{cp} - среднее значение тока для синусоидального тока $i = I_m \sin \omega t$

$$\int_0^{T/2} i dt = I_m \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{I_m T}{\pi} \quad \text{подставляя это выражение во (2.8) имеем}$$

$$I_{cp} = 2 I_m / \pi = 0,637 I_m$$

$$\text{аналогично } E_{cp} = 2 E_m / \pi = 0,637 E_m \quad (2.9)$$

$$U_{cp} = \frac{2 U_m}{\pi} = 0,637 U_m$$

отношение действующего значения к среднему называется коэффициентом формы периодической кривой. Для синусоидальной кривой коэффициент формы

$$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{I_m \pi}{2 \sqrt{2} I_m} = 1,11$$

Контрольные вопросы:

1. Как получить синусоидальную э. д. с
2. Объясните действующие значения синусоидальных э.д.с., напряжения и токов.
3. Объясните средние значения синусоидальных э.д.с., напряжения и токов.

Тема 10: Электрические цепи однофазного синусоидального тока.

План:

1. Мгновенные значения э.д.с. напряжения и токов.
2. Векторное изображение синусоидальных э.д.с. напряжений и токов

1. Мгновенные значения э.д.с. напряжения и токи.

Синусоидальные э.д.с. напряжения и токи могут быть записаны в виде уравнений.

$$e = E_m \sin \omega t \quad u = U_m \sin \omega t \quad i = I_m \sin \omega t \quad (2.10)$$

В общем случае аргумент синусоидальной функции, называемый фазовым углом или просто фазой, равный $\omega t + \psi = 0$ или $\omega t - \psi = 0$ может отличаться от 0 при $t = 0$. Тогда мгновенное значение можно записать так:

$$e = E_m \sin(\omega t \pm \psi_e) \quad u = U_m \sin(\omega t \pm \psi_u) \quad i = I_m \sin(\omega t \pm \psi_i)$$

значение фазового угла при $t = 0$ называется начальной фазой (ψ_e, ψ_u, ψ_i)

Графическое изображение синусоидальное э.д.с. в прямоугольных координатах было показано ранее. Аналогично этому изображают напряжение и ток, описываемые уравнениями (2.10), когда начальные фазы равны нулю (рис.2.3). В этом случае синусоидальные величины одновременно проходят через нулевые и максимальные значения. О таких величинах говорят, что они совпадают по фазе. Синусоидальные величины будут также совпадать по фазе, если их начальные фазы равны.

Если две синусоидальные величины одновременно проходят через нулевые значения и одновременно принимают максимальные значения противоположных знаков, то такие величины находятся в противофазе или сдвинуты по фазе на угол π (рис.2.4).

На практике чаще всего имеют место случаи, когда э.д.с. напряжения и тока не совпадают по фазе, т.е. через нулевые значения проходят не одновременно (рис.2.5)

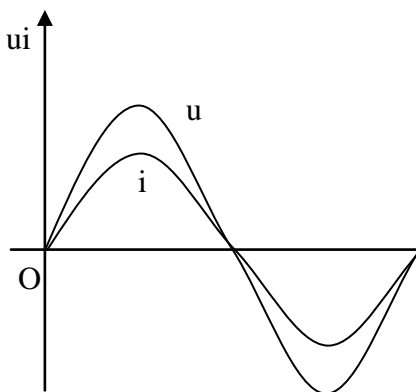


Рис.2.3. Синусоидальные напряжение и ток, совпадающие по фазе

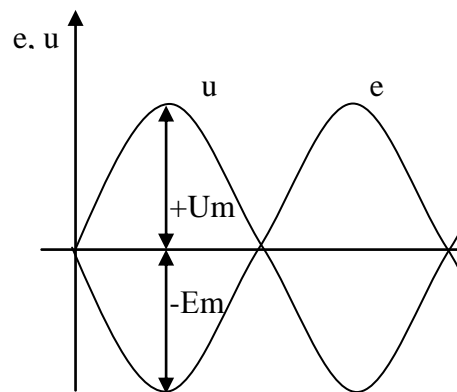


Рис.2.4. Синусоидальные напряжение и ток, находящиеся в противофазе

Если такие э.д.с. описываются уравнениями

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_{e_1}); \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_{e_2}),$$

то при $\psi_{e_2} > \psi_{e_1}$ э.д.с. e_2 опережает по фазе э.д.с. e_1 или э.д.с. e_1 отстает по фазе от э.д.с.

e_2 . Разность фазовых углов

$$\psi_e = \psi_{e_2} - \psi_{e_1} \quad (2.11)$$

называют разностью или сдвигом фаз.

С помощью графического изображения в прямоугольных координатах можно находить опережающую и отстающую синусоидальные величины. При этом пользуются таким правилом. Отстает по фазе та из двух синусоидальных величин, которая при переходе от отрицательных значений к положительным позже (правее) пересекает ось абсцисс. На рис.2.5 э.д.с. e_1 отстает по фазе от э.д.с. e_2 . Фазовый угол, определяемый отрезком оси абсцисс, заключенными между точками пересечения ее синусоидальными кривыми является углом сдвига по фазе (угол ψ_e).

Таким образом, можно сделать вывод: если синусоидальная величина при переходе от отрицательных значений к положительным пересекает ось абсцисс левее оси ординат, то она имеет положительную начальную фазу, а если правее – то отрицательную. Изображения на рис.2.6 э.д.с. описываются уравнениями

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_{e_1})$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t - \psi_{e_2}).$$

Особое значение в электротехнике и электроэнергетике имеет угол сдвига по фазе ϕ между напряжением и током.

$$\phi = \psi_u - \psi_i$$

где ψ_u и ψ_i – начальные фазы напряжения и тока.

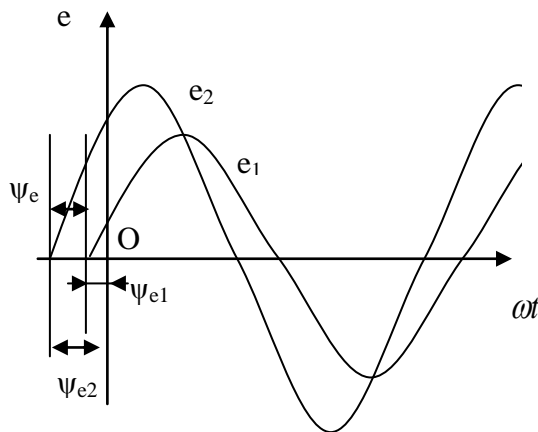


Рис.2.5. Синусоидальные э.д.с. не совпадающие по фазе с начальными фазами

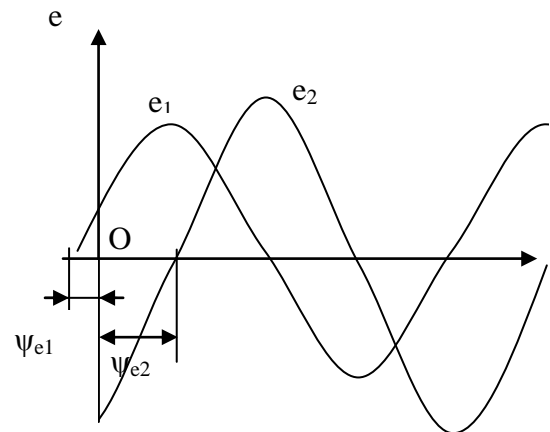


Рис.2.6. Синусоидальные э.д.с. с положительной и отрицательной

$\psi_i = \psi_u - \phi$, то напряжение и ток будут описываться формулами

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); i = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \phi).$$

Если $\psi_u = 0$, то

$$u = U_m \sin \omega t = I_m \sin(\omega t - \phi).$$

Эти уравнения показывают, что если угол ϕ положительный, то ток отстает по фазе от напряжения на этот угол (рис.2.7), и наоборот

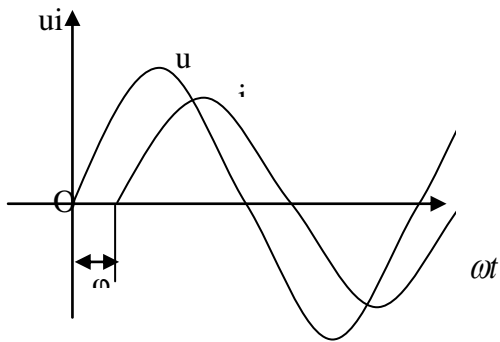


Рис.2.7. Синусоидальные напряжение и ток, сдвинутые по

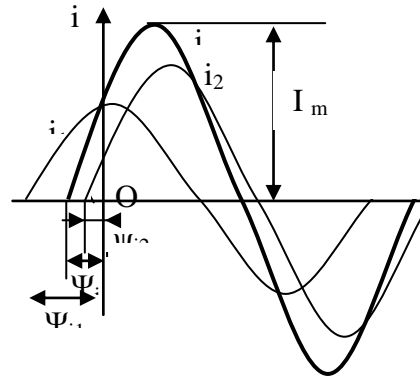


Рис.2.8. Графические сложение синусоидальных токов

При сложении синусоидальных величин, изображенных в прямоугольных координатах, надо сложить ординаты для ряда значений угла ωt и по точкам построить синусоиду суммарной величины. Чем больше точек берут для построения, тем точнее сложение. На рис.2.8 показано сложение двух токов i_1 и i_2 . суммарный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i - \phi)$, причем $I_m \neq I_{1m} + I_{2m}$, $\psi_i = \psi_{i2} - \psi_{i1}$.

2. Векторное изображение синусоидальных э.д.с. напряжений и токов.

Графическое построение синусоидальных величин в прямоугольных координатах является довольно трудоемкой операцией.

В плоскости с осями координат OX и OY (рис.2.9 а) рассмотрим вращающийся с постоянной скоростью, равной угловой частоте ω , вектор OA , длина которого равна амплитуде синусоидальной э.д.с. $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$, т.е. $|OA| = E_m$

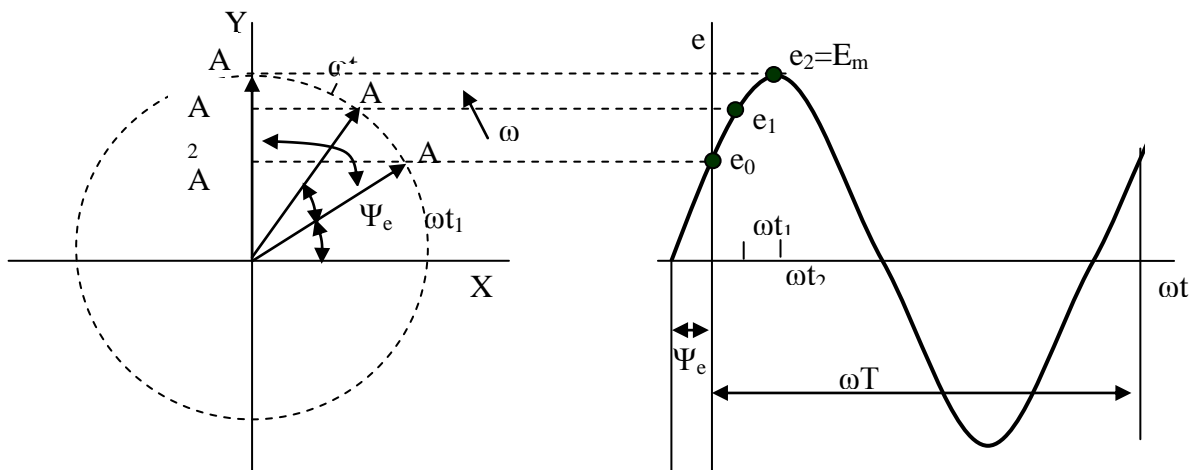


Рис.2.9. Векторное изображение синусоидальных э.д.с.:
а-вращающийся вектор; б- кривая изменения его проекции на ось OY

Проекция на ось OY вектора вращающегося с постоянной скоростью ω и имеющего длину, равную амплитуде э.д.с., изменяется по синусоидальному закону, т.е. представляют собой мгновение значения синусоидальной э.д.с. следовательно, справедливо и обратное: любую синусоидально изменяющуюся во времени величину можно изображать вращающимся вектором, длина которого равна амплитуде, а угловая

скорость вращения – угловой частоте этой синусоидальной величины. Начальное положение вращающегося вектора определяется углом, равным начальной фазе синусоидальной величины и откладываемым от положительного направления оси OX в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Векторами можно изображать синусоидальные э.д.с. напряжения, потенциалы и токи. Так как все э.д.с. напряжения и токи имеют одинаковую частоту, то изображающие их векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью. Их взаимное положение на плоскости остается постоянным. Поэтому векторы на практике не вращают, а строят их, соблюдая углы сдвига фаз.

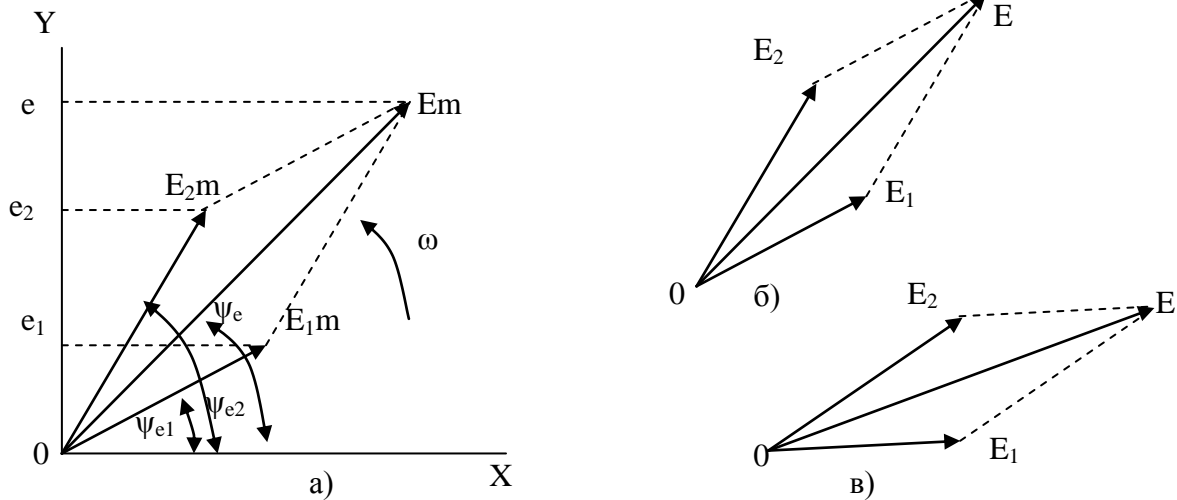


Рис.2.10. Геометрическое сложение вращающихся векторов:

а - максимальных значений э.д.с.; б - действующих значений э.д.с. при произвольном расположении векторов; в - действующих значений э.д.с. при расположении начального вектора E_1 по горизонтальной линии

Сумму двух э.д.с., имеющих разные амплитуды и начальные фазы:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_{e_1}) \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_{e_2}) \quad (\text{рис.2})$$

мгновенное значение суммарной э.д.с. $e = e_1 + e_2 \quad e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

Так как слагаемые э.д.с. имеют одинаковую частоту ω , то такую же частоту будет иметь и суммарная э.д.с.

Если несколько векторов, э.д.с. напряжений и токов, построенных с учетом их правильного взаимного расположения на плоскости, является изображением э.д.с., напряжений и токов, действующих в какой-то электрической цепи, то такая совокупность векторов называется векторной диаграммой.

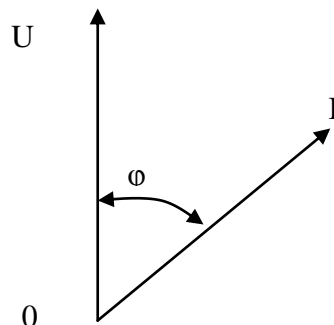


Рис.2.11. Векторная диаграмма простейшей электрической цепи

Для простейшей электрической цепи, состоящей из одного элемента, на запись которой действует напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и ток в котором $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \psi)$ остается по фазе на угол ψ от напряжения, векторная диаграмма имеет вид, представленный на рис.5.

Начальные фазы напряжения ψ_u и тока ψ_i на векторной диаграмме никак не изображаются, так как взаимное положение векторов полностью определяется разностью фаз $\psi = \psi_u - \psi_i$.

Контрольные вопросы:

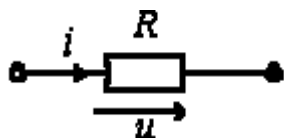
1. Что такое мгновенное значение э.д.с. напряжения и тока.
2. Объясните векторное изображение синусоидальных э.д.с. напряжений и токов.
3. Объясните векторное изображение синусоидальных напряжений и токов.

Тема 11: Последовательное соединение R,L,C в цепи переменного тока

План:

1. Резистор.
2. Конденсатор.
3. Катушка индуктивности.
4. Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов
5. Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

1. Резистор



Идеальный резистивный элемент не обладает ни индуктивностью, ни емкостью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$ (см. рис. 1), то ток i через него будет равен

Рис.1

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \Psi) = I_m \sin(\omega t + \Psi) \quad (1)$$

Соотношение (1) показывает, что ток имеет ту же начальную фазу, что и напряжение. Таким образом, если на входе двухлучевого осциллографа подать сигналы u и i , то соответствующие им синусоиды на его экране будут проходить (см. рис. 2) через нуль одновременно, т.е. на резисторе напряжение и ток совпадают по фазе.

Из (1) вытекает:

$$U_m = RI_m; \quad U = RI$$

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им комплексам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{U} = Ue^{j\Psi};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{I} = Ie^{j\Psi},$$

- разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\Psi}}{Ie^{j\Psi}} = \frac{U}{I} = R$$

или

$$\dot{U} = R\dot{I} \quad (2)$$

Полученный результат показывает, что отношение двух комплексов есть вещественная константа. Следовательно, соответствующие им векторы напряжения и тока (см. рис. 3) совпадают по направлению.

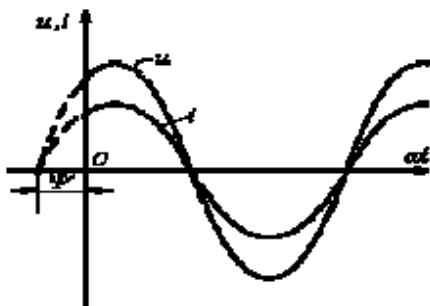


Рис.2

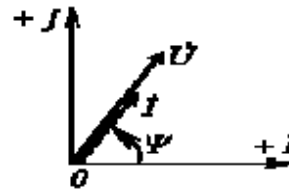


Рис.3

2. Конденсатор

Идеальный емкостный элемент не обладает ни активным сопротивлением (проводимостью), ни индуктивностью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$ (см. рис. 4), то ток i через него будет равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu) = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

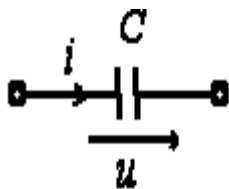


Рис.4

Полученный результат показывает, что напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на $\pi/2$. Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы u и i , то на его экране будет иметь место картинка, соответствующая рис. 5.

Из (3) вытекает:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m \quad ; \quad U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I$$

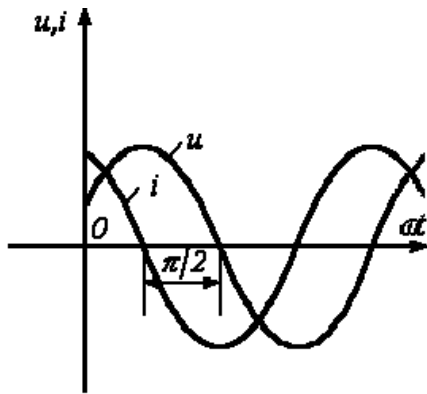


Рис.5

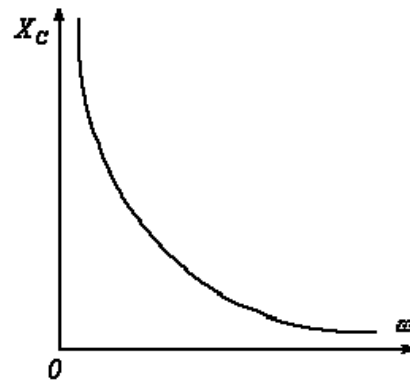


Рис.6

Введенный параметр $X_C = 1/(\omega C)$ называют реактивным емкостным сопротивлением конденсатора. Как и резистивное

сопротивление, X_C имеет размерность Ом. Однако в отличие от R данный параметр является функцией частоты, что иллюстрирует рис. 6. Из рис. 6 вытекает, что при $f = 0$ конденсатор представляет разрыв для тока, а при $f \rightarrow \infty$ $X_C = 0$.

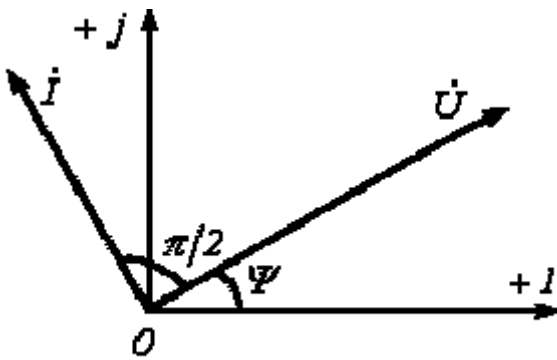


Рис.7

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им

комплексам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{U} = U e^{j\Psi};$$

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{I} = I e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

- разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_C = \underline{Z}_C$$

или

$$\dot{U} = -jX_C \dot{I} = \underline{Z}_C \dot{I} \quad (4)$$

В последнем соотношении $\underline{Z}_C = -jX_C$ - комплексное сопротивление конденсатора.

Умножение на $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой

стрелке. Следовательно, уравнению (4) соответствует векторная диаграмма, представленная на рис. 7.

3. Катушка индуктивности

Идеальный индуктивный элемент не обладает ни активным сопротивлением, ни емкостью. Пусть протекающий через него ток (см. рис. 8) определяется выражением $i = I_m \sin(\omega t + \Psi)$. Тогда для напряжения на зажимах катушки индуктивности можно записать

$$u = -e = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

Полученный результат показывает, что напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на $\pi/2$. Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы u и i , то на его экране (идеальный индуктивный элемент) будет иметь место картинка, соответствующая рис. 9.

Из (5) вытекает:

$$U_m = \omega LI_m = X_L I_m; U = \omega LI = X_L I$$

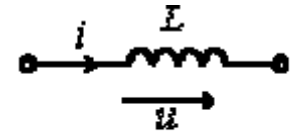


Рис.8

Введенный параметр $X_L = \omega L$ называют реактивным индуктивным сопротивлением катушки; его размерность – Ом. Как и у емкостного элемента этот параметр является функцией частоты. Однако в данном случае эта зависимость имеет линейный характер, что иллюстрирует рис. 10. Из рис. 10 вытекает, что при $f = 0$ катушка индуктивности не оказывает сопротивления протекающему через него току, и при $f \rightarrow \infty$ $X_L \rightarrow \infty$.

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим комплексам:

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{U} = U e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{I} = I e^{j\Psi}$$

разделим первый из них на второй:

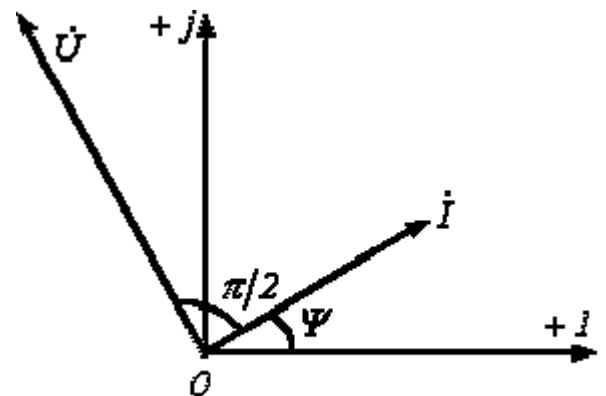


Рис.11

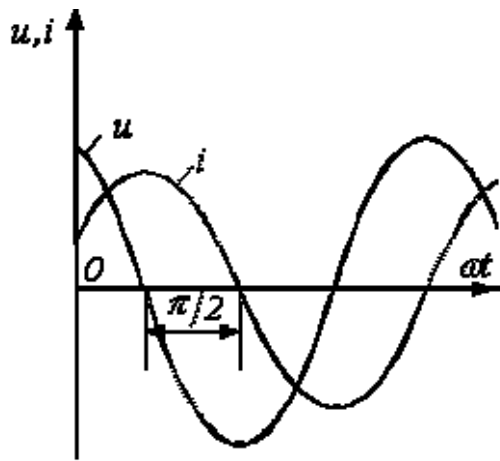


Рис.9

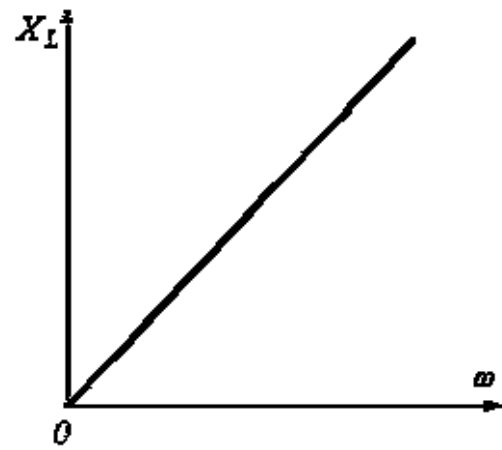


Рис.10

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j(\Psi + \frac{\pi}{2})}}{Ie^{j\Psi}} = \frac{Ue^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}}{Ie^{j\Psi}} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L = \underline{Z}_L$$

или

$$\dot{U} = jX_L \dot{I} = \underline{Z}_L \dot{I} \quad (6)$$

В полученном соотношении $\underline{Z}_L = jX_L$ - комплексное

сопротивление катушки индуктивности. Умножение на $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Следовательно, уравнению (6) соответствует векторная диаграмма, представленная на рис. 11

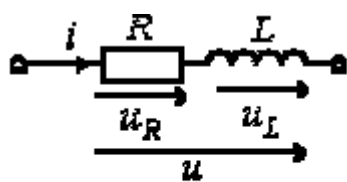


Рис.12

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_L = RI_m \sin(\omega t + \varphi) + \omega LI_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \arctg \frac{\omega L}{R}\right) = \\ &= U_m \sin(\omega t + \varphi + \Psi), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$U_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m = ZI_m; \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \Psi = \arctg \frac{\omega L}{R}, \text{ причем пределы}$$

$$\text{изменения } \Psi: \quad 0 < \Psi < \frac{\pi}{2}.$$

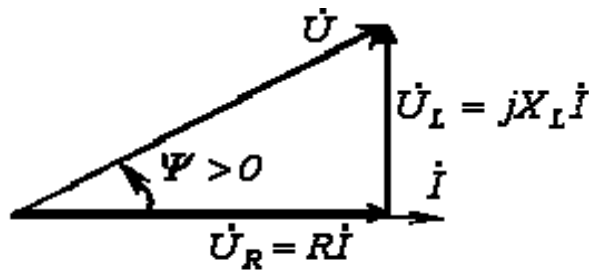


Рис.13

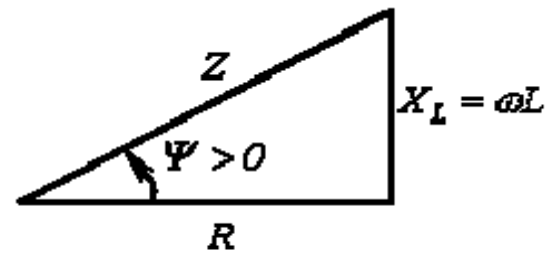


Рис.14

которому, в свою очередь, соответствует векторная диаграмма на рис. 13. Векторы на рис. 13 образуют фигуру, называемую треугольником напряжений. Аналогично выражение

$$\underline{Z} = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} e^{j\Psi} = Ze^{j\Psi}$$

графически может быть представлено треугольником сопротивлений (см. рис. 14), который подобен треугольнику напряжений.

4. Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

Опуская промежуточные выкладки, с использованием соотношений (2) и (4) для ветви на рис. 15 можно записать

где

$$\underline{Z} = R - jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\Psi} = \underline{Z} e^{j\Psi}; \Psi = -\arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega CR}, \text{ причем}$$

$$\Psi : -\frac{\pi}{2} < \Psi < 0$$

пределы изменения

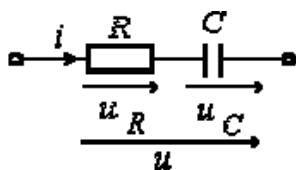


Рис.15

. Последовательное соединение резистивного и индуктивного элем

Пусть в ветви на рис. 12 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. Тогда

$$U = U_R + U_C = RI_m \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) =$$

$$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega C^2}} * I_m \sin(\omega t + \varphi - \arctg \frac{1}{\omega C}) =$$

$$= U_m \sin(\omega t + \varphi + \psi)$$

где

$$U_m = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega C}^2} * I_m = Z I_m;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega C}^2};$$

$$\Psi = \arctg \frac{1}{\omega C}$$

$$\Psi : 0 < \Psi < \frac{\pi}{2}.$$

причем пределы изменения

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R\dot{I} + jX_L\dot{I} = (R + jX_L)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I},$$

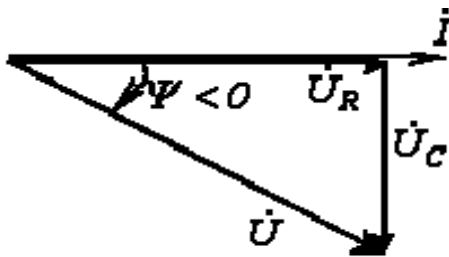


Рис.16

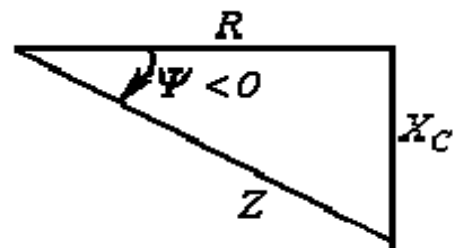


Рис.17

$$U_C = jX_C I$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

На основании уравнения (7) могут быть построены треугольники напряжений (см. рис. 16) и сопротивлений (см. рис. 17), которые являются подобными.

Контрольные вопросы:

1. Что такое резистор?
2. Что такое конденсатор?
5. Катушка индуктивности из чего делается?

Тема 12: Параллельное соединение RLC в цепи переменного синусоидального тока.

План:

1. Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов
2. Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов.

1. Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов

Для цепи на рис. 18 имеют место соотношения:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = R\dot{I} - jX_C\dot{I} = (R - jX_C)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I} \quad (8)$$

$$U = U_R = U_C;$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU,$$

где $g = \frac{1}{R}$ [См] – активная проводимость;

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = b_C U, \quad b_C = \frac{1}{X_C}$$

[См] – реактивная проводимость конденсатора.

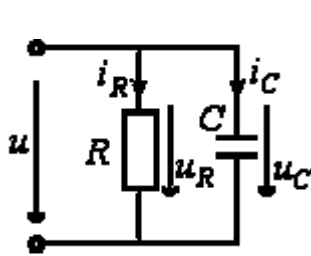


Рис.18

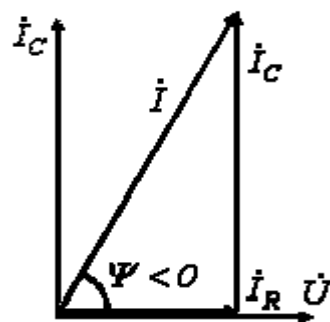
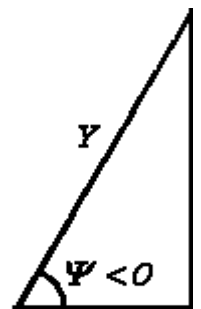


Рис.19



g

Рис.20

Векторная диаграмма токов для данной цепи, называемая **треугольником токов**, приведена на рис. 19. Ей соответствует уравнение в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = g\dot{U} + jb_C\dot{U} = (g + jb_C)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi}$$

где $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$;

$$\underline{Y} = g + jb_C = \frac{1}{R} + j\omega C = Ye^{-j\Psi} \quad \text{- комплексная проводимость;}$$

$$\Psi = -\arctg \frac{b_C}{g} = -\arctg \omega CR$$

Треугольник проводимостей, подобный треугольнику токов, приведен на рис. 20. Для комплексного сопротивления цепи на рис. 18 можно записать:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g + jb_C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C}} = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

Необходимо отметить, что полученный результат аналогичен известному из курса физики выражению для эквивалентного сопротивления двух параллельно соединенных резисторов.

2. Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

Для цепи на рис. 21 можно записать

$$U = U_R = U_L ;$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU ,$$

где $g = \frac{1}{R}$ [См] – активная проводимость;

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} = b_L U ,$$

где $b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$ [См] – реактивная проводимость катушки индуктивности.

Векторной диаграмме токов (рис. 22) для данной цепи соответствует уравнение в комплексной форме $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = g\dot{U} - jb_L\dot{U} = (g - jb_L)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi}$,

где $I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$;

$$\underline{Y} = g - jb_L = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} = Ye^{-j\Psi} \quad \text{- комплексная проводимость;}$$

$$\Psi = \arctg \frac{b_L}{g} = \arctg \frac{R}{\omega L}$$

Треугольник проводимостей, подобный треугольнику токов, приведен на рис.23.

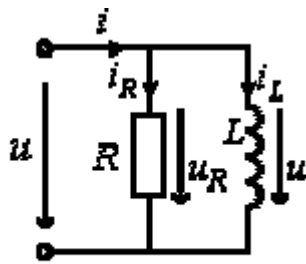


Рис.21

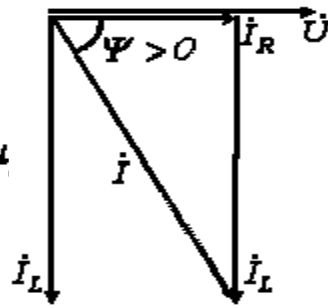


Рис.22

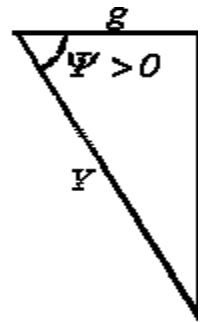


Рис.23

Выражение комплексного сопротивления цепи на рис. 21 имеет вид:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g - jb_L} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L}} = \frac{RjX_L}{R + jX_L}$$

Контрольные вопросы и задачи:

1. В чем сущность реактивных сопротивлений?
2. Какой из элементов: резистор, катушка индуктивности или конденсатор – можно использовать в качестве шунта для наблюдения за формой тока?
3. Почему катушки индуктивности и конденсаторы не используются в цепях постоянного тока?

4. В ветви на рис. 12 $R = 10 \text{ Ом}; L = 0,03 \text{ Гн}$. Определить комплексное сопротивление ветви, если частота тока $f = 50 \text{ Гц}$.

Ответ: $\underline{Z} = 13,74 e^{j43,29^\circ} \text{ Ом}$.

5. В ветви на рис. 15 $R = 100 \text{ Ом}; C = 30 \text{ мкФ}$. Определить комплексное сопротивление ветви, если частота тока $f = 50 \text{ Гц}$.

Ответ: $\underline{Z} = 145,84 e^{-j46,71^\circ} \text{ Ом}$.

6. В цепи на рис. 18 $R = 20 \text{ Ом}; C = 100 \text{ мкФ}$. Определить комплексные проводимость и сопротивление цепи для $f = 50 \text{ Гц}$.

Ответ: $\underline{Y} = 0,059 e^{j32,13^\circ} \text{ См}; \underline{Z} = 16,95 e^{-j32,13^\circ} \text{ Ом}$.

7. Протекающий через катушку индуктивности $L = 1 \text{ Гн}$ ток изменяется по закону $i = 141 \sin(314t - 45^\circ) \text{ А}$. Определить комплекс действующего значения напряжения на катушке.

Ответ: $\underline{U} = 31400 e^{j45^\circ} \text{ В}$.

Тема 13: Явление резонанса в цепи переменного тока.

План:

1. Неразветвленная электрическая цепь синусоидального тока с активно-реактивными сопротивлениями.
2. Резонанс напряжений.

1. Неразветвленная электрическая цепь синусоидального тока с активно-реактивными сопротивлениями.

В неразветвленной электрической цепи переменного тока, содержащей элементы с параметрами: активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C (рис.1), напряжение питающей сети равно векторной сумме напряжений, действующих на участках цепи.

В соответствии с этим выражением для напряжения, подводимого к электрической цепи (рис.1), может быть записано по второму закону Кирхгофа в комплексной (векторной) форме

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C,$$

где $\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}$, $\dot{U}_L = jX_L \cdot \dot{I}$, $\dot{U}_C = -jX_C \cdot \dot{I}$ – комплексные напряжения на участках цепи.

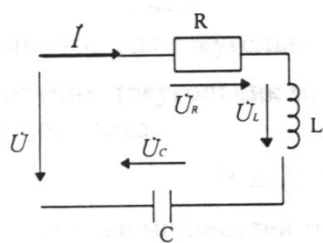


Рис.1

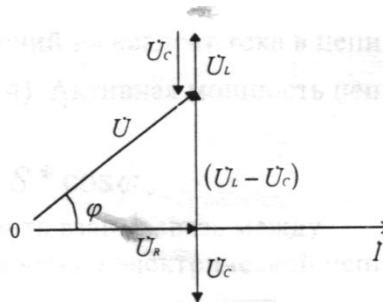


Рис.2

По уравнению для комплексного напряжения можно построить векторную диаграмму тока и напряжений электрической цепи.

Вектор напряжения \dot{U}_R на активном сопротивлении при этом совпадает с вектором тока \dot{I} . Угол φ – угол между векторами тока и напряжения, подводимого к цепи.

Построенная таким образом диаграмма для электрической цепи представлена на рис. 2. Полученное ранее уравнение для подводимого к электрической цепи комплексного напряжения с учетом его составляющих преобразуется к виду

$$U = R \cdot I + jX_L \cdot I - jX_C \cdot I = [R + j(X_L - X_C)] \cdot \dot{I} = \dot{Z} \cdot \dot{I},$$

или к виду уравнения, записанного в комплексной форме по закону Ома для всей цепи

$$\dot{I} = \dot{U} / \dot{Z},$$

где $\dot{Z} = R + j(X_L - X_C)$ – комплексное сопротивление электрической цепи переменного тока.

Модуль комплексного сопротивления (полное сопротивление) цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Из треугольника напряжений (рис.2) можно получить треугольник сопротивлений (рис.3), разделив стороны этого треугольника на комплексный ток \dot{I} , из которого следует, что

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{X_L - X_C}{Z}.$$

Полученные выражения показывают, что угол сдвига фаз между током и напряжением питающей сети зависит от характера сопротивлений, включенных в цепь переменного тока.

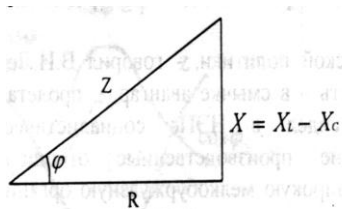


Рис.3

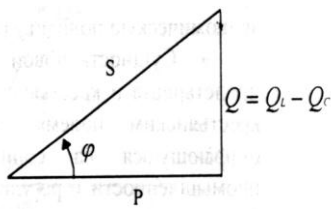


Рис.4

Умножив стороны треугольника сопротивлений на квадрат тока в цепи, получим треугольник

мощностей(рис.4). Активная мощность цепи переменного тока

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi.$$

Из треугольника мощностей можно установить взаимосвязь между активной P , полной S и реактивной Q мощностями электрической цепи:

$$P = S \cos \varphi, Q = S \sin \varphi, S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

2.Резонанс напряжений

В неразветвленной электрической цепи переменного тока при определенных условиях может наступить резонанс напряжений, при котором разность фаз напряжения и тока на входе цепи равна нулю. В простейшем случае резонанс напряжений может быть получен в электрической цепи переменного тока при последовательном включении катушки индуктивности и конденсаторов. При этом, изменяя емкость конденсаторов при постоянных параметрах катушки, получают резонанс напряжений. При изменении емкости C конденсаторов происходит изменение емкостного сопротивления. При этом полное сопротивление цепи также изменяется, следовательно, изменяются ток, коэффициент мощности, напряжения на катушке индуктивности, конденсаторах и активном сопротивлении катушки и активная, реактивная и полная мощности электрической цепи. Зависимость тока, коэффициента мощности и полного сопротивления цепи переменного тока в функции емкостного сопротивления (резонансные кривые) для рассматриваемой цепи приведены на рис.5.

Векторная диаграмма тока и напряжений этой цепи при резонансе представлена на рис.6.

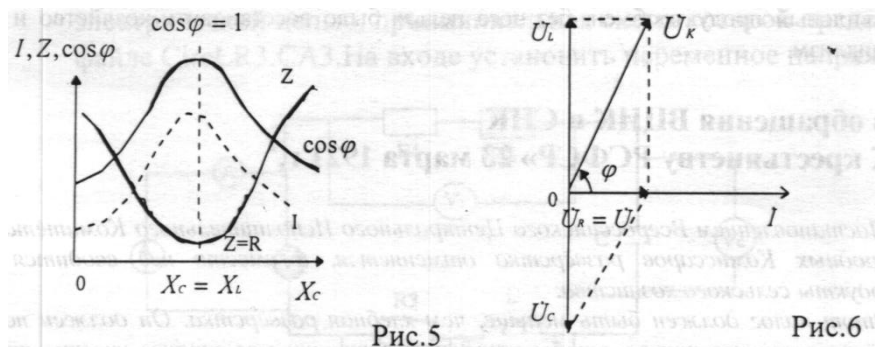


Рис.5

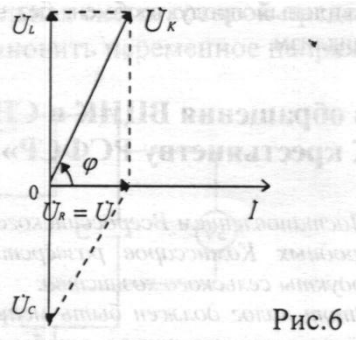


Рис.6

Резонанс напряжений характеризуется рядом существенных факторов.

1. При резонансе напряжений полное сопротивление электрической цепи переменного тока принимает минимальное значение и оказывается равным ее активному сопротивлению.

2. При неизменном напряжении питающей сети при резонансе напряжений ток в цепи достигает наибольшего значения.

3. Коэффициент мощности при резонансе равен единице. Это означает, что вектор тока и

вектор напряжения сети при этом совпадают по направлению.

4. Активная мощность при резонансе имеет наибольшее значение равное полной мощности, в то же время реактивная мощность цепи оказывается равной нулю.

5. Напряжения на емкости и индуктивности оказываются равными и могут принимать большие значения.

6. Напряжение на активном сопротивлении оказывается равным напряжению питающей сети.

Резонанс напряжений в промышленных электротехнических установках нежелательное и опасное явление, так как оно может привести к аварии вследствие перегрева отдельных элементов электрической цепи или к пробое изоляции обмоток электрических машин и аппаратов. В то же время резонанс напряжений в цепях переменного тока широко используется в радиотехнике и электронике в различных рода приборах и устройствах, основанных на резонансном явлении.

Контрольные вопросы:

1. Что такое резонанс напряжений?
2. Чем опасен резонанс напряжений?

Тема 14 :Явление резонанса в цепи переменного тока

План:

1. Разветвленная электрическая цепь синусоидального тока с активно-реактивными сопротивлениями.
2. Резонанс токов.

1.Разветвленная электрическая цепь синусоидального тока с активно-реактивными сопротивлениями.

В электрических цепях переменного тока имеются цепи с параллельным соединением потребителей электроэнергии, при котором все потребители находятся под одним и тем же напряжением. При этом на ток в цепи каждого из потребителей не влияет их число. Значение тока в каждом из них определяется только значениями соответствующих сопротивлений и значением подводимого напряжения. Сопротивления в цепях переменного тока обычно носят комплексный характер. При этом каждое из них в общем случае можно представить в виде последовательно соединенных между собой сопротивлений R , X_L и X_C .

Примером электрической цепи переменного тока с параллельным соединением сопротивлений может служить цепь, представленная на рис. 1. Рассматривая

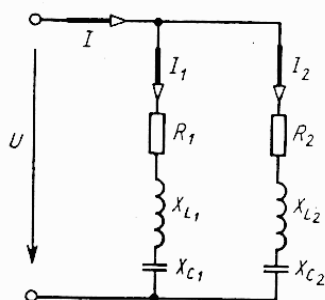


Рис. 1

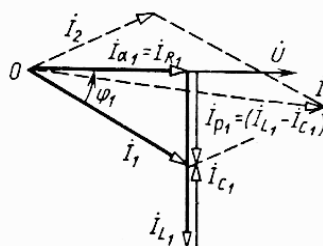


Рис. 2

отдельные параллельные ветви этой цепи как независимые электрические цепи, для каждой из них можно построить векторную диаграмму, исходя из предположения, что X_C и $X_{L2} < X_{C2}$ (рис.2), так как при активно-индуктивном характере сопротивления вектор тока \dot{I}_1 отстает по фазе от вектора напряжения \dot{U} на угол ϕ_1 , а при активно-емкостном вектор тока \dot{I}_2 опережает его на угол ϕ_2 .

Ток I_1 может быть разложен на активную $I_{a1} = I_{R1}$ и реактивную I_{p1} составляющие. С учетом того, что $\cos\phi_1 = R_1 / Z_1$ $\sin\phi_1 = (X_{L1} - X_{C1}) / Z_1$ и $I_1 = U / Z_1$ из векторной диаграммы рис. 4.2 находим:

$$I_{a1} = I_1 \cos\phi_1 = \frac{U}{Z_1} \frac{R_1}{Z_1} = U \frac{R_1}{Z_1^2} = U G_1,$$

где $G_1 = R_1 / Z_1^2$ - активная проводимость соответствующей ветви электрической цепи.

Принимая во внимание, что в данном случае векторная сумма реактивных составляющих токов в ветви равна алгебраической сумме, имеем

$$I_{p1} = I_{L1} - I_{C1} = I_1 \sin \varphi_1 = \frac{U}{Z_1} \frac{(X_{L1} - X_{C1})}{Z_1} = U \frac{(X_{L1} - X_{C1})}{Z_1^2} = UB_1,$$

где I_{L1}, I_{C1} - реактивная индуктивная и реактивная емкостная составляющие тока I_1 ; Z_1 - полное сопротивление соответствующей ветви цепи переменного тока.

При этом $I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{p1}^2} = U/Z_1 = U(1/Z_1) = UY_1$. Таким образом, активную составляющую тока в рассматриваемой ветви электрической цепи можно представить в виде произведения напряжения на активную проводимость ветви, реактивную составляющую тока — в виде произведения напряжения на реактивную проводимость ветви, а ток в рассматриваемой ветви равен напряжению, действующему на зажимах цепи, помноженному на ее полную проводимость.

Для электрической цепи с параллельным соединением сопротивлений, в соответствии с первым законом Кирхгофа для точки разветвления, общий ток I в неразветвленном участке цепи может быть определен как векторная сумма токов в отдельных параллельных ветвях. Этот ток может быть представлен в виде векторной суммы:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2,$$

где \dot{I}_1 и \dot{I}_2 - комплексные токи в соответствующих параллельных ветвях электрической цепи.

В простейших электрических цепях переменного тока с одним источником питания токи в отдельных параллельных ветвях могут быть определены согласно закону Ома для соответствующих участков цепи:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}/\underline{Z}_1 = \underline{Y}_1 \dot{U},$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}/\underline{Z}_2 = \underline{Y}_2 \dot{U},$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j(X_{L2} - X_{C2})$ - комплексные сопротивления ветвей, модули которых соответственно равны

$$\underline{Z}_1 = \sqrt{R_1^2 + j(X_{L1} - X_{C1})^2} \text{ и } \underline{Z}_2 = \sqrt{R_2^2 + j(X_{L2} - X_{C2})^2};$$

$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1, \underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$ - комплексные проводимости, определяемые как величины, обратные комплексным сопротивлениям. Для рассматриваемой электрической цепи рис.1 можно получить выражение для общего тока:

$$\dot{I} = \dot{U}/\underline{Z} = \underline{Y} \dot{U},$$

где $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$ - комплексное сопротивление всей цепи, R, X_L, X_C - активное, реактивное индуктивное и реактивное емкостное сопротивления цепи; $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ - комплексная проводимость цепи.

С учетом этого выражение для токов можно записать в другом виде:

$$\dot{U}/\underline{Z} = \dot{U}/\underline{Z}_1 + \dot{U}/\underline{Z}_2,$$

$$\text{или } \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2.$$

Из этого выражения следует, что комплексная проводимость электрической цепи при параллельном соединении сопротивлений, оказывается равной сумме комплексных проводимостей соответствующих параллельных ветвей. Выражение для комплексной

проводимости каждой из параллельных ветвей получается путем умножения числителя и знаменателя соответствующей проводимости на сопряженное значение комплексного сопротивления. Для первой ветви цепи с активно-индуктивным характером сопротивлений при $X_{L1} > X_{C1}$ она может быть представлена в виде

$$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = 1/[R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})] = [R_1 - j(X_{L1} - X_{C1})]/[R_1^2 + j(X_{L1} - X_{C1})^2] = \\ R_1/Z_1^2 - j(X_{L1} - X_{C1})/Z_1^2 = G_1 - jB_1$$

По аналогии с этим могут быть представлены и выражения для \underline{Y}_2 и \underline{Y} с учетом активно-емкостного характера сопротивления во второй ветви цепи при $X_{C2} > X_{L2}$ и $X_C < X_L$ (см. рис. 2):

$$\underline{Y}_2 = R_2/Z_2^2 - j(X_{L2} - X_{C2})/Z_2^2 = G_2 - jB_2, \\ \underline{Y} = R/Z^2 - j(X_L - X_C)/Z^2 = G - jB.$$

$$\text{При этом } \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (G_1 + G_2) - j(B_1 - B_2) = G - jB.$$

Отсюда в общем случае для произвольного числа параллельных ветвей активная проводимость электрической цепи при параллельном соединении сопротивлений оказывается равной сумме активных проводимостей всех параллельных ветвей, а реактивная проводимость цепи равной алгебраической сумме реактивных проводимостей всех параллельных ветвей, входящих в данную электрическую цепь.

Модуль полной проводимости цепи определяется из выражения

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + j(B_1 - B_2)^2}.$$

Полная проводимость цепи в то же время является и величиной, обратной ее полному сопротивлению $Y = 1/Z$.

Разделив каждый вектор тока на векторной диаграмме рис.2 на вектор напряжения \underline{U} , можно получить треугольник проводимостей для данной цепи В качестве примера на рис.3 представлен треугольник проводимостей для первой ветви схемы рис.1.

Из треугольника проводимостей следует, что $\cos\varphi_1 = G_1/Y_1$, а $\sin\varphi_1 = B_1/Y_1 = (B_{L1} - B_{C1})/Y_1$. С учетом этого полная, активная и реактивная мощности цепи могут быть определены через соответствующие проводимости:

$$S_1 = UI_1 = U^2 Y_1, P_1 = UI_1 \cos\varphi_1 = U^2 G_1, Q_1 = UI_1 \sin\varphi_1 = U^2 B_1.$$

2.Резонанс токов.

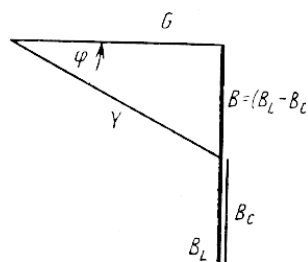


Рис. 3

В электрических цепях переменного тока при параллельном соединении реактивных сопротивлений может возникать резонанс токов. Это происходит в том случае, когда в одних ветвях преобладает реактивное индуктивное сопротивление, а в других - реактивное емкостное сопротивление. Резонанс токов (явление резонанса на участке электрической цепи, содержащей параллельно соединенные индуктивный и емкостный элементы) - особое состояние цепи переменного тока при параллельном соединении сопротивлений, при котором реактивная индуктивная проводимость оказывается равной реактивной емкостной проводимости этой цепи, т. е. при условии, что $B_L = B_C$.

Простейшей электрической цепью, в которой может наблюдаться резонанс токов, является цепь с параллельным соединением катушки индуктивности и конденсатора.

Полная проводимость рассматриваемой цепи

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}.$$

Условие резонанса токов ($B_L = B_C$) можно записать через соответствующие параметры электрической цепи. Так как реактивная проводимость катушки, имеющей активное сопротивление R_K , определяется выражением $B_L = X_L / Z_K^2 = \omega L / (R^2 + \omega^2 L^2)$, а проводимость конденсатора без учета его активного сопротивления ($R_C = 0$)

$$B_C = X_C / Z_C^2 = 1 / X_C = \omega C,$$

то условие резонанса может быть записано в виде $\omega L / (R^2 + \omega^2 L^2) = \omega C$.

Из этого выражения следует, что резонанс токов можно получить при изменении одного из параметров R, L, C и ω при постоянстве других. При некоторых условиях в подобных цепях резонанс может возникать и при одновременном изменении указанных параметров.

Простейшие резонансные цепи, состоящие из параллельно соединенных между собой катушки индуктивности и конденсатора, широко применяются в радиоэлектронике в качестве колебательных контуров, в которых резонанс токов достигается при некоторой определенной частоте поступающего на вход соответствующего устройства сигнала.

В лабораторных условиях наиболее часто резонанс токов достигается при неизменной индуктивности L катушки, путем изменения емкости C батареи конденсаторов. С изменением емкостной проводимости $B_C = \omega C$, пропорциональной емкости конденсатора, происходит изменение полной проводимости Y , общего тока I и коэффициента мощности $\cos \varphi$.

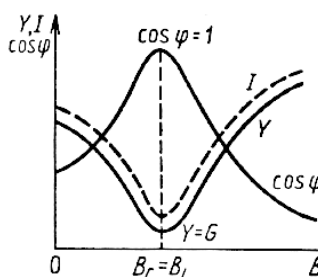


Рис. 4

Указанные зависимости называются резонансными кривыми (рис.4). Анализ этих зависимостей показывает, что при увеличении емкости от нуля полная проводимость электрической цепи сначала уменьшается, достигает при $B_C = B_L$ своего минимума, а затем возрастает с увеличением C , в пределе стремясь к бесконечности. Общий ток $I = YU$, потребляемый цепью, пропорционален полной проводимости. Поэтому характер его изменения подобен характеру изменения проводимости. Коэффициент мощности $\cos \varphi$ с увеличением емкости сначала возрастает, а затем уменьшается, в пределе стремясь к нулю, так как $\cos \varphi = G / B$. В результате анализа указанных зависимостей можно установить, что резонанс токов характеризуется следующими явлениями.

1. При резонансе токов полная проводимость всей электрической цепи приобретает минимальное значение и становится равной активной ее составляющей:

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

2. Минимальное значение проводимости обуславливает и минимальное значение тока цепи:

$$I = YU = GU.$$

3. Емкостный ток I_C и индуктивная составляющая I_L тока катушки I_K оказываются при этом равными по величине, а активная составляющая тока катушки I_R ; становится равной току I , потребляемому из сети:

$$I_L = B_L U = B_C U = I_C; I_R = GU - YU = I.$$

При этом реактивные составляющие тока I_L и I_C (в зависимости от значения реактивных проводимостей) могут приобретать теоретически весьма большие значения и намного превышать ток I , потребляемый электрической цепью из сети.

4. Реактивная составляющая полной мощности, потребляемой цепью, при $B_C = B_L$ оказывается равной нулю:

$$Q = B_L U^2 - B_C U^2 = Q_L - Q_C = 0.$$

При этом индуктивная и емкостная составляющие реактивной мощности также могут приобретать весьма большие значения, оставаясь равными друг другу.

5. Полная мощность цепи при резонансе равна ее активной составляющей

$$S = YU^2 = GU^2 = P.$$

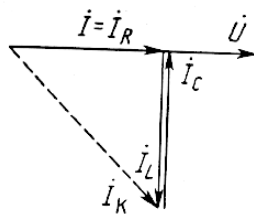


Рис. 5

6. Коэффициент мощности всей цепи при резонансе:

$$\cos\varphi = P/S = GU^2 / YU^2 = 1.$$

Напряжение и ток электрической цепи при резонансе токов совпадают по фазе. Векторная диаграмма, построенная для условия резонанса токов применительно к рассматриваемой цепи, представлена на рис.5.

Резонанс токов находит широкое применение в силовых электрических цепях для повышения коэффициента мощности ($\cos\varphi$), так как он имеет большое технико-экономическое значение. Повышение коэффициента мощности обеспечивается подключением конденсаторов (или других источников реактивной емкостной мощности) параллельно потребителям электрической энергии, которые вследствие наличия собственной им индуктивности имеют низкий коэффициент мощности.

Контрольные вопросы:

1. Что такое резонанс токов?
2. Чем опасен резонанс токов?

Тема 15: Мощность цепи переменного синусоидального тока.

План:

1. Преобразование энергии в электрической цепи.
2. Резистор (идеальное активное сопротивление).
3. Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)
4. Конденсатор (идеальная емкость)
5. Полная мощность
6. Комплексная мощность.
7. Применение статических конденсаторов для повышения $\cos\varphi$
8. Баланс мощностей.

1. Преобразование энергии в электрической цепи.

Передача энергии w по электрической цепи (например, по линии электропередачи), рассеяние энергии, то есть переход электромагнитной энергии в тепловую, а также и другие виды преобразования энергии характеризуются интенсивностью, с которой протекает процесс, то есть тем, сколько энергии передается по линии в единицу времени, сколько энергии рассеивается в единицу времени. Интенсивность передачи или преобразования энергии называется мощностью p . Сказанному соответствует математическое определение:

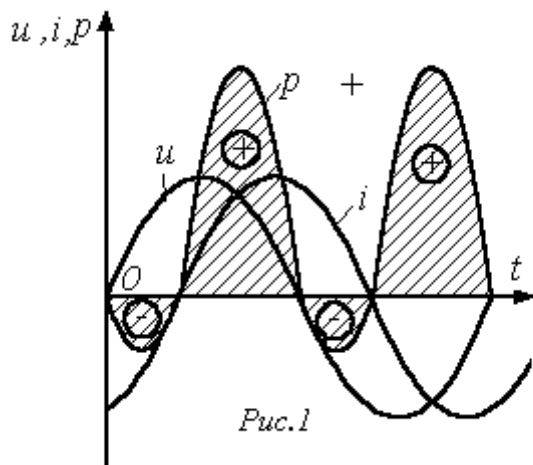
$$p = \frac{dw}{dt} \quad (1)$$

Выражение для мгновенного значения мощности в электрических цепях имеет вид:

$$p = ui \quad (2)$$

Приняв начальную фазу напряжения за нуль, а сдвиг фаз между напряжением и током за $-\varphi$, получим:

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin at \cdot I_m \sin(at - \varphi) = U_m I_m \sin at \sin(at - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2at - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2at - \varphi) \end{aligned} \quad (3)$$



Итак, мгновенная мощность имеет постоянную составляющую и гармоническую составляющую, угловая частота которой в 2 раза больше угловой частоты напряжения и тока.

Когда мгновенная мощность отрицательна, а это имеет место (см. рис. 1), когда u и i разных знаков, т.е.

когда направления напряжения и тока в двухполюснике противоположны, энергия возвращается из двухполюсника источнику питания.

Такой возврат энергии источнику происходит за счет того, что энергия периодически запасается в магнитных и электрических полях соответственно индуктивных и емкостных элементов, входящих в состав двухполюсника. Энергия, отдаваемая источником

двухполюснику в течение времени t равна $\int_0^t p dt$.

Среднее за период значение мгновенной мощности называется активной мощностью

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \text{ (Вт)}$$

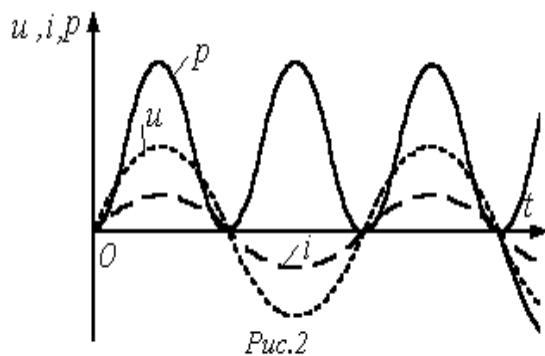
$$\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0$$

Принимая во внимание, что $\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0$, из (3) получим:

$$P = UI \cos \varphi \tag{4}$$

Активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником, не может быть отрицательной (иначе двухполюсник будет генерировать энергию), поэтому $\cos \varphi \geq 0$,

т.е. на входе пассивного двухполюсника $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Случай $P=0$, $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} \right|$ теоретически возможен для двухполюсника, не имеющего активных сопротивлений, а содержащего только идеальные индуктивные и емкостные элементы.

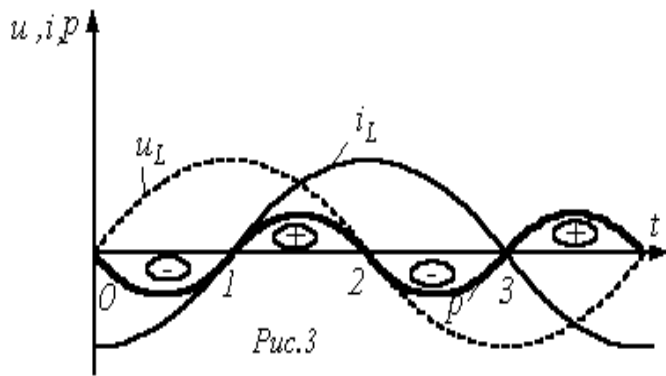


1. Резистор (идеальное активное сопротивление).

Здесь напряжение и ток (см. рис. 2) совпадают по фазе ($\varphi = 0$), поэтому мощность $p = ui$ всегда положительна, т.е. резистор потребляет активную мощность

$$P = UI \cos \varphi = |\cos 0 = 1| = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

2. Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)



При идеальной индуктивности ток отстает от напряжения по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому в

$$p = U_L I_L \cos \frac{\pi}{2} -$$

$$- U_L I_L \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) =$$

соответствии с (3) можно записать $= -U_L I_L \sin 2\omega t$.

Участок 1-2: энергия $\frac{Li^2}{2}$, запасаемая в магнитном поле катушки, нарастает.

Участок 2-3: энергия магнитного поля убывает, возвращаясь в источник.

3. Конденсатор (идеальная емкость)

Аналогичный характер имеют процессы и для идеальной емкости. Здесь $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Поэтому из (3) вытекает, что $p = U_C I_C \sin 2\omega t$. Таким образом, в катушке индуктивности и конденсаторе активная мощность не потребляется ($P=0$), так как в них не происходит необратимого преобразования энергии в другие виды энергии. Здесь происходит только циркуляция энергии: электрическая энергия запасается в магнитном поле катушки или электрическом поле конденсатора на протяжении четверти периода, а на протяжении следующей четверти периода энергия вновь возвращается в сеть. В силу этого катушку индуктивности и конденсатор называют реактивными элементами, а их сопротивления X_L и X_C , в отличие от активного сопротивления R резистора, – реактивными.

Интенсивность обмена энергии принято характеризовать наибольшим значением скорости поступления энергии в магнитное поле катушки или электрическое поле конденсатора, которое называется **реактивной мощностью**.

В общем случае выражение для реактивной мощности имеет вид:

$$Q = UI \sin \varphi \tag{5}$$

Она положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка- $\varphi > 0$) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка-). Единицу мощности в применении к измерению реактивной мощности называют **вольт-ампер реактивный** (ВАр).

В частности для катушки индуктивности имеем:

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI, \text{ так как } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$Q_L = UI = \omega LI^2 = \omega L \frac{I_m^2}{2} = \omega \left[\frac{LI_m^2}{2} \right].$$

Из последнего видно, что реактивная мощность для идеальной катушки индуктивности пропорциональна частоте и максимальному запасу энергии в катушке. Аналогично можно получить для идеального конденсатора:

$$|Q_C| = \omega \left[\frac{CI_m^2}{2} \right].$$

4. Полная мощность

Помимо понятий активной и реактивной мощностей в электротехнике широко используется понятие **полной мощности**:

$$S = UI \quad (\text{ВА}) \tag{6}$$

Активная, реактивная и полная мощности связаны следующим соотношением:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{7}$$

Отношение активной мощности к полной называют **коэффициентом мощности**. Из приведенных выше соотношений видно, что коэффициент мощности $\cos \varphi$ равен косинусу угла сдвига между током и напряжением. Итак,

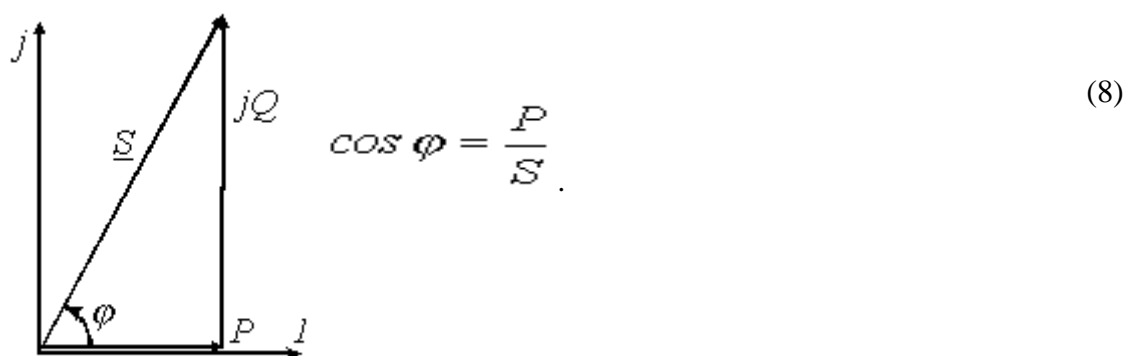


Рис.4

5. Комплексная мощность

Активную, реактивную и полную мощности можно определить, пользуясь комплексными изображениями напряжения и тока. Пусть $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$, а $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$. Тогда комплекс полной мощности:

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* \quad (9)$$

где \dot{I}^* - комплекс, сопряженный с комплексом \dot{I} .

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = |U| |I| e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ$$

Комплексной мощности можно поставить в соответствие треугольник мощностей (см. рис. 4). Рис. 4 соответствует $\cos \varphi > 0$ (активно-индуктивная нагрузка), для которого имеем:

5. Применение статических конденсаторов для повышения $\cos \varphi$

Как уже указывалось, реактивная мощность

$$\underline{Z} = R + jX; \dot{U} = \underline{Z} \dot{I}; \underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = \underline{Z} \dot{I}^2 = RI^2 + jXI^2$$

циркулирует между источником и потребителем. Реактивный ток, не совершая полезной работы, приводит к дополнительным потерям в силовом оборудовании и, следовательно, к завышению его установленной мощности. В этой связи понятно стремление к увеличению $\cos \varphi$ в силовых электрических цепях.

Следует указать, что подавляющее большинство потребителей (электродвигатели, электрические печи, другие различные устройства и приборы) как нагрузка носит активно-индуктивный характер.

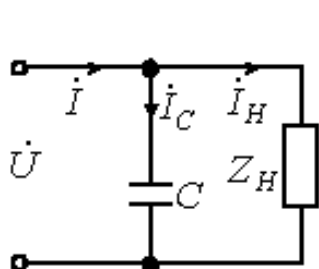


Рис.5

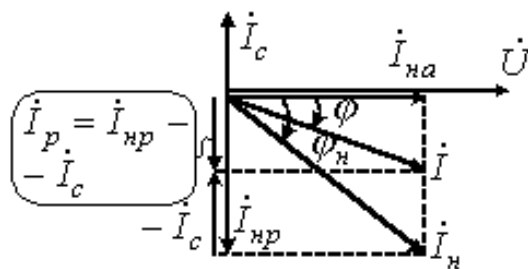


Рис.6

Если параллельно такой нагрузке Z_H (см. рис. 5), включить конденсатор C , то общий ток \dot{I} , как видно из векторной диаграммы (рис. 6), приближается по фазе к напряжению, т.е. $\cos \varphi$ увеличивается, а общая величина тока (а следовательно, потери) уменьшается при

постоянстве активной мощности $P = UI \cos \varphi$. На этом основано применение конденсаторов для повышения $\cos \varphi$.

Какую емкость C нужно взять, чтобы повысить коэффициент мощности от значения $\cos \varphi_n$ до значения $\cos \varphi > \cos \varphi_n$?

Разложим \dot{I}_n на активную $I_{на} = I_n \cos \varphi_n$ и реактивную $I_{нр} = I_n \sin \varphi_n$ составляющие. Ток через конденсатор \dot{I}_c компенсирует часть реактивной составляющей тока нагрузки \dot{I}_n :

$$I_p = I_{нр} - I_c; \quad (10)$$

$$I_{нр} = I_{на} \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi_n; \quad (11)$$

$$I_p = I_{на} \operatorname{tg} \varphi = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi \quad (12)$$

Из (11) и (12) с учетом (10) имеем

$$I_c = \frac{P_n}{U} (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi)$$

но $I_c = \omega C U$, откуда необходимая для повышения $\cos \varphi$ емкость:

$$C = \frac{P_n}{U^2 \omega} (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi) \quad (13)$$

Баланс мощностей

Баланс мощностей является следствием закона сохранения энергии и может служить критерием правильности расчета электрической цепи.

а) Постоянный ток

Для любой цепи постоянного тока выполняется соотношение:

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \quad (14)$$

Это уравнение представляет собой математическую форму записи баланса мощностей: суммарная мощность, генерируемая источниками электрической энергии, равна суммарной мощности, потребляемой в цепи.

Следует указать, что в левой части (14) слагаемые имеют знак "+", поскольку активная мощность рассеивается на резисторах. В правой части (14) сумма слагаемых больше нуля, но отдельные члены здесь могут иметь знак "-", что говорит о том, что соответствующие источники работают в режиме потребителей энергии (например, заряд аккумулятора).

б) Переменный ток.

Из закона сохранения энергии следует, что сумма всех отдаваемых активных мощностей равна сумме всех потребляемых активных мощностей, т.е.

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \cos \varphi_{kz} (\text{генератора}) \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^n \pm X_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \sin \varphi_{kz} \quad (16)$$

где знак “+” относится к индуктивным элементам ($X = \omega L$), “-” – к емкостным

В ТОЭ доказывается (вследствие достаточной громоздкости вывода это доказательство опустим), что баланс соблюдается и для реактивных мощностей:

$$(X_c = 1/(\omega C))$$

Умножив (16) на “j” и сложив полученный результат с (15), придем к аналитическому выражению баланса мощностей в цепях синусоидального тока (без учета взаимной индуктивности):

$$\sum_{k=1}^n (R_k \pm jX_k) I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k (\cos \varphi_{kz} + j \sin \varphi_{kz}) = \sum_{k=1}^n E_k I_k e^{j\varphi_{kz}}$$

или

$$\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \times I_k$$

Контрольные вопросы и задачи:

1. Что такое активная мощность?
2. Что такое реактивная мощность, с какими элементами она связана?
3. Что такое полная мощность?
4. Почему необходимо стремиться к повышению коэффициента мощности $\cos \varphi$?
5. Критерием чего служит баланс мощностей?
6. К источнику с напряжением $u = 141 \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ В}$ подключена активно-индуктивная нагрузка, ток в которой $i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 80^\circ) \text{ А}$. Определить активную, реактивную и полную мощности.
 Ответ: P=250 Вт; Q=433 ВАр; S=500 ВА.
7. В ветви, содержащей последовательно соединенные резистор R и катушку индуктивности L, ток I=2 А. Напряжение на зажимах ветви U=100 В, а потребляемая мощность P=120 Вт. Определить сопротивления R и XL элементов ветви.
 Ответ: R=30 Ом; XL=40 Ом.

8. Мощность, потребляемая цепью, состоящей из параллельно соединенных конденсатора и резистора, $P=90$ Вт. Ток в неразветвленной части цепи $I_1=5$ А, а в ветви с резистором $I_2=4$ А. Определить сопротивления R и X_L элементов цепи.

Ответ: $R=10$ Ом; $X_C=7,5$ Ом.

Тема 16:Символический метод расчета электрических цепей.

План:

1. Общие понятия о символическом методе.
2. Законы Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока.

1.Общие понятия о символическом методе.

Все графические методы расчета электрических цепей синусоидального тока, в том числе и метод векторных диаграмм, не могут обеспечить высокой точности или очень сложны и трудоемки.

Комплексный метод расчета, базирующийся на теории комплексных чисел, довольно прост и позволяет добиваться высокой точности.

Любой вектор на плоскости, проведенный из начала координат и изображающий действующее значение э.д.с., напряжения или тока, однозначно определяются точной, соответствующей концу этого вектора (точка А на рис.2.12).

На плоскости комплексных чисел А соответствует одно комплексное число \dot{A} .

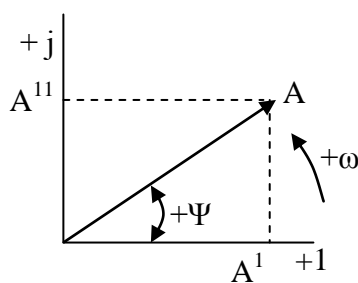


Рис.1Составляющие комплексного числа на комплексной плоскости

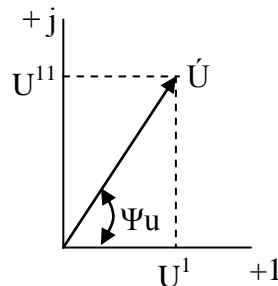
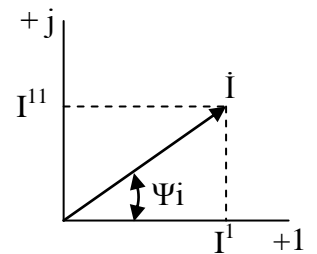


Рис.2 Изображение векторов напряжения (а) и тока (б) на комплексной плоскости



Таким образом, любой вектор однозначно изображается комплексным числом, соответствующий концу этого вектора. Благодаря такому символическому изображению этот метод называют иногда символическим. Комплексный метод расчета применим только к цепям с синусоидальным э.д.с., напряжениями и токами, так как только синусоидальные величины можно изображать векторами.

Комплексное число \dot{A} имеет вещественную и мнимую составляющие:

$$\dot{A} = A' + jA'' \quad (1)$$

где A' - координата точки А на вещественной оси;

A'' - координата точки А на мнимой оси; $j = \sqrt{-1}$.

Умножение какого-то числа на j означает поворот его на угол $\frac{\pi}{2}$, по отношению к положительному направлению вещественной оси в направлении против часовой стрелки.

Координаты точки А могут быть выражены через длину вектора $|OA| = A$ и угол ψ : $A' = A \cos \psi$, $A'' = A \sin \psi$. Тогда комплексное число можно записать следующим образом:

$$\dot{A} = A(\cos \psi + j \sin \psi) \quad (2)$$

где $A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}$ - модуль комплексного числа, равный длине вектора ОА;

$\psi = \arctg(A'' / A')$ - аргумент комплексного числа, т.е. угол, на который вектор OA повернут по отношению к положительному направлению вещественной оси. Угол ψ положителен, если он отсчитывается в направлении, противоположном вращению часовой стрелки.

Используя формулу Эйлера $\cos \psi + j \sin \psi = e^{j\psi}$, из (2) получим

$$\dot{A} = A e^{j\psi}, \quad (3)$$

где $e^{j\psi}$ - поворотный множитель, указывающий на какой угол по отношению к вещественной оси должен быть повернут вектор, длина которого равна $|A|$. При этом $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$, $e^{\pm j\pi} = -1$, $e^{\pm j2\pi} = 1$.

Таким образом, поворот вектора OA на угол $\pm j\pi/2$ соответствует умножению его на -1 и т.д..

Над комплексными числами, можно производить все алгебраические действия. При сложении и вычитании удобнее пользоваться алгебраической формой записи (1), а при умножении, делении, возведении в степень и извлечении из корней – показательной формой записи (3) комплексного числа.

Синусоидальное напряжение $u = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$ можно представить комплексным числом \dot{U}_m или \dot{U} (\dot{U}_m - комплексная амплитуда напряжения, \dot{U} - комплексное действующее значение, которое будем называть комплексным напряжением). При этом

$$\dot{u}_m = u_m e^{j\psi_u}; \quad \dot{u} = u e^{j\alpha\psi_u} \quad (4)$$

Амплитуда напряжения – модуль, а угол ψ_u , являющийся начальной фазой – аргумент комплексного напряжения.

Комплексное число $u_m e^{j(\omega t + \psi_u)}$, аргумент которого изменяется во времени, так как вектор вращается со скоростью ω , изображает мгновенное значение напряжения $u = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Таким образом, в общем случае аргументом комплексного числа является аргумент синусоидальной функции.

Синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ можно представить комплексным числом

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \dot{I} = I e^{j\alpha\psi_i} \quad (5)$$

где \dot{I}_m - комплексная амплитуда тока;

\dot{I} - комплексное действующее значение тока (комплексный ток).

Модуль и аргумент комплексного числа, изображающего ток, определяется так же, как и для напряжения.

Режим электрической цепи переменного тока описывается уравнениями, членами которых могут быть производные и интегралы синусоидальных функций. Эти члены уравнений также должны быть изображены комплексными числами.

Для примера рассмотрим ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, который изображается комплексным числом:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = \dot{I}_m e^{j\alpha t}$$

Производная тока $\frac{di}{dt} = \omega I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})$ будет изображаться комплексным числом $\omega I_m e^{j(\omega t + \psi_i + \pi/2)} = \omega \dot{I}_m e^{j\alpha t} e^{j\pi/2} = j\omega \dot{I}_m e^{j\alpha t}$, где

ωI_m - модуль комплексной производной.

Таким образом, комплексное число, изображающее производную синусоидальной функции, равно комплексному числу, изображающему саму синусоидальную функцию $\dot{I}_m e^{j\omega t}$, умноженному на $j\omega$.

Интеграл от тока $\int i dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})$ будет изображаться комплексным числом $\frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi_i - \pi/2)} = \frac{I_m}{\omega} e^{j\omega t} e^{-j\pi/2} = \frac{\dot{I}_m e^{j\omega t}}{j\omega}$,

где $\frac{I_m}{\omega}$ - модуль комплексного интеграла; $e^{-j\pi/2} = -j = \frac{1}{j}$.

Таким образом, комплексное число, изображающее интеграл синусоидальной функции, равно комплексному числу, изображающему саму синусоидальную функцию $\dot{I}_m e^{j\omega t}$, деленному на $j\omega$.

Следовательно, изображение синусоидальных функций комплексными числами позволяет заменить дифференцирование умножением на $j\omega$, а и интегрирование – делением на $j\omega$.

2. Законы Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока.

Для цепей синусоидального тока также справедливы законы Кирхгофа, сформулированные ранее для цепей постоянного тока. Но так как синусоидальные величины (э.д.с. напряжение, ток) характеризуются мгновенными, максимальными и действующими значениями, то для каждого из них существуют свои формулировки законов Кирхгофа.

Для мгновенных значений законы Кирхгофа справедливы в алгебраической форме.

Первый закон состоит в том, что алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле равна 0.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

По второму закону алгебраическая сумма э.д.с. в контуре равна алгебраической сумме падений напряжений в этом контуре

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n u_k$$

Для максимальных и действующих значений законы Кирхгофа справедливы только в векторной или комплексной форме. Согласно первому закону, сумма комплексных токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \dot{i}_k = 0 \quad (6)$$

Второй закон Кирхгофа может быть сформулирован иначе сумма мгновенных или комплексных значений падений напряжений на всех элементах контура, включая источники э.д.с., равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n \dot{u}_k = 0 \quad (7)$$

При составлении уравнений законов Кирхгофа в цепях синусоидального

тока необходимо указать условное положительное направление э.д.с., задать угловое положительной напряжением токов в ветвях и положительное

направление падений напряжений на участках цепи, совпадающее с положительным напряжением тока. Знак слагаемых в уравнениях определяется также как в цепях постоянного тока. Это относится как к мгновенным значениям синусоидальных величин, так и к комплексным.

Контрольные вопросы:

- 1.Объясните сущность символического метода.
- 2.Что такое мгновенное значение.

Тема 17: Применение топологических методов в расчете электрических цепей.

План:

1. Общее понятие топологии
2. Графа электрической цепи.
3. Топологические матрицы

Ключевые слова: Топология, топологическая диаграмма, граф, матрица, контур, топологические матрицы, ветвь, узел, подграф, дерево, сечение граф.

1. Общее понятие топологии

Электрическая цепь характеризуется совокупностью элементов, из которых она состоит, и способом их соединения. Соединение элементов электрической цепи наглядно отображается ее схемой. Рассмотрим для примера две электрические схемы (рис. 1, 2), введя понятие ветви и узла.

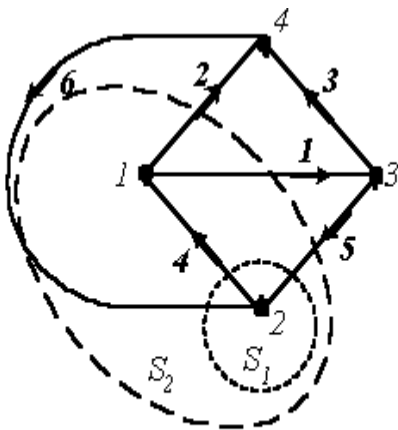


Рис.3

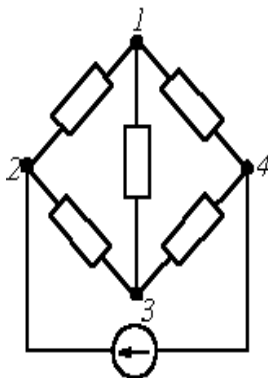


Рис.2

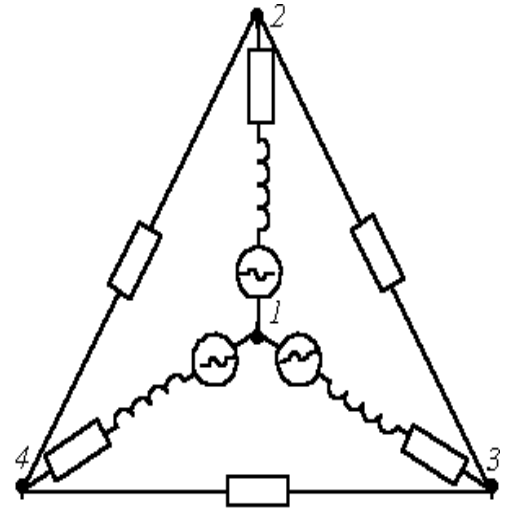


Рис.1

Ветвью называется участок цепи, обтекаемый одним и тем же током.

Узел – место соединения трех и более ветвей.

Представленные схемы различны и по форме, и по назначению, но каждая из указанных цепей содержит по 6 ветвей и 4 узла, одинаково соединенных. Таким образом, в смысле геометрии (топологии) соединений ветвей данные схемы идентичны.

Топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоит ветвь. Поэтому целесообразно каждую ветвь схемы электрической цепи изобразить отрезком линии. Если

каждую ветвь схем на рис. 1 и 2 заменить отрезком линии, получается геометрическая фигура, показанная на рис. 3.

2. Графа электрической цепи.

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называется **графом электрической цепи**. При этом следует помнить, что ветви могут состоять из каких-либо элементов, в свою очередь соединенных различным образом.

Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называется **ветвью графа**. Граничные точки ветви графа называются **узлами графа**. Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называется **ориентированным**.

Подграфом графа называется часть графа, т.е. это может быть одна ветвь или один изолированный узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в графе.

В теории электрических цепей важное значение имеют следующие подграфы:

1. Путь – это упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседние ветви имеют общий узел, причем любая ветвь и любой узел встречаются на этом пути только один раз. Например, в схеме на рис. 3 ветви 2-6-5; 4-5; 3-6-4; 1 образуют пути между одной и той же парой узлов 1 и 3. Таким образом, путь – это совокупность ветвей, проходимых непрерывно.

2. Контур – замкнутый путь, в котором один из узлов является начальным и конечным узлом пути. Например, для графа на рис. 3 можно определить контуры, образованные ветвями 2-4-6; 3-5-6; 2-3-5-4. Если между любой парой узлов графа существует связь, то граф называют связным.

3. Дерево – это связный подграф, содержащий все узлы графа, но ни одного контура. Примерами деревьев для графа на рис. 3 могут служить фигуры на рис. 4.

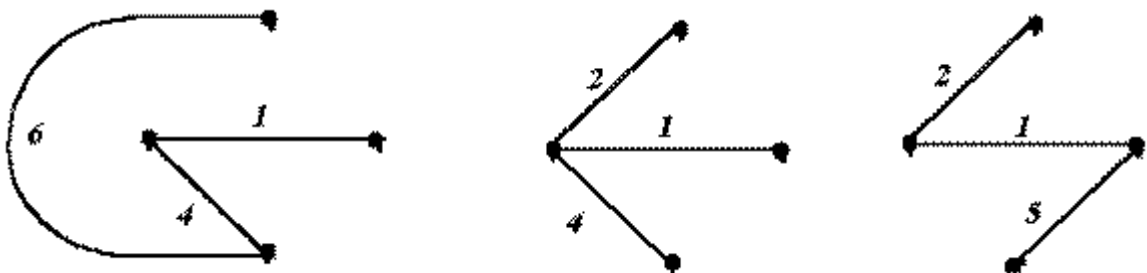


Рис.4

4. Ветви связи (дополнения дерева) – это ветви графа, дополняющие дерево до исходного графа.

Если граф содержит m узлов и n ветвей, то число ветвей любого дерева $d = m - 1$, а числа ветвей связи графа $c = n - (m - 1) = n - m + 1$.

5. Сечение графа – множество ветвей, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть отдельным узлом.

Сечение можно наглядно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, рассекающей соответствующие ветви. Примерами таких поверхностей являются для нашего графа на рис. 3 S_1 и S_2 . При этом получаем соответственно сечения, образованные ветвями **6-4-5** и **6-2-1-5**.

С понятием дерева связаны понятия главных контуров и сечений:

- главный контур – контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи;
- главное сечение – сечение, состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева.

3. Топологические матрицы

Задать вычислительной машине топологию цепи рисунком затруднительно, так как не существует эффективных программ распознавания образа. Поэтому топологию цепи вводят в ЭВМ в виде матриц, которые называют **топологическими матрицами**. Выделяют три таких матрицы: узловую матрицу, контурную матрицу и матрицу сечений.

1. Узловая матрица (матрица соединений) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Строки этой матрицы соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы.

Для графа на рис. 3 имеем число узлов $m=4$ и число ветвей $n=6$. Тогда запишем матрицу

A_H , принимая, что элемент матрицы a_{ij} (i – номер строки; j – номер столбца) равен 1 , если ветвь j соединена с узлом i и ориентирована от него, -1 , если ориентирована к нему, и 0 , если ветвь j не соединена с узлом i . Сориентировав ветви графа на рис. 3, получим

$$A_H = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Данная матрица A_H записана для всех четырех узлов и называется неопределенной. Следует указать, что сумма элементов столбцов матрицы A_H всегда равна нулю, так как каждый столбец содержит один элемент $+1$ и один элемент -1 , остальные нули.

Обычно при расчетах один (любой) заземляют. Тогда приходим к узловой матрице A (редуцированной матрице), которая может быть получена из матрицы A_H путем вычеркивания любой ее строки. Например, при вычеркивании строки “4” получим

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Число строк матрицы \mathbf{A} равно числу независимых уравнений для узлов $\partial = m - 1$, т.е. числу уравнений, записываемых для электрической схемы по первому закону Кирхгофа. Итак, введя понятие узловой матрицы \mathbf{A} , перейдем к первому закону Кирхгофа.

Контрольные вопросы:

1. Что такое топология?
2. Объясните графу электрической цепи.
3. Как составляются топологические матрицы?
4. В чем заключаются преимущества использования матричных методов расчета цепей?
5. Запишите выражения матрицы контурных сопротивлений и матрицы контурных ЭДС.
6. Запишите выражения матрицы узловых проводимостей и матрицы узловых токов.

Тема 18 : Матричные уравнения законов Ома и Кирхгофа.

План:

1. Первый закон Кирхгофа.
2. Контурная матрица.
3. Второй закон Кирхгофа

1. Первый закон Кирхгофа

Обычно первый закон Кирхгофа записывается для узлов схемы, но, строго говоря, он справедлив не только для узлов, но и для любой замкнутой поверхности, т.е. справедливо соотношение

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

где \vec{j} - вектор плотности тока; $d\vec{S}$ - нормаль к участку dS замкнутой поверхности S .

Первый закон Кирхгофа справедлив и для любого сечения. В частности, для сечения S_2 графа на рис. 3, считая, что нумерация и направления токов в ветвях соответствуют нумерации и выбранной ориентации ветвей графа, можно записать

$$I_1 + I_2 - I_5 - I_6 = 0.$$

Поскольку в частном случае ветви сечения сходятся в узле, то первый закон Кирхгофа справедлив и для него. Пока будем применять первый закон Кирхгофа для узлов, что математически можно записать, как:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (2)$$

т.е. алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узел, равна нулю.

При этом при расчетах уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для $(m-1)$ узлов, так как при записи уравнений для всех m узлов одно (любое) из них будет линейно зависимым от других, т.е. не дает дополнительной информации.

Введем столбовую матрицу токов ветвей

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Тогда первый закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид:

$$AI=O \quad (3)$$

– где O - нулевая матрица-столбец. Как видим, в качестве узловой взята матрица, а не A_H , т.к. с учетом вышесказанного уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для $(m-1)$ узлов.

В качестве примера запишем для схемы на рис. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда для первого узла получаем

$$1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = I_1 + I_2 - I_4 = 0,$$

что и должно иметь место.

2.Контурная матрица

Контурная матрица (матрица контуров) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки контурной матрицы B соответствуют контурам, а столбцы – ветвям схемы.

Элемент b_{ij} матрицы B равен 1 , если ветвь j входит в контур i и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура, -1 , если не совпадает с направлением обхода контура, и 0 , если ветвь j не входит в контур i .

Матрицу B , записанную для главных контуров, называют **матрицей главных контуров**. При этом за направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура. Выделив в нашем примере (см. рис. 5) дерево, образуемое ветвями **2-1-4**, запишем коэффициенты для матрицы B .

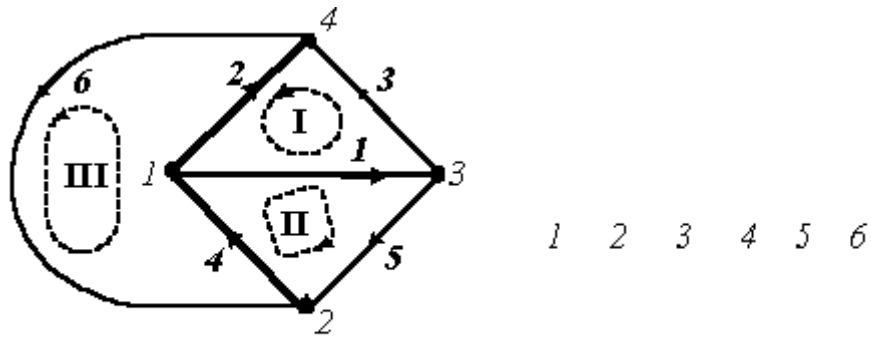


Рис.5

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Второй закон Кирхгофа

Перейдем теперь ко второму закону Кирхгофа.

Под напряжением на некотором участке электрической цепи понимается разность потенциалов между крайними точками этого участка, т.е.

$$U_{ke} = \varphi_k - \varphi_e = -(\varphi_e - \varphi_k) = -U_{ek} \quad (4)$$

Просуммируем напряжения на ветвях некоторого контура:

$$\begin{aligned} & U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \\ & + \\ & U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 \\ & + \\ & \dots\dots\dots \\ & + \\ & U_{k1} = \varphi_k - \varphi_1 \end{aligned}$$

$= 0$. Поскольку при обходе контура потенциал каждой i -ой точки встречается два раза, причем один раз с “+”, а второй – с “-”, то в целом сумма равна нулю.

Таким образом, второй закон Кирхгофа математически записывается, как:

$$\sum_k U_k = 0, \quad (5)$$

- и имеет место следующую формулировку: алгебраическая сумма напряжений на зажимах ветвей (элементов) контура равна нулю. При этом при расчете цепей с

использованием законов Кирхгофа записывается $c = (n - m + 1)$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа, т.е. уравнений, записываемых для контуров, каждый из которых отличается от других хотя бы одной ветвью. Значение топологического понятия “дерева”: дерево позволяет образовать независимые контуры и сечения и, следовательно, формировать независимые уравнения по законам Кирхгофа. Таким образом, с учетом $(m - 1)$ уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, получаем систему из $(m - 1) + (n - m + 1) = n$ уравнений, что равно числу ветвей схемы и, следовательно, токи в них находятся однозначно.

Введем столбовую матрицу напряжений ветвей

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Тогда второй закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид

$$BU = 0. \quad (6)$$

В качестве примера для схемы рис. 5 имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = [0],$$

откуда, например, для первого контура получаем

$$1 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 + 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 + 0 \cdot U_5 + 0 \cdot U_6 = U_1 - U_2 + U_3 = 0,$$

что и должно иметь место.

Если ввести столбовую матрицу узловых потенциалов

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{m-1} \end{bmatrix}$$

причем потенциал последнего узла $\varphi_m = 0$, то матрица напряжений ветвей и узловых потенциалов связаны соотношением

$$U=AT^{\varnothing} \quad (7)$$

где A^T - транспонированная узловая матрица.

Для определения матрицы B по известной матрице $A=A_dA_c$, где A_d – подматрица, соответствующая ветвям некоторого дерева, A_c - подматрица, соответствующая ветвям связи, может быть использовано соотношение $B=(-A_c^T A_d^{-1T} I)$.

3. Матрица сечений – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для сечений. Ее строки соответствуют сечениям, а столбцы – ветвям графа.

Матрица Q , составленная для главных сечений, называется **матрицей главных сечений**. Число строк матрицы Q равно числу независимых сечений.

Элемент q_{ij} матрицы Q равен 1 , если ветвь входит в i -е сечение и ориентирована согласно направлению сечения (за положительное направление сечения принимают направление ветви дерева, входящей в него), -1 , если ориентирована противоположно направлению сечения, и 0 , если ветвь j не входит в i -е сечение.

В качестве примера составим матрицу Q главных сечений для графа на рис. 5. При указанной на рис. 5 ориентации ветвей имеем

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

В заключение отметим, что для топологических матриц A , B и Q , составленных для одного и того же графа, выполняются соотношения

$$AB^T = 0; \quad (8)$$

$$QB^T = 0, \quad (9)$$

которые, в частности, можно использовать для проверки правильности составления этих матриц. Здесь 0 – нулевая матрица порядка \varnothing .

Приведенные уравнения позволяют сделать важное заключение: зная одну из топологических матриц, по ее структуре можно восстановить остальные.

Контрольные вопросы и задачи:

1. Сформулируйте основные топологические понятия для электрических цепей.
2. Что такое узловая матрица?
3. Что такое контурная матрица?
4. Что такое матрица сечений?
5. Токи ветвей некоторой планарной цепи удовлетворяют следующей полной системе независимых уравнений:

$$I_1 + I_5 - I_8 = 0; \quad I_2 + I_6 - I_5 = 0; \quad -I_3 + I_7 - I_6 = 0; \quad -I_4 + I_8 - I_7 = 0$$

6. Восстановив граф цепи, составить матрицы главных контуров и сечений, приняв, что ветвям дерева присвоены первые номера.

Ответ:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Составить матрицу главных контуров для графа на рис. 3, приняв, что дерево образовано ветвями 2, 1 и 5. Ответ:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Решить задачу 5, используя соотношения (8) и (9).

Тема-19: Основные определения о трехфазных цепях.

Цель: Изучение получения трехфазного переменного тока и источника переменного тока.

План:

1. Основные определения.
2. Схемы соединения трехфазных систем.

Ключевые слова: трехфазные системы, звезда, треугольник, линия, фаза, фазные напряжения, фазные токи, линейные токи, линейные напряжения.

Основные определения.

Трехфазная цепь является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол. Отметим, что обычно эти ЭДС, в первую очередь в силовой энергетике, синусоидальны. Однако, в современных электромеханических системах, где для управления исполнительными двигателями используются преобразователи частоты, система напряжений в общем случае является несинусоидальной. Каждую из частей многофазной системы, характеризующуюся одинаковым током, называют фазой, т.е. фаза – это участок цепи, относящийся к соответствующей обмотке генератора или трансформатора, линии и нагрузке.

Таким образом, понятие «фаза» имеет в электротехнике два различных значения:

- фаза как аргумент синусоидально изменяющейся величины;
- фаза как составная часть многофазной электрической системы.

Разработка многофазных систем была обусловлена исторически. Исследования в данной области были вызваны требованиями развивающегося производства, а успехам в развитии многофазных систем способствовали открытия в физике электрических и магнитных явлений.

Важнейшей предпосылкой разработки многофазных электрических систем явилось открытие явления вращающегося магнитного поля (Г.Феррарис и Н.Тесла, 1888 г.). Первые электрические двигатели были двухфазными, но они имели невысокие рабочие характеристики. Наиболее рациональной и перспективной оказалась трехфазная система, основные преимущества которой будут рассмотрены далее. Большой вклад в разработку трехфазных систем внес выдающийся русский ученый-электротехник М.О.Доливо-Добровольский, создавший трехфазные асинхронные двигатели, трансформаторы, предложивший трех- и четырехпроводные цепи, в связи с чем по праву считающийся основоположником трехфазных систем.

Источником трехфазного напряжения является трехфазный генератор, на статоре которого (см. рис. 1) размещена трехфазная обмотка. Фазы этой обмотки располагаются таким образом, чтобы их магнитные оси были сдвинуты в пространстве друг

относительно друга на $2\pi/3$ эл. рад. На рис. 1 каждая фаза статора условно показана в виде одного витка. Начала обмоток принято обозначать заглавными буквами А,В,С, а концы- соответственно прописными x,y,z. ЭДС в неподвижных обмотках статора индуцируются в

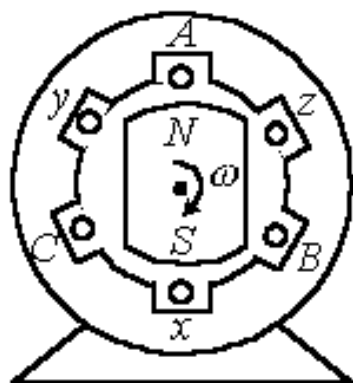


Рис.1

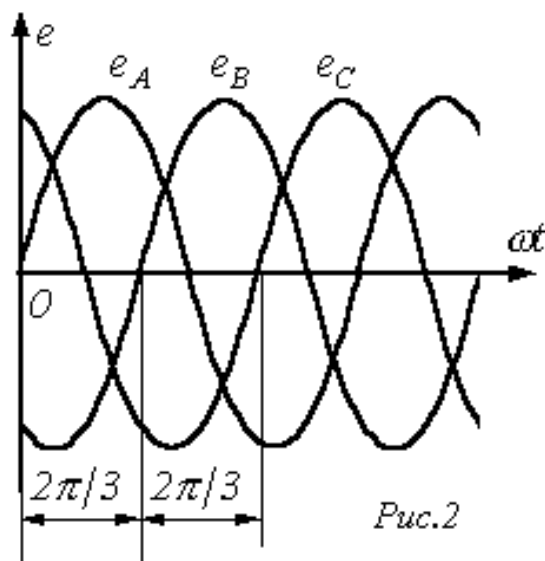


Рис.2

прописными x,y,z. ЭДС в неподвижных обмотках статора индуцируются в результате пересечения их витков магнитным полем, создаваемым током обмотки возбуждения вращающегося ротора (на рис. 1 ротор условно изображен в виде постоянного магнита, что используется на практике при относительно небольших мощностях). При вращении ротора с равномерной скоростью в обмотках фаз статора индуцируются периодически изменяющиеся синусоидальные ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, но отличающиеся вследствие пространственного сдвига друг от друга по фазе на $2\pi/3$ рад. (см. рис. 2).

Трехфазные системы в настоящее время получили наибольшее распространение. На трехфазном токе работают все крупные электростанции и потребители, что связано с рядом преимуществ трехфазных цепей перед однофазными, важнейшими из которых являются:

- экономичность передачи электроэнергии на большие расстояния;
- самым надежным и экономичным, удовлетворяющим требованиям промышленного электропривода является асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором;
- возможность получения с помощью неподвижных обмоток вращающегося магнитного поля, на чем основана работа синхронного и асинхронного двигателей, а также ряда других электротехнических устройств;
- уравновешенность симметричных трехфазных систем.

Для рассмотрения важнейшего свойства уравновешенности трехфазной системы, которое будет доказано далее, введем понятие симметрии многофазной системы.

Система ЭДС (напряжений, токов и т.д.) называется симметричной, если она состоит из m одинаковых по модулю векторов ЭДС (напряжений, токов и т.д.), сдвинутых по фазе друг относительно друга на одинаковый угол $\alpha = 2\pi/m$. В частности векторная диаграмма для симметричной системы ЭДС, соответствующей трехфазной системе синусоид на рис. 2, представлена на рис. 3.

Из несимметричных систем наибольший практический интерес представляет двухфазная система с 90-градусным сдвигом фаз (см. рис. 4).

Все симметричные трех- и m -фазные ($m > 3$) системы, а также двухфазная система являются уравновешенными. Это означает, что хотя в отдельных фазах мгновенная мощность пульсирует (см. рис. 5,а), изменяя за время одного периода не только величину,

но в общем случае и знак, суммарная мгновенная мощность всех фаз остается величиной постоянной в течение всего периода синусоидальной ЭДС (см. рис. 5,б).

Уравновешенность имеет важнейшее практическое значение. Если бы суммарная мгновенная мощность пульсировала, то на валу между турбиной и генератором действовал бы пульсирующий момент. Такая переменная механическая нагрузка вредно отражалась бы на энергогенерирующей установке, сокращая срок ее службы. Эти же соображения относятся и к многофазным электродвигателям.

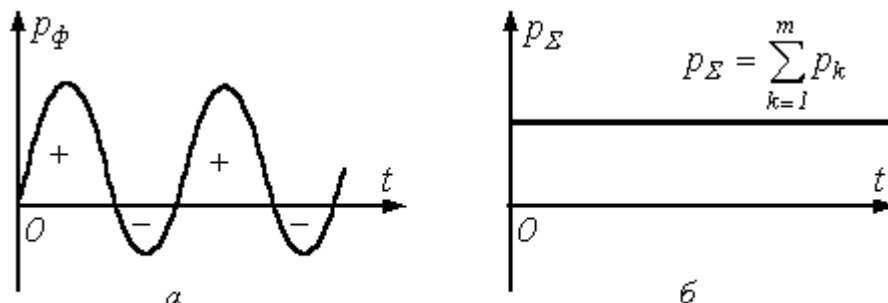


Рис.5

Если симметрия нарушается (двухфазная система Тесла в силу своей специфики в расчет не принимается), то нарушается и уравновешенность. Поэтому в энергетике строго следят за тем, чтобы нагрузка генератора оставалась симметричной.

В равномерном магнитном поле с постоянной угловой скоростью со вращаются три одинаковых, жестко скрепленных друг с другом катушки. Плоскости катушек смещены в пространстве на 120° . В каждой из катушек наводится синусоидальная э.д.с. одинаковой амплитуды и частоты, по фазе сдвинуты на 120° .

$$e_A = E_m \sin \omega t$$

$$e_B = E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$e_C = E_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) = E_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Совокупность трехфазной системы э.д.с., трехфазной нагрузки и соединительных проводов называют трехфазной цепью. Токи, протекающие по отдельным участкам трехфазных цепей сдвинуты отношению друг ~ друга по фазе.

Под фазой трехфазной цепи иногда называют участок трехфазной цепи.

Контрольные вопросы и задачи

1. Каков принцип действия у трехфазного генератора?
2. В чем заключаются основные преимущества трехфазных систем?
3. Какие системы обладают свойством уравновешенности, в чем оно выражается?
4. Какие существуют схемы соединения в трехфазных цепях?
5. Какие соотношения между фазными и линейными величинами имеют место при соединении в звезду и в треугольник?
6. Что будет, если поменять местами начало и конец одной из фаз генератора при соединении в треугольник, и почему?
7. Определите комплексы линейных напряжений, если при соединении фаз генератора в звезду начало и конец обмотки фазы С поменяли местами.
8. Какие схемы соединения обеспечивают автономность работы фаз нагрузки?

Тема-20: Соединение трехфазных цепей.

Цель: Изучение виды соединения трехфазных систем и определение электрических параметров.

План:

1. Соединения трехфазных систем.
2. Соединение в звезду.
3. Соединение в треугольник

Ключевые слова: трехфазная система, звезда, треугольник, линия, фаза, фазные напряжения, фазные токи, линейные токи, линейные напряжения.

Соединения трехфазных систем

Трехфазный генератор (трансформатор) имеет три выходные обмотки, одинаковые по числу витков, но развивающие ЭДС, сдвинутые по фазе на 120. Можно было бы использовать систему, в которой фазы обмотки генератора не были бы гальванически соединены друг с другом. Это так называемая несвязная система. В этом случае каждую фазу генератора необходимо соединять с приемником двумя проводами, т.е. будет иметь место шесть проводная линия, что неэкономично. В этой связи подобные системы не получили широкого применения на практике. Для уменьшения количества проводов в линии фазы генератора гальванически связывают между собой. Различают два вида соединений: в звезду и в треугольник. В свою очередь при соединении в звезду система может быть трех- и четырехпроводной.

Соединение в звезду

На рис. 6 приведена трехфазная система при соединении фаз генератора и нагрузки в звезду. Здесь провода AA', BB' и CC' – линейные провода.

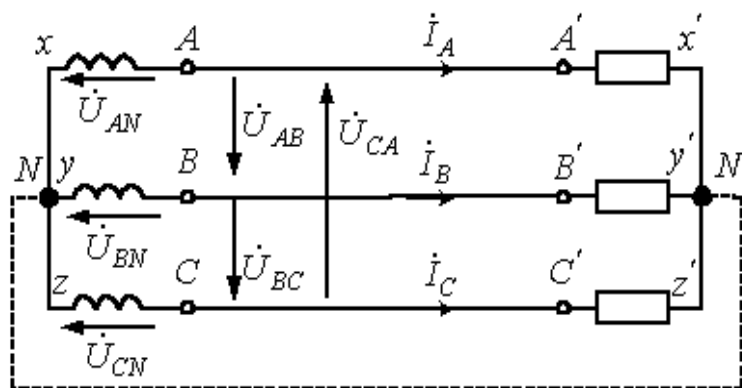


Рис.6

Линейным называется провод, соединяющий начала фаз обмотки генератора и приемника. Точка, в которой концы фаз соединяются в общий узел, называется нейтральной (на рис. 6 N и N' – соответственно нейтральные точки генератора и нагрузки).

Провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника, называется нейтральным (на рис. 6 показан пунктиром). Трехфазная система при соединении в звезду без нейтрального провода называется трехпроводной, с нейтральным проводом – четырехпроводной.

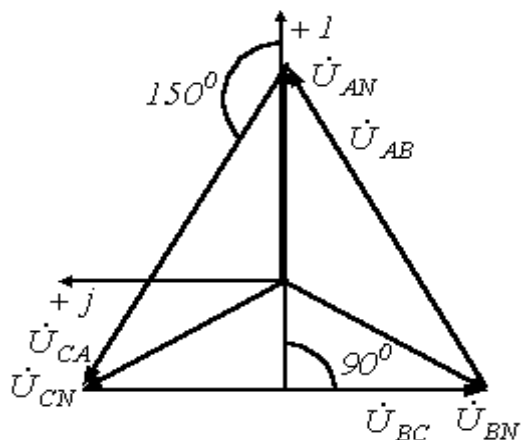


Рис.7

Все величины, относящиеся к фазам, носят название фазных переменных, к линии – линейных. Как видно из схемы на рис. 6, при соединении в звезду линейные токи \dot{I}_A, \dot{I}_B и \dot{I}_C равны соответствующим фазным токам. При наличии нейтрального провода ток в нейтральном проводе $\dot{I}_{N'N} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$. Если система фазных токов симметрична, то $\dot{I}_{N'N} = 0$. Следовательно, если бы симметрия токов была гарантирована, то нейтральный провод был бы не нужен. Как будет показано далее, нейтральный провод обеспечивает поддержание симметрии

напряжений на нагрузке при не симметрии самой нагрузки.

Поскольку напряжение на источнике противоположно направлению его ЭДС, фазные напряжения генератора (см. рис. 6) действуют от точек А, В и С к нейтральной точке N; $\dot{U}_{A'N'}, \dot{U}_{B'N'}, \dot{U}_{C'N'}$ – фазные напряжения нагрузки.

Линейные напряжения действуют между линейными проводами. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для линейных напряжений можно записать

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{BN}; \quad (1)$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{CN}; \quad (2)$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{AN}. \quad (3)$$

Отметим, что всегда $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$ – как сумма напряжений по замкнутому контуру.

На рис. 7 представлена векторная диаграмма для симметричной системы напряжений. Как показывает ее анализ (лучи фазных напряжений образуют стороны равносторонних треугольников с углами при основании, равными 300), в этом случае

$$U_L = \sqrt{3}U_\phi \quad (4)$$

Обычно при расчетах принимается $\dot{U}_{AN} = U_\phi e^{j0} = U_\phi$. Тогда для случая прямого чередования фаз $\dot{U}_{BN} = U_\phi e^{-j120^\circ}$, $\dot{U}_{CN} = U_\phi e^{-j240^\circ} = U_\phi e^{j120^\circ}$ (при обратном

чередовании фаз фазовые сдвиги у \dot{U}_{BN} и \dot{U}_{CN} меняются местами). С учетом этого на основании соотношений (1) ... (3) могут быть определены комплексы линейных напряжений. Однако при симметрии напряжений эти величины легко определяются непосредственно из векторной диаграммы на рис. 7. Направляя вещественную ось системы координат по вектору \dot{U}_{AN} (его начальная фаза равна нулю), отсчитываем фазовые сдвиги линейных напряжений по отношению к этой оси, а их модули определяем

в соответствии с (4). Так для линейных напряжений \dot{U}_{BC} и \dot{U}_{CA} получаем:

$$\dot{U}_{BC} = \sqrt{3}U_{\phi}e^{-j90^{\circ}}; \dot{U}_{CA} = \sqrt{3}U_{\phi}e^{j150^{\circ}}$$

Соединение в треугольник

В связи с тем, что значительная часть приемников, включаемых в трехфазные цепи, бывает несимметричной, очень важно на практике, например, в схемах с осветительными приборами, обеспечивать независимость режимов работы отдельных фаз. Кроме четырехпроводной, подобными свойствами обладают и трехпроводные цепи при соединении фаз приемника в треугольник. Но в треугольник также можно соединить и фазы генератора (см. рис. 8).

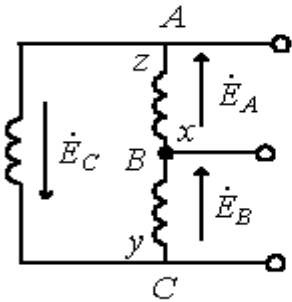


Рис.8

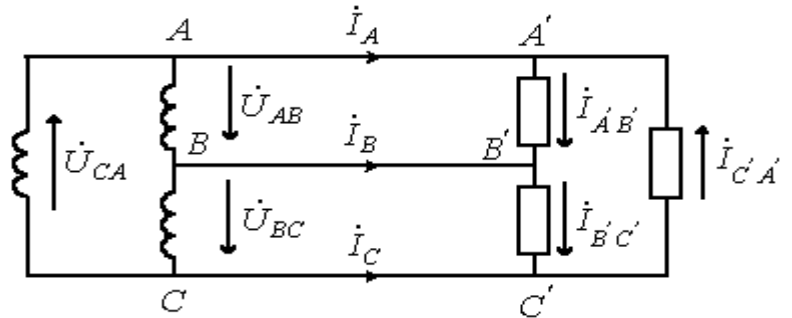


Рис.9

Для симметричной системы ЭДС имеем

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$$

Таким образом, при отсутствии нагрузки в фазах генератора в схеме на рис. 8 токи будут равны нулю. Однако, если поменять местами начало и конец любой из фаз, то $\sum \dot{E} \neq 0$ и в треугольнике будет протекать ток короткого замыкания. Следовательно, для треугольника нужно строго соблюдать порядок соединения фаз: начало одной фазы соединяется с концом другой.

Схема соединения фаз генератора и приемника в треугольник представлена на рис. 9

Очевидно, что при соединении в треугольник линейные напряжения равны соответствующим фазным. По первому закону Кирхгофа связь между линейными и фазными токами приемника определяется соотношениями

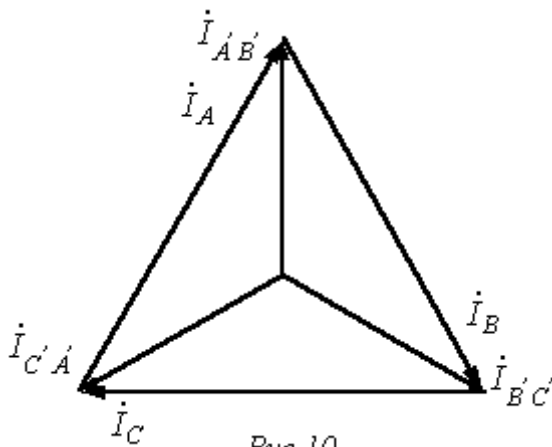


Рис.10

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'}$$

Аналогично можно выразить линейные токи через фазные токи генератора.

На рис. 10 представлена векторная диаграмма симметричной системы линейных и фазных токов.

Ее анализ показывает, что при симметрии токов

$$I_L = \sqrt{3}I_{\phi} \quad (5)$$

В заключение отметим, что помимо рассмотренных соединений «звезда - звезда» и «треугольник - треугольник» на практике также применяются схемы «звезда - треугольник» и «треугольник - звезда».

Контрольные вопросы и задачи

1. Каков принцип действия трехфазного генератора?
2. В чем заключаются основные преимущества трехфазных систем?
3. Какие системы обладают свойством уравновешенности, в чем оно выражается?
4. Какие существуют схемы соединения в трехфазных цепях?
5. Какие соотношения между фазными и линейными величинами имеют место при соединении в звезду и в треугольник?
6. Что будет, если поменять местами начало и конец одной из фаз генератора при соединении в треугольник, и почему?

Тема-21: Симметричный режим работы в трехфазных цепях.

Цель: Изучение, расчет симметричных режимов работы трехфазных систем и определение электрических параметров.

План:

1. Расчет симметричных режимов работы соединения в звезду.
2. Симметричная трехфазная цепь
3. Измерение мощности в трехфазных цепях
4. Трехпроводная система, симметричный режим.

Ключевые слова: трехфазная система, звезда, треугольник, линия, фаза, фазные напряжения, фазные токи, линейные токи, линейные напряжения, симметричные режим.

Расчет симметричных режимов работы соединения в звезду.

Многофазный приемник и вообще многофазная цепь называются симметричными, если в них комплексные сопротивления соответствующих фаз одинаковы, т.е. если $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$. В противном случае они являются несимметричными. Равенство модулей указанных сопротивлений не является достаточным условием симметрии цепи. Так, например трехфазный приемник на рис. 1,а является симметричным, а на рис. 1,б – нет даже при условии: $R = X_L = X_C$.

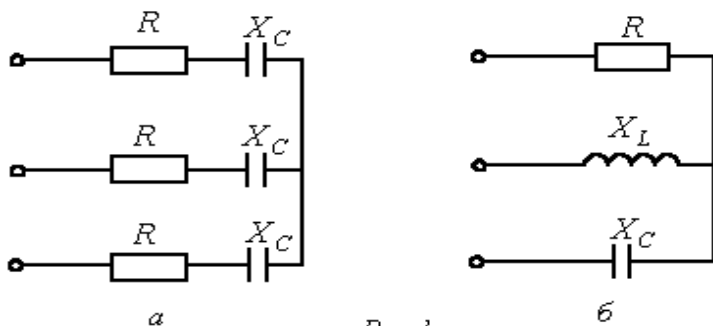


Рис.1

Если к симметричной трехфазной цепи приложена симметричная трехфазная система напряжений генератора, то в ней будет иметь место симметричная система токов. Такой режим работы трехфазной цепи называется симметричным. В этом режиме токи и напряжения соответствующих фаз равны по модулю и сдвинуты по фазе друг по отношению к другу на угол $\pm 2\pi/3$. Вследствие указанного расчет таких цепей проводится для одной – базовой – фазы, в качестве которой обычно принимают фазу А. При этом соответствующие величины в других фазах получают формальным добавлением к аргументу переменной фазы А фазового сдвига $\pm 2\pi/3$ при сохранении неизменным ее модуля.

Так для симметричного режима работы цепи на рис. 2,а при известных линейном напряжении и сопротивлениях фаз $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}$ можно записать

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}} = I_E e^{j\varphi},$$

где φ определяется характером нагрузки \underline{Z} .

Тогда на основании вышесказанного

$$\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB} e^{-j120^\circ} = I e^{j(\varphi-120^\circ)};$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB} e^{j120^\circ} = I e^{j(\varphi+120^\circ)}.$$

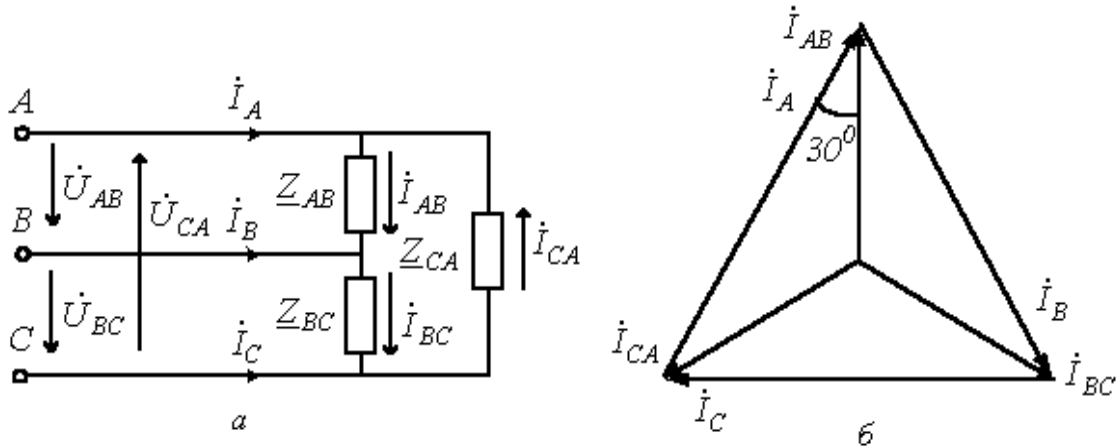


Рис.2

Комплексы линейных токов можно найти с использованием векторной диаграммы на рис. 2,б, из которой вытекает:

$$\dot{I}_A = \sqrt{3} \dot{I}_{AB} e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} I e^{j(\varphi-30^\circ)};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = \sqrt{3} I e^{j(\varphi-150^\circ)};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = \sqrt{3} I e^{j(\varphi+90^\circ)}.$$

При анализе сложных схем, работающих в симметричном режиме, расчет осуществляется с помощью двух основных приемов:

Все треугольники заменяются эквивалентными звездами. Поскольку треугольники симметричны, то в соответствии с формулами преобразования «треугольник-звезда» $\underline{Z}_\Delta = \underline{Z}_\star / 3$.

Так как все исходные и вновь полученные звезды нагрузки симметричны, то потенциалы их нейтральных точек одинаковы. Следовательно, без изменения режима работы цепи их можно (мысленно) соединить нейтральным проводом. После этого из схемы выделяется базовая фаза (обычно фаза А), для которой и осуществляется расчет, по результатам которого определяются соответствующие величины в других фазах.

Пусть, например, при заданном фазном напряжении U_ϕ необходимо определить линейные токи \dot{I}_A, \dot{I}_B и \dot{I}_C в схеме на рис. 3, все сопротивления в которой известны.

В соответствии с указанной методикой выделим расчетную фазу А, которая представлена на рис. 4. Здесь $\dot{E}'_A = U_\phi$, $\underline{Z}'_4 = \underline{Z}_4 / 3$; $\underline{Z}'_6 = \underline{Z}_6 / 3$.

Тогда для тока \dot{I}_A можно записать

$$\dot{I}_A = \frac{U_\phi}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_4 / 3 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 / 3) + \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 / 3) / 3}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 / 3 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 / 3) + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 / 3) / 3}},$$

и соответственно $\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ}$; $\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ}$.

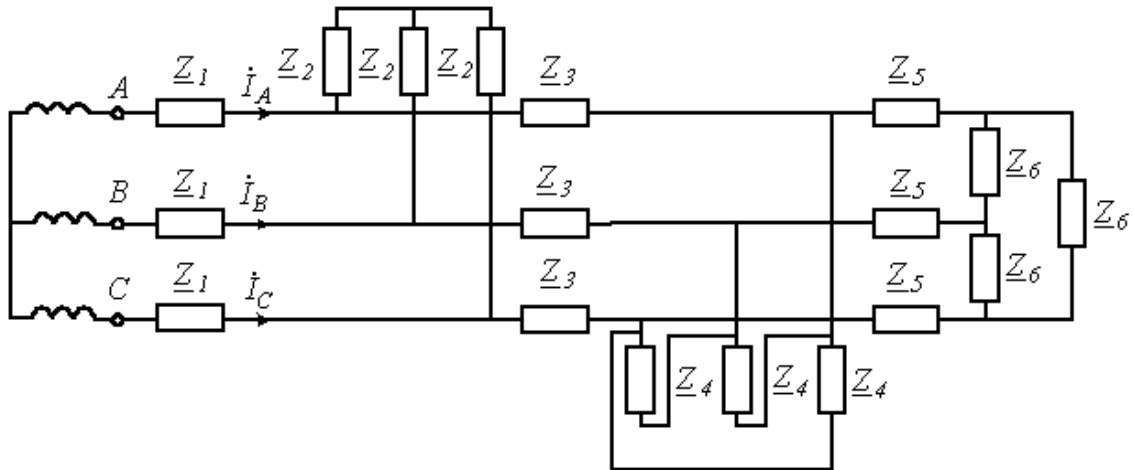


Рис. 3

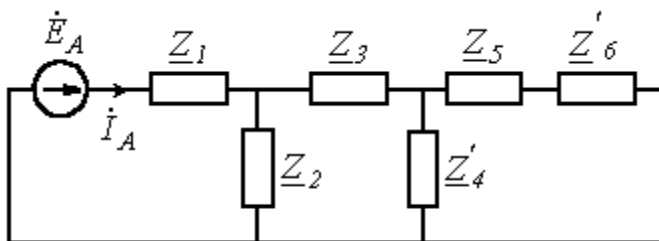


Рис. 4

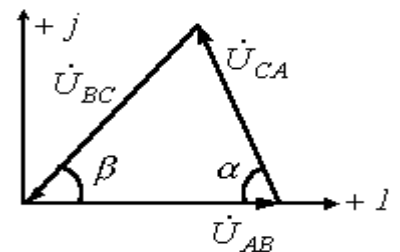


Рис. 5

Симметричная трехфазная цепь

$$u_A = U_m \sin \omega t; \quad i_A = I_m \sin(\omega t - \varphi);$$

$$u_B = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \quad i_B = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right);$$

$$u_C = U_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right); \quad i_C = I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right).$$

Тогда

$$p_A = u_A i_A = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = UI(\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi));$$

$$p_B = u_B i_B = U_m I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = UI\left(\cos \varphi - \cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right);$$

$$p_C = u_C i_C = U_m I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = UI\left(\cos \varphi - \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right).$$

Отсюда

$$P = p_A + p_B + p_C = 3UI \cos \varphi = \text{const},$$

т.е. и для симметричной трехфазной цепи свойство уравновешенности доказано.

Измерение мощности в трехфазных цепях

Ниже рассмотрены практические схемы включения ваттметров для измерения мощности в трехфазных цепях.

Четырехпроводная система, несимметричный режим.

Представленная на рис. 8 схема называется схемой трех ваттметров.

Суммарная активная мощность цепи определяется как сумма показаний трех ваттметров

$$P = P_A + P_B + P_C.$$

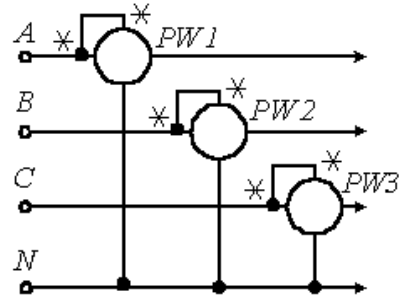


Рис.8

Четырехпроводная система, симметричный режим.

Если режим работы цепи симметричный, то для определения суммарной активной мощности достаточно ограничиться одним ваттметром (любым), включаемым по схеме на рис. 8. Тогда, например, при включении прибора в фазу А,

$$P = 3P_A. \quad (4)$$

Трехпроводная система, симметричный режим.

При отсутствии доступа к нейтральной точке последняя создается искусственно с помощью включения трех дополнительных резисторов по схеме «звезда», как показано на рис. 9 – схема ваттметра с искусственной нейтральной точкой. При этом необходимо выполнение условия $R = R_I + R_V$, где R_V – собственное сопротивление обмотки ваттметра. Тогда суммарная активная мощность трехфазной системы определяется согласно (4).

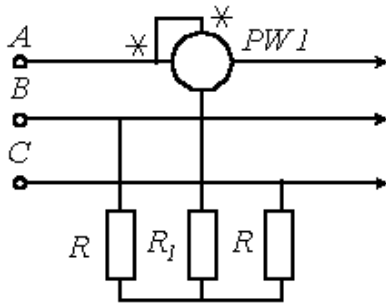


Рис.9

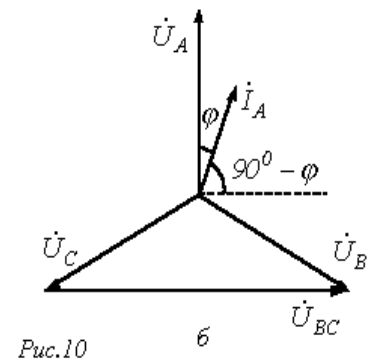
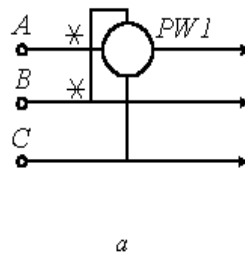


Рис.10

Трехпроводная система, симметричный режим; измерение реактивной мощности.

С помощью одного ваттметра при симметричном режиме работы цепи можно измерить ее реактивную мощность. В этом случае схема включения ваттметра будет иметь вид по рис. 10,а. Согласно векторной диаграмме на рис. 10,б измеряемая прибором мощность

$$P_I = U_n I_n \cos(90^\circ - \varphi) = U_n I_n \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, суммарная реактивная мощность

Контрольные вопросы и задачи

1. Какой многофазный приемник является симметричным?
2. Какой режим работы трехфазной цепи называется симметричным?

3. В чем заключается специфика расчета симметричных режимов работы трехфазных цепей?
4. С помощью каких приемов трехфазная симметричная схема сводится к расчетной однофазной?
5. Что такое напряжение смещения нейтрали, как оно определяется?
6. Как можно определить комплексы линейных напряжений, если заданы их модули?
7. Что обеспечивает нейтральный провод с нулевым сопротивлением?

Тема-22: Несимметричный режим работы в трехфазных цепях.

Цель: Изучение, расчет несимметричных режимов работы трехфазных систем и определение электрических параметров.

План:

1. Расчет несимметричных режимов работы соединения в звезду.
2. Применение векторных диаграмм для анализа несимметричных режимов
3. Трехпроводная система, несимметричный режим.

Ключевые слова: трехфазная система, звезда, треугольник, линия, фаза, фазные напряжения, фазные токи, линейные токи, линейные напряжения, несимметричный режим.

Расчет несимметричных режимов работы соединения в звезду

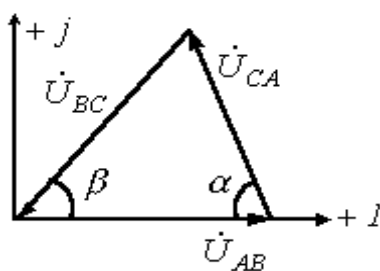


Рис.5

Если хотя бы одно из условий симметрии не выполняется, в трехфазной цепи имеет место несимметричный режим работы. Такие режимы при наличии в цепи только статической нагрузки и пренебрежении падением напряжения в генераторе рассчитываются для всей цепи в целом любым из рассмотренных ранее методов расчета. При этом фазные напряжения генератора заменяются соответствующими источниками ЭДС. Можно отметить, что, поскольку в многофазных цепях, помимо

токов, обычно представляют интерес также потенциалы узлов, чаще других для расчета сложных схем применяется метод узловых потенциалов. Для анализа несимметричных режимов работы трехфазных цепей с электрическими машинами в основном применяется метод симметричных составляющих, который будет рассмотрен далее.

П рис заданных линейных напряжениях наиболее просто рассчитываются трехфазные цепи при соединении в треугольник. Пусть в схеме на рис. 2,а $Z_{AB} \neq Z_{BC} \neq Z_{CA}$. Тогда при известных комплексах линейных напряжений в соответствии с законом Ома

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}}; \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}}; \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}.$$

По найденным фазным токам приемника на основании первого закона Кирхгофа определяются линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Обычно на практике известны не комплексы линейных напряжений, а их модули. В этом случае необходимо предварительное определение начальных фаз этих напряжений, что можно осуществить, например, графически. Для этого, приняв $\dot{U}_{AB} = U_{AB} e^{j0}$, по заданным модулям напряжений, строим треугольник (см. рис.5), из которого (путем замера) определяем значения углов α и β .

$$\dot{U}_{BC} = U_{BC} e^{-j(\pi-\beta)};$$

$$\text{Тогда } \dot{U}_{CA} = U_{CA} e^{j(\pi-\alpha)}.$$

Искомые углы α и β могут быть также найдены аналитически на основании теоремы косинусов:

$$U_{BC}^2 = U_{AB}^2 + U_{CA}^2 - 2U_{AB}U_{CA} \cos \alpha;$$

$$U_{CA}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - 2U_{AB}U_{BC} \cos \beta.$$

При соединении фаз генератора и нагрузки в звезду и наличии нейтрального

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AN} \underline{Y}_A + \dot{U}_{BN} \underline{Y}_B + \dot{U}_{CN} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} \quad (1)$$

провода с нулевым сопротивлением фазные напряжения нагрузки равны соответствующим напряжениям на фазах источника. В этом случае фазные токи легко определяются по закону Ома, т.е. путем деления известных напряжений на фазах потребителя на соответствующие сопротивления. Однако, если сопротивление нейтрального провода велико или он отсутствует, требуется более сложный расчет.

Рассмотрим трехфазную цепь на рис. 6,а. При симметричном питании и несимметричной нагрузке ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$) ей в общем случае будет соответствовать векторная диаграмма напряжений (см. рис. 6,б), на которой нейтральные точки источника и приемника занимают разные положения, т.е. $\phi_N \neq \phi_{N'}$.

Разность потенциалов нейтральных точек генератора и нагрузки называется напряжением смещения нейтральной точки (обычно принимается, что $\phi_N = 0$) или просто напряжением смещения нейтрали. Чем оно больше, тем сильнее не симметрия фазных напряжений на нагрузке, что наглядно иллюстрирует векторная диаграмма на рис. 6,б.

Для расчета токов в цепи на рис. 6,а необходимо знать напряжение смещения нейтрали. Если оно известно, то напряжения на фазах нагрузки равны:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{N'N}.$$

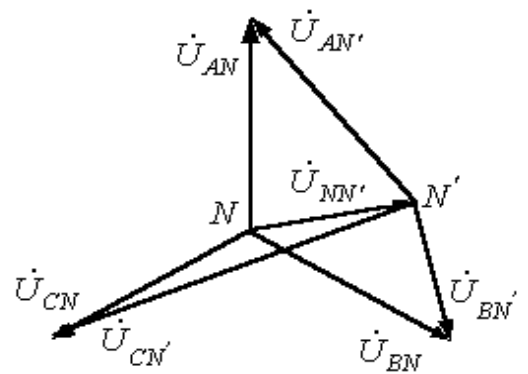
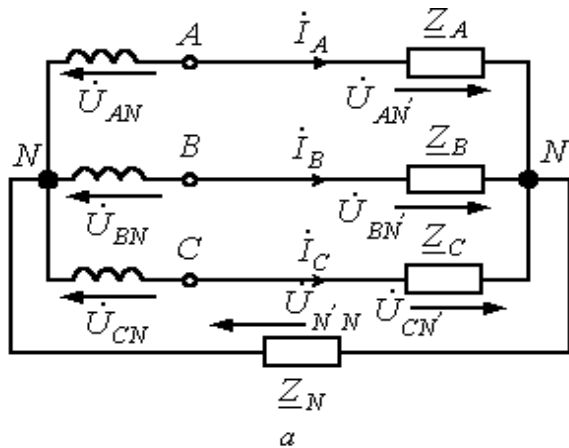


Рис.6

Тогда для искомых токов можно записать:

$$\dot{i}_A = \dot{U}_{AN'} \underline{Y}_A; \quad \dot{i}_B = \dot{U}_{BN'} \underline{Y}_B; \quad \dot{i}_C = \dot{U}_{CN'} \underline{Y}_C$$

Соотношение для напряжения смещения нейтрали, записанное на основании метода узловых потенциалов, имеет вид

При наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением $\underline{Y}_N \rightarrow \infty$, и из

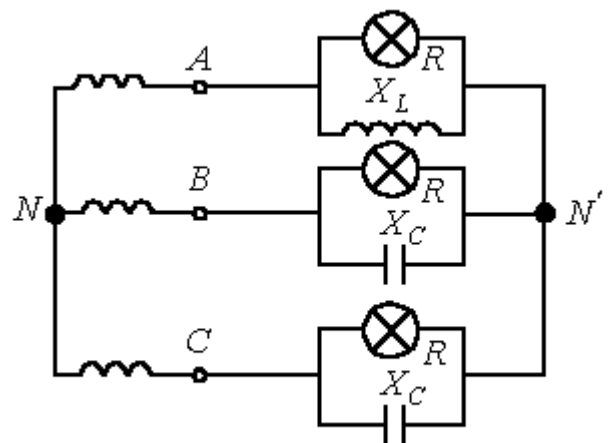


Рис.7

(1) $\dot{U}_{N'N} = 0$. В случае отсутствия нейтрального провода $\underline{Y}_N = 0$. При симметричной нагрузке ($\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C$) с учетом того, что $\dot{U}_{AN} + \dot{U}_{BN} + \dot{U}_{CN} = 0$, из (1) вытекает $\dot{U}_{N'N} = 0$.

В качестве примера анализа несимметричного режима работы цепи с использованием соотношения (1) определим, какая из ламп в схеме на рис. 7 с прямым чередованием фаз источника будет гореть ярче, если $R = X_L = X_C$.

Запишем выражения комплексных сопротивлений фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_A = \frac{RjX_L}{R + jX_L} = \frac{jR}{1 + j} = \frac{R}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ};$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{-jR}{1 - j} = \frac{R}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}.$$

Тогда для напряжения смещения нейтрали будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{U}_{N'N} &= \frac{\frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} + \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{U_\phi \sqrt{2} \left(\frac{1}{e^{j45^\circ}} + \frac{e^{-j120^\circ}}{e^{-j45^\circ}} + \frac{e^{j120^\circ}}{e^{-j45^\circ}} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{R} \left(\frac{1}{e^{j45^\circ}} + \frac{2}{e^{-j45^\circ}} \right)} = \\ &= U_\phi \frac{e^{-j45^\circ} + e^{-j75^\circ} + e^{j165^\circ}}{e^{-j45^\circ} + 2e^{j45^\circ}} = 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ}. \end{aligned}$$

Напряжения на фазах нагрузки (здесь и далее индекс N у фазных напряжений источника опускается)

$$\dot{U}_{AN} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = U_\phi - 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ} = 1,34U_\phi e^{j26,6^\circ};$$

$$\dot{U}_{BN} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = U_\phi e^{-j120^\circ} - 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ} = 0,4U_\phi e^{j221,6^\circ};$$

$$\dot{U}_{CN} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = U_\phi e^{j120^\circ} - 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ} = 1,5U_\phi e^{j101,6^\circ}.$$

Таким образом, наиболее ярко будет гореть лампочка в фазе С.

В заключение отметим, что если при соединении в звезду задаются линейные напряжения (что обычно имеет место на практике), то с учетом того, что сумма последних равна нулю,

их можно однозначно задать с помощью двух источников ЭДС, например, $\dot{E}_A = \dot{U}_{AC}$ и $\dot{E}_B = \dot{U}_{BC}$. Тогда, поскольку при этом $\dot{E}_C = 0$, соотношение (1) трансформируется в формулу

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AC} \underline{Y}_A + \dot{U}_{BC} \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (2)$$

Применение векторных диаграмм для анализа несимметричных режимов

Несимметричные режимы в простейших характерных случаях (короткое замыкание и холостой ход) могут быть проанализированы на основе построения векторных диаграмм.

Рассмотрим режимы обрыва и короткого замыкания фазы при соединении в звезду для трех- и четырехпроводной систем. При этом будем проводить сопоставление с симметричным режимом работы цепи, фазные напряжения и токи в которой будут базовыми. Для этой цепи (см. рис.1,а) векторная диаграмма токов и напряжений приведена на рис. 1,б (принято, что нагрузка \underline{Z} носит активно-индуктивный характер). Здесь

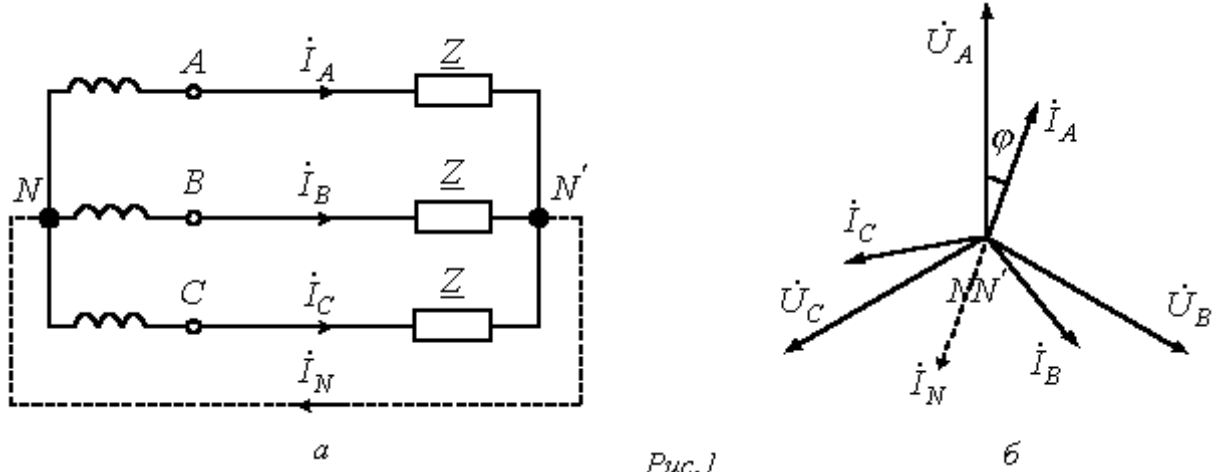


Рис.1

$$\dot{I}_A = \frac{U_\phi}{Z} e^{-j\varphi} = I_\phi e^{-j\varphi}; \quad \dot{I}_B = I_\phi e^{-j(120^\circ + \varphi)}; \quad \dot{I}_C = I_\phi e^{-j(\varphi - 120^\circ)}$$

При обрыве фазы А нагрузки приходим к векторной диаграмме на рис. 2. В этом случае

$$\dot{I}_A = 0; \quad \dot{U}_{BN'} = -\dot{U}_{CN'} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_\phi e^{-j90^\circ}; \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_C = \frac{\sqrt{3}}{2} I_\phi e^{-j(90^\circ + \varphi)}$$

При коротком замыкании фазы А (трехпроводная система) имеет место векторная диаграмма на рис. 3. Из нее вытекает:

$$\dot{U}_{BN'} = \sqrt{3} U_\phi e^{-j150^\circ}; \quad \dot{U}_{CN'} = \sqrt{3} U_\phi e^{j150^\circ};$$

$$\dot{I}_B = \sqrt{3} I_\phi e^{-j(150^\circ + \varphi)}; \quad \dot{I}_C = \sqrt{3} I_\phi e^{j(150^\circ - \varphi)}; \quad \dot{I}_A = 3 I_\phi e^{-j\varphi}$$

При обрыве фазы А в четырехпроводной системе (нейтральный провод на рис. 1,а показан пунктиром, а вектор тока \dot{I}_N - пунктиром на рис. 1,б)

$$\dot{I}_A = 0; \quad \dot{I}_B = I_\phi e^{-j(120^\circ + \varphi)}; \quad \dot{I}_C = I_\phi e^{-j(\varphi - 120^\circ)}; \quad \dot{I}_N = I_\phi e^{-j(\varphi + 180^\circ)}$$

Симметричный трехфазный приемник при соединении в треугольник и соответствующая этому случаю векторная диаграмма напряжений и токов приведены на рис. 4.

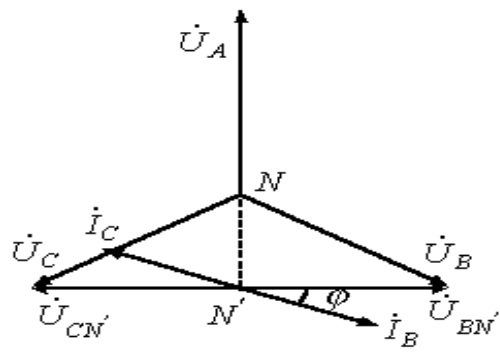


Рис.2

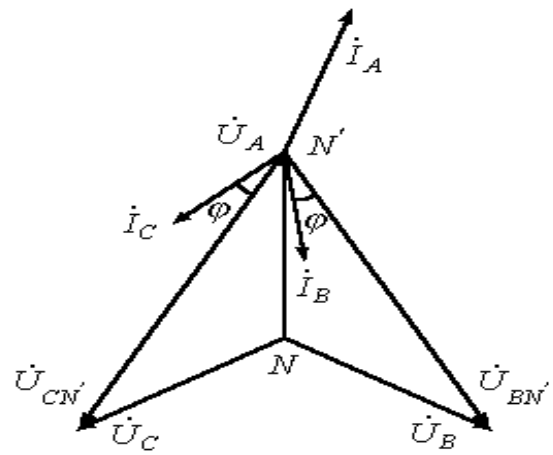
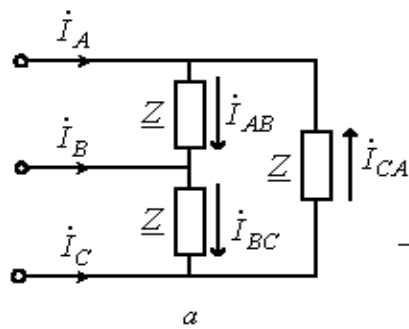
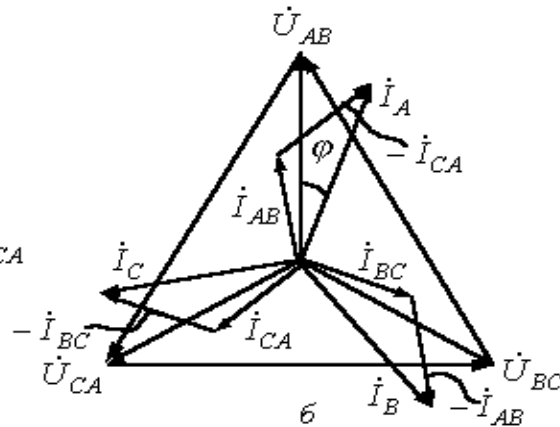


Рис.3



a



б

Рис.4

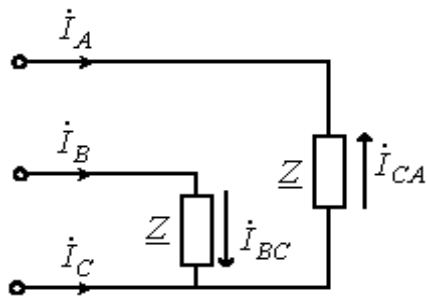


Рис.5

Здесь при том же способе соединения фаз генератора

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \sqrt{3}I_{\phi}e^{j(30^{\circ}-\varphi)} & \dot{I}_{BC} &= \sqrt{3}I_{\phi}e^{-j(90^{\circ}+\varphi)} \\ \dot{I}_{CA} &= \sqrt{3}I_{\phi}e^{j(150^{\circ}-\varphi)} & \dot{I}_A &= 3I_{\phi}e^{-j\varphi} \\ \dot{I}_B &= 3I_{\phi}e^{-j(120^{\circ}+\varphi)} & \dot{I}_C &= 3I_{\phi}e^{-j(\varphi-120^{\circ})} \end{aligned}$$

При обрыве провода в фазе А-В нагрузки, как это видно из схемы на рис. 5, $\dot{I}_A = -\dot{I}_{CA}$; $\dot{I}_B = \dot{I}_{BC}$, при этом

сами токи \dot{I}_{BC} и \dot{I}_{CA} в силу автономности режима

работы фаз при соединении нагрузки в треугольник такие же, как и в цепи на рис. 4,а. Таким образом,

$$\dot{I}_A = \sqrt{3}I_{\phi}e^{-j(\varphi+30^{\circ})}; \dot{I}_B = \sqrt{3}I_{\phi}e^{-j(90^{\circ}+\varphi)}; \dot{I}_C = 3I_{\phi}e^{-j(\varphi-120^{\circ})}$$

Цепь при обрыве линейного провода А-А' и соответствующая этому случаю векторная диаграмма приведены на рис.6.

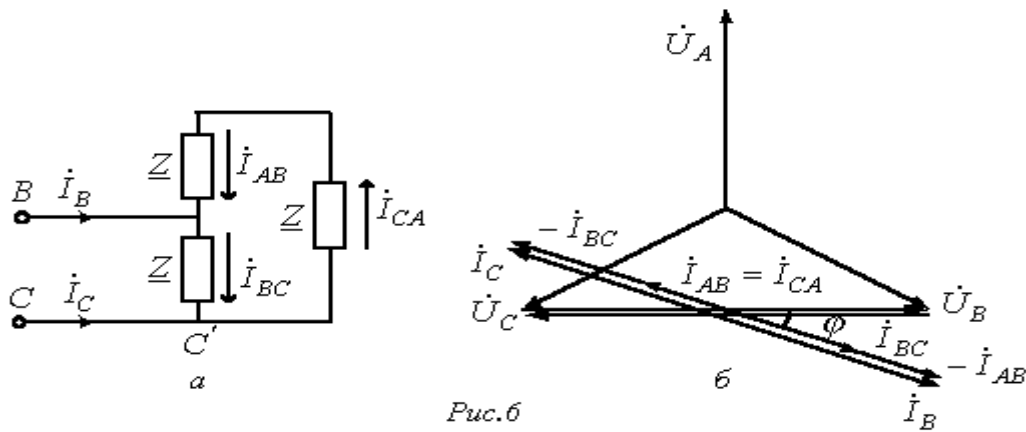


Рис.6

Здесь

$$\dot{I}_{AB} = \dot{I}_{CA} = \frac{\sqrt{3}U_{\phi}}{2Z} e^{j(90^{\circ}-\varphi)} = \frac{\sqrt{3}}{2} I_{\phi} e^{j(90^{\circ}-\varphi)}; \quad \dot{I}_{BC} = \sqrt{3} I_{\phi} e^{-j(90^{\circ}+\varphi)};$$

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_C = 1,5\sqrt{3} I_{\phi} e^{-j(90^{\circ}+\varphi)}$$

Трехпроводная система, несимметричный режим.

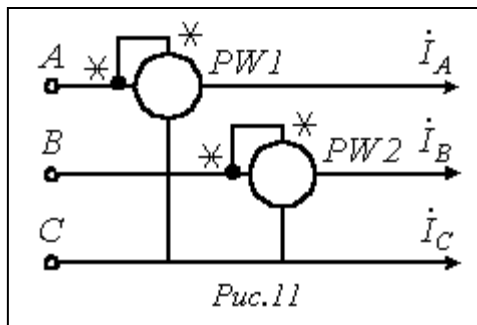


Рис.11

Представленная на рис. 11 схема называется схемой двух ваттметров. В ней сумма показаний приборов равна суммарной активной мощности цепи.

Действительно, показания приборов в данной схеме:

$$P_1 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{AC} I_A^*); \quad P_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{BC} I_B^*)$$

Тогда

$$P = P_1 + P_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^*) = \operatorname{Re}((\dot{U}_A - \dot{U}_C) I_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) I_B^*)$$

$$= \operatorname{Re}(\dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* - \dot{U}_C (I_A^* + I_B^*)) = \operatorname{Re}(\dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C I_C^*) =$$

В заключение отметим, что если в схеме на рис. 11 имеет место симметричный режим работы, то на основании показаний приборов можно определить суммарную реактивную мощность цепи

$$Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2). \quad (5)$$

Контрольные вопросы и задачи

1. В симметричной трехпроводной цепи произошел обрыв фазы. Что покажет вольтметр, включенный между нейтральными точками источника и приемника? Ответ: $0,5U_{\phi}$.
2. Во сколько раз мощность в цепи на рис. 6,а меньше мощности в цепи на рис. 4,а? Ответ: в два раза.
3. В цепи на рис. 10,а симметричная нагрузка составлена из резистивных элементов. Что покажет ваттметр? Ответ: $P_{W1} = 0$.
4. В цепи на рис. 10,а симметричная нагрузка с фазным сопротивлением $\underline{Z} = 60 + j80 \text{ Ом}$ соединена в звезду. Линейное напряжение $U_n = 380 \text{ В}$. Определить показание ваттметра. Ответ: $P_{W1} = 670 \text{ Вт}$.

4. В цепи на рис. 11 нагрузкой служат два одинаковых конденсатора с $X_C=100$ Ом, включенные между линейными проводами А и В, В и С соответственно. Линейное напряжение $U_{л} = 380$ В. Определить показания ваттметров. Ответ:
 $P_{W1} = -1250$ Вт; $P_{W2} = 1250$ Вт.

Тема-23: Условия получения, вращающегося магнитного поля

Цель: Изучение условия получения, вращающегося магнитного полями их применение

План:

1. Использование вращающегося магнитного поля.
2. Магнитное поле трехфазных обмоток.
3. Принцип работы асинхронного двигателя.
4. Магнитное поле одной обмотки.
5. Магнитное поле двух взаимно перпендикулярных в пространстве обмоток

Ключевые слова: Магнитное поля, асинхронный двигатель, трехфазная система, звезда, треугольник, линия, фаза, фазные напряжения, фазные токи, линейные токи, линейные напряжения.

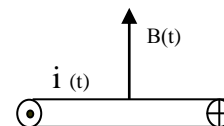
Использование вращающегося магнитного поля.

В трехфазных генераторах использовано свойство наведения ЭДС в неподвижных обмотках при вращении ротора, создающего постоянное магнитное поле, т.е. при пересечении обмоток статора вращающимся магнитным полем.

В генераторах, таким образом, магнитное поле «приводится» во вращение от посторонних двигателей (обычно пара - и гидротурбин). А для приёмников встает задача преобразования электромагнитной энергии в механические вращения механизмов и т.п. Для осуществления этих целей наиболее естественным и простым способом является создание механического вращающего момента при взаимодействии электрического тока в обмотках ротора с вращающимся магнитным полем. Огромным преимуществом трехфазных цепей является возможность создания простейших по конструкции, а потому и самых дешевых асинхронных электродвигателей, использующих вращающееся магнитное поле трехфазных обмоток статора. Условие получения вращающегося

магнитного поля неподвижными обмотками и будет посвящён этот параграф.

Магнитное поле одной обмотки.



Синусоидальный электрический ток в неподвижной обмотке (рис. 29) создаёт магнитное поле. Вектор индукции этого поля по правилу правого ходового винта ориентирован перпендикулярно плоскости обмотки в соответствии с направлением тока в обмотке. При изменении тока по синусоидальному закону индукция создаваемого им магнитного поля синхронно изменяется по синусоидальному закону во времени $B(t) = B_m \sin \omega t$ и сохраняет неизменной свою ориентацию в пространстве.

Такое магнитное поле называется пульсирующим. Изменение знака индукции на противоположный означает изменение на противоположное направление вектора индукции.

Очевидно, что одна обмотка не может создать вращающееся магнитное поле. Необходима система обмоток.

Магнитное поле двух взаимно перпендикулярных в пространстве обмоток.

Синусоидальные электрические токи в двух неподвижных взаимно перпендикулярных обмотках (рис.1) создают два пульсирующих магнитных поля. Векторы магнитных индукций этих полей в пространстве ориентированы перпендикулярно друг к другу.

Если токи этих двух обмоток изменяются синхронно, т.е. имеют одинаковую круговую частоту и начальную фазу, то результирующий вектор магнитной индукции, равный сумме индукций магнитных полей этих двух обмоток, является

также пульсирующим. Этот результирующий вектор индукции в пространстве будет ориентирован по биссектрисе угла между его составляющими, если амплитуды индукций одинаковы.

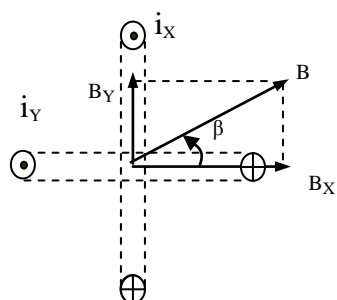


Рис. 1.

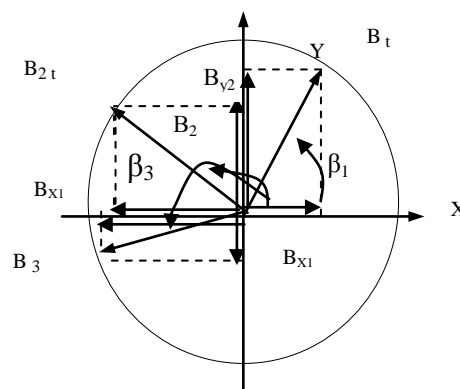


Рис2.

Следовательно, для создания вращающегося магнитного поля недостаточно разместить две обмотки с синусоидальными токами в пространстве перпендикулярно друг другу. Необходимо, кроме этого, сдвинуть по фазе токи этих обмоток на угол 90^0 .

Если синусоидальный ток горизонтальной обмотки создаёт магнитное поле с индукцией

$$B_y(t) = B_m \sin \omega t$$

то ток вертикальной обмотки, сдвинутый во времени на четверть периода, создаёт магнитное поле с индукцией

$$B_x(t) = B_m \cos \omega t$$

Вектор индукции результирующего магнитного поля имеет модуль B и направлен под углом β к оси X :

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = B_m; \quad \text{tg } \beta = \frac{B_y}{B_x} = \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \text{tg } \omega t$$

Отсюда угол поворота $\beta = \omega t$ прямо пропорционален времени. Следовательно, результирующее магнитное поле с постоянной по модулю индукцией в пространстве вращается с постоянной угловой частотой ω , равной круговой частоте синусоидальных токов обмоток. Положение вектора индукции для трех моментов времени t ; $2t$; $3t$ показано на рис. 2 [$B(t)$; $B(2t)$; $B(3t)$].

Вращающееся магнитное поле двух обмоток используется в маломощных однофазных двигателях, причём ток в одной из обмоток сдвигается по фазе на 90^0 конденсатором.

Магнитное поле трехфазных обмоток.

Для создания магнитного поля в трехфазных двигателях используются три обмотки, размещённые в пространстве под углом 120^0 друг к другу (рис. 3).

Токи этих трех обмоток (трех фаз) образуют симметричную трехфазную систему токов, т.е. сдвинуты по времени на треть периода. Соответственно индукции магнитных полей этих обмоток во времени сдвинуты на треть периода, т.е. по фазе на 120^0 .

$$B_A(t) = B_m \sin \omega t; \quad B_B(t) = B_m \sin(\omega t - 120^0) = B_m \cos 120^0 \sin \omega t - B_m \sin 120^0 \cos \omega t;$$

$$B_C(t) = B_m \sin(\omega t - 240^0) = B_m \cos 240^0 \sin \omega t - B_m \sin 240^0 \cos \omega t,$$

и в пространстве ориентированы под углами 120^0 друг к другу.

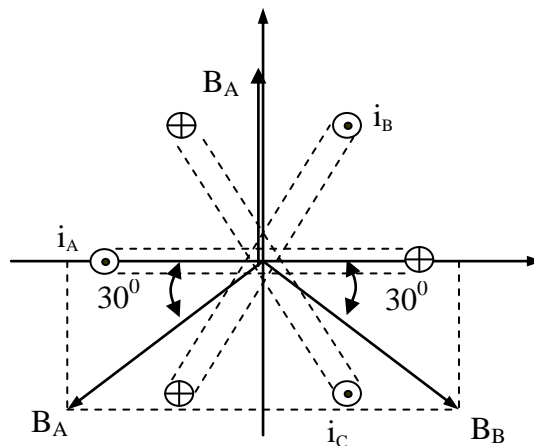


Рис.3.

Для определения вектора индукции результирующего магнитного поля спроектируем три вектора B_A , B_B , и B_C на вертикальную и горизонтальную оси в пространстве.

Проекция на вертикальную ось

$$B_y(t) = B_A - B_B \sin 30^\circ = B_C \sin 30^\circ = B_m \sin \omega t - \frac{B_m}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) -$$

$$-\frac{B_m}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.$$

Проекция на горизонтальную ось

$$B_x(t) = B_B \cos 30^\circ + B_C \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \left(-\frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} B_m \left(-\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) = \frac{3}{2} B_m \cos \omega t.$$

Вектор индукции результирующего магнитного поля имеет модуль

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1,5 B_m \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = 1,5 B_m$$

$$a \quad \text{tg } \beta = B_y / B_x = 1,5 B_m \sin \omega t / 1,5 B_m \cos \omega t = \text{tg } \omega t.$$

Следовательно, результирующее магнитное поле с постоянной по модулю индукцией в пространстве вращается с постоянной угловой скоростью ω , равной круговой частоте синусоидальных токов обмоток. Индукция результирующего магнитного поля трехфазных обмоток в 1,5 раза больше амплитуды индукции пульсирующего магнитного поля каждой из обмоток.

Для изменения направления вращения магнитного поля необходимо и достаточно изменить порядок чередования фаз, т.е. в обмотку фазы направить ток $i_C(t)$, а в обмотку фазы С - ток $i_B(t)$.

Принцип работы асинхронного двигателя.

Вращающееся магнитное поле находит широкое применение в асинхронных и синхронных двигателях. Оно создаёт в этих двигателях вращающий момент. Наиболее простыми дешевыми являются асинхронные двигатели с короткозамкнутым ротором. Ток короткозамкнутых роторов создаётся за счёт ЭДС, наводимых в роторе вращающимся магнитным полем статора, пересекающим стержни ротора. При взаимодействии наводимых токов ротора и магнитного поля статора создаётся момент, вызывающий вращение ротора в направлении вращения магнитного поля. Однако ротор не может вращаться со скоростью магнитного поля, так как в этом случае магнитное поле не будет пересекать стержни ротора и в них не будут наводиться ЭДС и появляться токи. Поэтому ротор всегда вращается с угловой скоростью ω несколько меньшей, чем скорость поля ω_0 . Это отставание ротора характеризуется "скольжением" S :

$$S = (\omega_0 - \omega) / \omega_0 \quad (15)$$

Чем больше скольжение, тем больше скорость движения поля относительно ротора, тем большие токи наводятся в роторе. Поэтому при увеличении внешнего тормозного момента скольжение двигателя увеличивается до тех пор, пока вращающийся момент за счёт электромагнитного взаимодействия не станет равным тормозному валу двигателя. В установившемся режиме скольжение у двигателя малой мощности достигает 10-15%, у двигателей большой мощности 2-5%.

Контрольные вопросы.

1. Какое поле называется пульсирующим?
2. Какое поле называется вращающимся круговым?
3. Какие условия необходимы для создания кругового вращающегося магнитного поля?
4. Каков принцип действия асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором?
5. Каков принцип действия асинхронного двигателя?
6. На какие синхронные скорости выпускаются в нашей стране двигатели переменного тока общепромышленного исполнения?
7. В двух одинаковых обмотках (рис.1) токи смещены по фазе 90° , но амплитуда тока i_y в два раза больше амплитуды тока i_x . Требуется нарисовать годограф индукции результирующего поля.
8. Постоянен ли во времени модуль индукции результирующего поля?
9. Постоянно ли угловая скорость вращения результирующего поля?
10. Как изменить направление вращения магнитного поля двух катушек (рис.1)
11. Определите частоту вращения магнитного поля (рис.3), если частота токов в обмотках $f=50$ Гц.

Тема-24: Симметричная составляющая в трехфазных токах и напряжениях.

Цель: Изучение метода симметричных составляющих, режимов работы трехфазных систем и определение электрических параметров.

План:

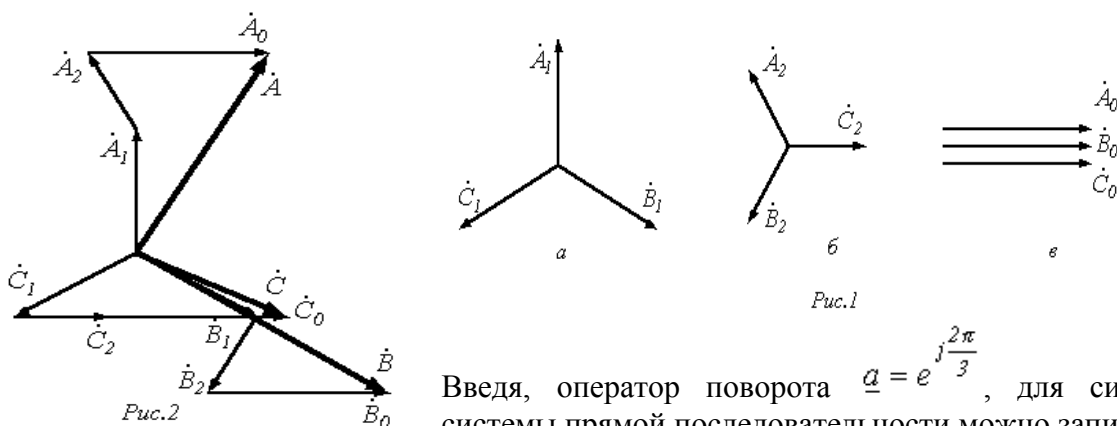
1. Метод симметричных составляющих расчета трехфазных цепей.
2. Свойства симметричных составляющих токов и напряжений различных последовательностей.
3. Сопротивления симметричной трехфазной цепи для токов различных последовательностей.

Ключевые слова: трехфазная система, звезда, треугольник, линия, фаза, фазные напряжения, фазные токи, линейные токи, линейные напряжения, несимметричный режим.

Метод симметричных составляющих расчета трехфазных цепей.

Метод симметричных составляющих относится к специальным методам расчета трехфазных цепей и широко применяется для анализа несимметричных режимов их работы, в том числе с нестатической нагрузкой. В основе метода лежит представление несимметричной трехфазной системы переменных (ЭДС, токов, напряжений и т.п.) в виде суммы трех симметричных систем, которые называют симметричными составляющими. Различают симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей, которые различаются порядком чередования фаз.

Симметричную систему прямой последовательности образуют (см. рис. 1,а) три одинаковых по модулю вектора \dot{A}_1, \dot{B}_1 и \dot{C}_1 со сдвигом друг по отношению к другу на $2\pi/3$ рад., причем \dot{B}_1 отстает от \dot{A}_1 , а \dot{C}_1 - от \dot{B}_1 .



Вводя, оператор поворота $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, для симметричной системы прямой последовательности можно записать

$$\dot{B}_1 = \underline{a}^2 \dot{A}_1; \quad \dot{C}_1 = \underline{a} \dot{A}_1.$$

Симметричная система обратной последовательности образована равными по модулю векторами \dot{A}_2, \dot{B}_2 и \dot{C}_2 с относительным сдвигом по фазе на $2\pi/3$ рад., причем теперь \dot{C}_2 отстает от \dot{A}_2 , а \dot{B}_2 - от \dot{C}_2 (см. рис. 1,б). Для этой системы имеем

$$\dot{B}_2 = \underline{a} \dot{A}_2; \quad \dot{C}_2 = \underline{a}^2 \dot{A}_2.$$

Система нулевой последовательности состоит из трех векторов, одинаковых по модулю и фазе (см. рис. 1,в):

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0.$$

При сложении трех указанных систем векторов получается несимметричная система векторов (см. рис. 2).

Любая несимметричная система однозначно раскладывается на симметричные составляющие. Действительно,

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0; \quad (1)$$

$$\dot{B} = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0 = \underline{a}^2 \dot{A}_1 + \underline{a} \dot{A}_2 + \dot{A}_0; \quad (2)$$

$$\dot{C} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0 = \underline{a} \dot{A}_1 + \underline{a}^2 \dot{A}_2 + \dot{A}_0. \quad (3)$$

Таким образом, получена система из трех уравнений относительно трех неизвестных $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_0$, которые, следовательно, определяются однозначно. Для нахождения \dot{A}_0 сложим уравнения (1)...(3). Тогда, учитывая, что $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$, получим

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}). \quad (4)$$

Для нахождения \dot{A}_1 умножим (2) на \underline{a} , а (3) – на \underline{a}^2 , после чего полученные выражения сложим с (1). В результате приходим к соотношению

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \underline{a}\dot{B} + \underline{a}^2\dot{C}). \quad (5)$$

Для определения \dot{A}_2 с соотношением (1) складываем уравнения (2) и (3), предварительно умноженные соответственно на \underline{a}^2 и \underline{a} . В результате имеем:

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \underline{a}^2\dot{B} + \underline{a}\dot{C}). \quad (6)$$

Формулы (1)...(6) справедливы для любой системы векторов $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$, в том числе и для симметричной. В последнем случае $\dot{A} = \dot{A}_1; \dot{A}_2 = \dot{A}_0 = 0$.
В заключение раздела отметим, что помимо вычисления симметричные

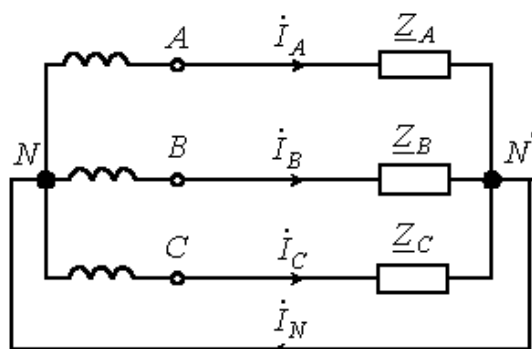


Рис.3

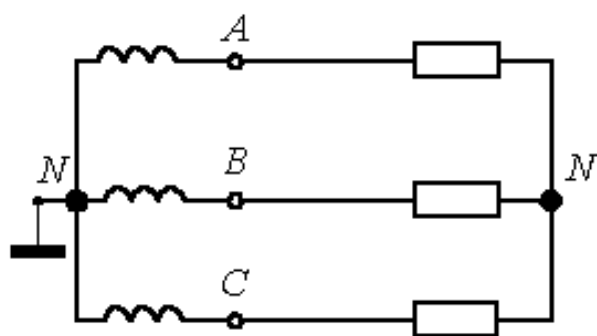


Рис.4

составляющие могут быть измерены с помощью специальных фильтров симметричных составляющих, используемых в устройствах релейной защиты и автоматики.

Рассмотрим четырехпроводную систему на рис. 3. Для тока в нейтральном проводе имеем

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Тогда с учетом (4)

$$\dot{I}_N = 3\dot{I}_0, \quad (7)$$

т.е. ток в нейтральном проводе равен утроенному току нулевой последовательности.

Если нейтрального провода нет, то $\dot{I}_N = 0$ и соответственно нет составляющих тока нулевой последовательности.

Поскольку сумма линейных напряжений равна нулю, то в соответствии с (4) линейные напряжения не содержат составляющих нулевой последовательности.

Рассмотрим трехпроводную несимметричную систему на рис. 4.

Здесь

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{N'N};$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{N'N};$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{N'N}.$$

Тогда, просуммировав эти соотношения, для симметричных составляющих нулевой последовательности фазных напряжений можно записать

$$\dot{U}_{\phi 0} = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{3} - \dot{U}_{N'N}.$$

Если система ЭДС генератора симметрична, то из последнего получаем

$$\dot{U}_{\phi 0} = -\dot{U}_{N'N}. \quad (8)$$

Из (8) вытекает:

А) в фазных напряжениях симметричного приемника отсутствуют симметричные составляющие нулевой последовательности;

В) симметричные составляющие нулевой последовательности фазных напряжений несимметричного приемника определяются величиной напряжения смещения нейтрали;

С) фазные напряжения несимметричных приемников, соединенных звездой, при питании от одного источника различаются только за счет симметричных составляющих нулевой последовательности;

д) симметричные составляющие прямой и обратной последовательностей у них одинаковы, поскольку однозначно связаны с соответствующими симметричными составляющими линейных напряжений.

При соединении нагрузки в треугольник фазные токи \dot{I}_{AB} , \dot{I}_{BC} и \dot{I}_{CA} могут содержать симметричные составляющие нулевой последовательности \dot{I}_0 . При этом \dot{I}_0 (см. рис. 5) циркулирует по контуру, образованному фазами нагрузки.

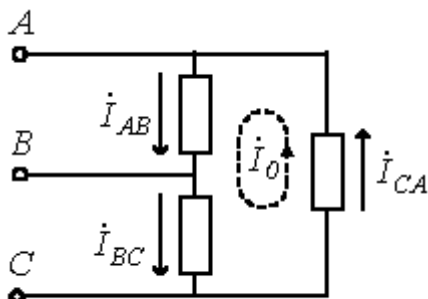


Рис. 5

Сопротивления симметричной трехфазной цепи для токов различных последовательностей.

Если к симметричной цепи приложена симметричная система фазных напряжений прямой (обратной или нулевой) последовательностей, то в ней возникает симметричная система токов прямой (обратной или нулевой) последовательности. При использовании метода симметричных составляющих на практике симметричные составляющие напряжений связаны с симметричными составляющими токов той же последовательности. Отношение симметричных составляющих фазных напряжений прямой (обратной или нулевой) последовательности к соответствующим симметричным составляющим токов называется комплексным сопротивлением прямой

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}_{A1}}{\dot{I}_{A1}} = \frac{\dot{U}_{B1}}{\dot{I}_{B1}} = \frac{\dot{U}_{C1}}{\dot{I}_{C1}},$$

обратной

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_{A2}}{\dot{I}_{A2}} = \frac{\dot{U}_{B2}}{\dot{I}_{B2}} = \frac{\dot{U}_{C2}}{\dot{I}_{C2}}$$

и нулевой

$$\underline{Z}_0 = \frac{\dot{U}_{A0}}{\dot{I}_{A0}} = \frac{\dot{U}_{B0}}{\dot{I}_{B0}} = \frac{\dot{U}_{C0}}{\dot{I}_{C0}}$$

последовательностей.

Пусть имеем участок цепи на рис. 6. Для фазы А этого участка можно записать

$$\dot{U}_A = (R + j\omega L)\dot{I}_A + j\omega M(\dot{I}_B + \dot{I}_C). \quad (9)$$

Тогда для симметричных составляющих прямой и обратной последовательностей с учетом, того, что $\dot{I}_{A1(2)} + \dot{I}_{B1(2)} + \dot{I}_{C1(2)} = 0$,

Контрольные вопросы

1. Какое поле называется пульсирующим?
2. Какое поле называется вращающимся круговым?
3. Какие условия необходимы для создания кругового вращающегося магнитного поля?
4. Какой принцип действия у асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором?
5. Какой принцип действия у синхронного двигателя?
6. На какие синхронные скорости выпускаются в нашей стране двигатели переменного тока общепромышленного исполнения?

Тема-25: Круговые векторные диаграммы.

Цель: Изучение Круговые векторные диаграммы.

План:

1. Круговые диаграммы разветвленных цепей.
2. Круговая диаграмма напряжения четырехполюсника.
- 3.

Если в разветвленной цепи сопротивление одной из ветвей, например, сопротивление второй ветви, изменяется, а все остальные сопротивления и ЭДС (токи) источников энергии неизменны, то, как было показано в разделе, токи и напряжения любых ветвей связаны линейными зависимостями. Это справедливо и для цепей синусоидального тока. В частности, для тока в первой ветви и тока во второй справедливо соотношение где - комплексные числа.

показана разветвленная цепь, в которой выделены источник напряжения в первой ветви и одно из сопротивлений, входящее в состав второй ветви. Остальная часть цепи, которая может содержать источники питания (активная цепь), показана в виде активного четырехполюсника А. Пусть (модуль сопротивления) изменяется, а аргумент остается неизменным; тогда,

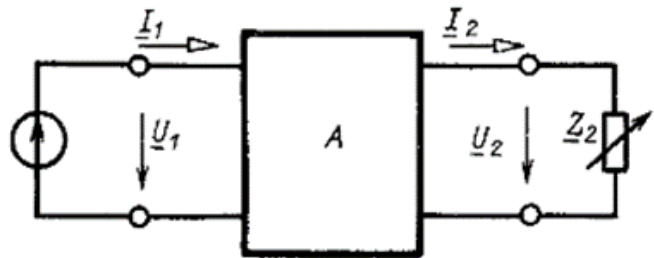


рис 9.8

рассматривая всю цепь относительно сопротивления как активный двухполюсник, приходем к заключению, что конец вектора перемещается по дуге окружности. Покажем, что в этом случае диаграммой тока также является дуга окружности. Пусть дуга (рис. 9.9) представляет круговую диаграмму тока. Умножение на приводит к изменению длины вектора в b раз и к повороту его на угол. Поэтому диаграмма вектора представляется дугой окружности OK' , проходящей через точку o , повернутой относительно дуги на угол и имеющей радиус, в b раз больший радиуса дуги. Перенеся дугу OK' параллельно вектору на отрезок, равный длине вектора, получим дугу K_1 . Конец вектора как это

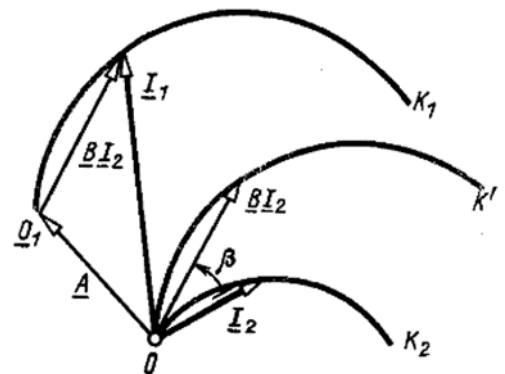


Рис 9.9

следует из построения, находится на дуге окружности т. е. дуга - круговая диаграмма тока. Итак, если в какой-либо ветви разветвленной цепи изменяется только модуль одного из сопротивлений и остаются неизменными ЭДС (токи) всех источников питания, то годографом вектора тока любой из ветвей служит круговая диаграмма. Так как напряжения и токи любых ветвей связаны линейными зависимостями, то и для всех изменяющихся напряжений получаются годографы - круговые диаграммы. Чтобы определить комплексы линейного соотношения (9.6), нужно знать токи для каких-либо двух режимов при двух различных значениях, например при (т. е. при разомкнутой ветви 2) и ток I_2 . Согласно (9.6), откуда $I_1 = k I_2$, т.е. коэффициент равен току в ветви 1 при разомкнутой ветви 2. При (т. е. при коротком замыкании ветви 2) обозначим токи I_1 и I_2 . Подставив эти значения в (9.6), получим

Рис. 9.8

Пример 9.2. В цепи, показанной на рис. 9.11, изменяется от 0 до. Построить круговую диаграмму тока и определить по ней значения в двух режимах при и при

Решение. Находим величины, необходимые для построения круговой диаграммы и для определения масштабов:

Выбираем масштаб и откладываем векторы (рис. 9.12). Обратим внимание, что на рис. 9.12 система координатных осей повернута на 90° против движения часовой стрелки по сравнению с ее обычным расположением. Ось положительных действительных величин направлена вверх, а ось положительных мнимых - влево. Такое расположение осей применяют часто, желая направить вектор напряжения или ЭДС вертикально при нулевой начальной фазе. Заметим, что такое расположение вектора напряжения было и на рис. 9.4 и 9.10. На рис. 9.12 вектор ЭДС не изображен, поскольку он не нужен для решения задачи.

Проводим хорду. Выбираем масштаб и откладываем отрезок Из точки A под углом проводим линию изменяющегося параметра AN'. Опускаем перпендикуляр на линию AN' и восстанавливаем перпендикуляр к середине хорды. Получаем точку C - центр круговой диаграммы.

Ток измеряется отрезком OM, ток - отрезком, напряжение - отрезком KM, сопротивление - отрезком AN. Масштабы были выбраны, масштабы Ток если отрезок имеет наибольшую длину, т. е. если точка M занимает положение.

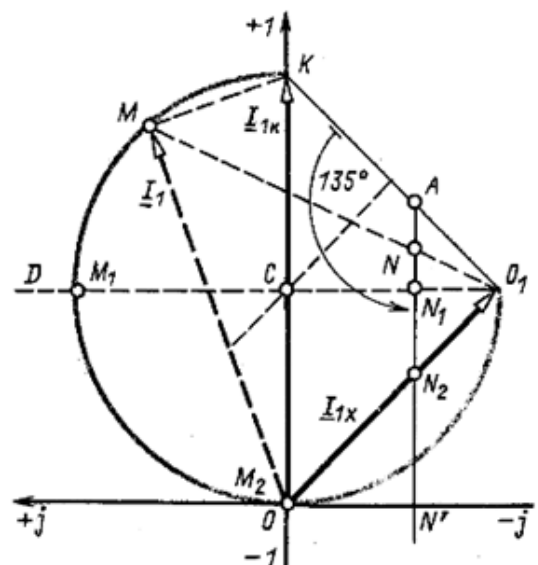
Круговая диаграмма напряжения четырехполюсника.

Пусть напряжение четырехполюсника рис. 4.2, а неизменно по модулю, фазе и частоте, а нагрузка на выходе его изменяется только по модулю, так что характеризующий ее угол остается постоянным. В этом случае для тока напряжения тока могут быть построены круговые диаграммы. Сначала рассмотрим круговую диаграмму тока. С этой целью схему четырехполюсника рис. 4.2, а, исключая нагрузку заменим активным двухполюсником и по методу эквивалентного генератора найдем ток I_2 в ветви

где — напряжение между точками и q при размыкании ветви; — входное сопротивление по отношению к зажимам при короткозамкнутых зажимах (в схеме рис. 4.2, а к зажимам присоединен источник ЭДС). Разделив числитель и знаменатель правой части (4.35) на и учтя, что где — ток коротко замкнутой ветви получим

Из уравнения (4.35а) следует, что вектор тока скользит, но дуге окружности, хордой которой является ток

Построим круговую диаграмму тока на входе четырехполюсника. Из предыдущего [см. формулу (2.14)]



известно, что при изменении сопротивления в одной из ветвей линейной электрической цепи два тока в любых двух гвях этой цепи связаны соотношением, следовательно, ток может быть линейно выражен через ток. Определим коэффициенты a и b . Если ветвь разомкнута, то $i = 0$. При этом из (4.36) найдем b . Если ветвь короткозамкнута, то $U = 0$. Поэтому

Подставив (4.37) и (4.38) в (4.36), получим

Уравнение (4.39) свидетельствует о том, что геометрическим местом концов вектора тока также является дуга окружности. Хордой ее является разность $i_1 - i_2$; вектор смещает начало отсчета.

Аналогичным образом строят круговую диаграмму напряжения. Так, если в какой-то схеме изменяется по модулю сопротивление в одной, например, второй ветви, то для напряжения на участке этой схемы можно записать выражение, аналогичное (4.39)

где U_0 — напряжение на зажимах при $R = R_0$ — напряжение на зажимах при $R = \infty$ — выходное сопротивление схемы относительно зажимов, к которым присоединено сопротивление R

Формула (4.40) выведена на основании выражения $i = \frac{U}{R + R_0}$ и (4.35). Пример 55. Построить круговую диаграмму тока схемы рис. 4.23, а, в которой. Нагрузкой четырехполюсника является индуктивное сопротивление, которое может изменяться от 0 до ∞

Решение. Найдем ток холостого хода при разомкнутой выходной ветви:

Определим ток короткого замыкания при коротком замыкании нагрузки

Рассчитаем входное сопротивление со стороны зажимов при коротком замыкании зажимов

Следовательно, Угол

Круговая диаграмма тока построена на рис. 4.23, б. Хордой окружности является разность $i_1 - i_2$. Угол α поэтому для определения положения касательной он отложен от продолжения хорды против часовой стрелки. Диаграмма носит несколько необычный характер: рабочая часть дуги занимает почти целую окружность

Для определения положения конца вектора из конца вектора через точку на линии, соответствующую заданному значению, проводят прямую до пересечения с рабочей частью дуги окружности. При $R = 0$ ток опережает ЭДС на 90° .

Контрольные вопросы:

1. Что такое круговые векторные диаграммы?
2. Что такое круговые диаграммы разветвленных цепей?
3. Как используются круговые векторные диаграммы?
4. Что такое неразветвленная цепь круговых векторных диаграмм?

Тема-26: Четырехполюсники

Цель: Изучение типов и схем четырёхполюсников

План:

1. Четырехполюсник и его основные уравнения.
2. Т-образный четырёхполюсник.
3. П-образный четырёхполюсник

Ключевые слова:Четырехполюсник, Т-образный четырёхполюсник, П-образный четырёхполюсник, пассив, актив.

Четырехполюсник и его основные уравнения.

При анализе электрических цепей в задачах исследования взаимосвязи между переменными (токами, напряжениями, мощностями и т.п.) двух каких-то ветвей схемы широко используется теория четырехполюсников. Четырехполюсник – это часть схемы произвольной конфигурации, имеющая две пары зажимов (отсюда и произошло его название), обычно называемые входными и выходными.

Примерами четырехполюсника являются трансформатор, усилитель, потенциометр, линия электропередачи и другие электротехнические устройства, у которых можно выделить две пары полюсов.

В общем случае четырехполюсники можно разделить на активные, в структуру которых входят источники энергии, и пассивные, ветви которых не содержат источников энергии.

Ниже будут рассмотрены элементы теории пассивных четырехполюсников.

Для записи уравнений четырехполюсника выделим в произвольной схеме ветвь с единственным источником энергии и любую другую ветвь с некоторым сопротивлением Z_2 (см. рис. 1,а).

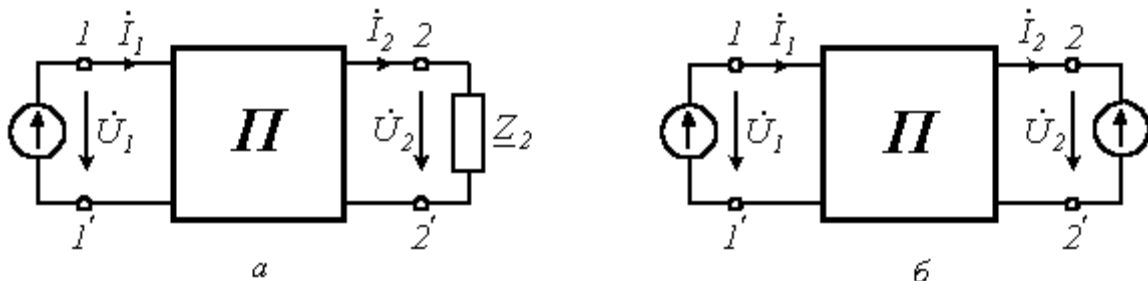
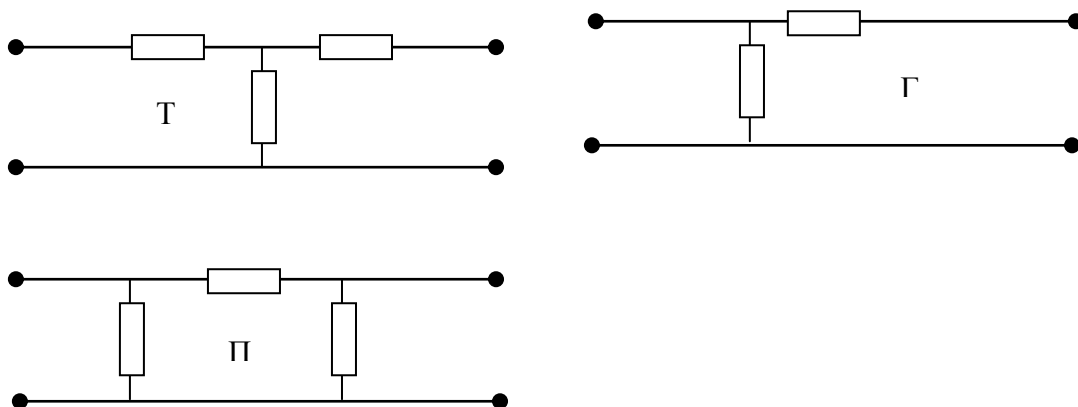


Рис.1

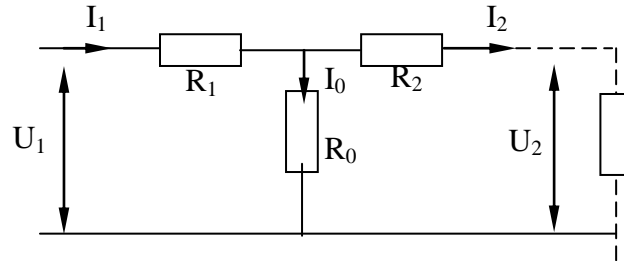


При определении коэффициентов четырехполюсника расчетным путем должны быть известны схема соединения и величины сопротивлений четырехполюсника. Как было отмечено ранее, пассивный четырехполюсник характеризуется тремя

независимыми постоянными коэффициентами. Следовательно, пассивный четырехполюсник можно представить в виде трехэлементной эквивалентной Т-, П- или Г-образной схемы замещения.

Т-образный четырехполюсник.

Для Т-образного четырехполюсника схема замещения



$$I_1 = I_2 + I_0 = I_2 + \frac{I_2 R_2 + U_2}{R_0} = I_2 + \frac{I_2 R_2}{R_0} + \frac{U_2}{R_0} = I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) + \frac{U_2}{R_0},$$

$$U_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + U_2 = \left[I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) + \frac{U_2}{R_0} \right] R_1 + I_2 R_2 + U_2 = I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) R_1 + \frac{U_2}{R_0} R_1 + I_2 R_2 + U_2 =$$

$$I_2 \left(R_1 + \frac{R_2 R_1}{R_0} \right) + \frac{U_2}{R_0} R_1 + I_2 R_2 + U_2 = I_2 \left(R_1 + R_2 + \frac{R_2 \cdot R_1}{R_0} \right) + U_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_0} \right).$$

если равно $A = 1 + \frac{R_1}{R_0}$, $B = R_1 + R_2 + \frac{R_2 \cdot R_1}{R_0}$, $C = \frac{1}{R_0}$, $D = 1 + \frac{R_1}{R_0}$ то основные

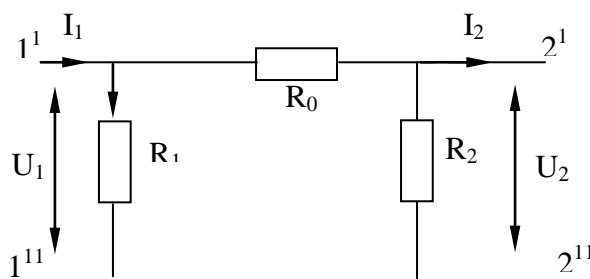
уравнений четырехполюсника :

$$U_1 = AU_2 + BI_2$$

$$I_1 = CU_2 + DI_2.$$

П-образный четырехполюсник

Для П-образного четырехполюсника схема замещения



$$U_1 = \left(I_2 + \frac{U_2}{R_2} \right) R_0 + U_2 = I_2 R_0 + \frac{U_2}{R_2} R_0 + U_2 = \left(1 + \frac{R_0}{R_2} \right) U_2 + I_2 R_0,$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + I_2 = \left[\left(1 + \frac{R_0}{R_2} \right) U_2 + I_2 R_0 \right] \frac{1}{R_0} + \frac{U_2}{R_2} + I_2 = \left(1 + \frac{R_0}{R_2} \right) \frac{1}{R_1} U_2 + I_2 \frac{R_0}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + I_2 =$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_0}{R_1 + R_2} \right) U_2 + \frac{1}{R_2} U_2 + I_2 + I_2 \frac{R_0}{R_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{R_0}{R_1 R_2} \right) U_2 + \left(1 + \frac{R_0}{R_1} \right) I_2.$$

если $A = 1 + \frac{R_0}{R_2}$; $B = R_0$; $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{R_0}{R_1 R_2}$, $D = 1 + \frac{R_0}{R_1}$ то основные уравнений

четырёхполюсника

$$U_1 = AU_2 + BI_2,$$

$$I_1 = CU_2 + DI_2.$$

Коэффициенты А и D безразмерны, коэффициент имеет размерность Ом, коэффициент С - Сим

Из вышесказанного можно сделать вывод, что, зная коэффициенты четырехполюсника, всегда можно найти параметры Т- и П-образных схем его замещения. Четырехполюсник называется симметричным, если при перемене местами источника питания и нагрузки токи в источнике питания

Контрольные вопросы и задачи

2. Для решения каких задач применяется теория четырехполюсников?
3. Сколько коэффициентов четырехполюсника являются независимыми?
4. Какой четырехполюсник называется симметричным?
5. Как можно определить коэффициенты четырехполюсника?
6. Как определяются коэффициенты одной формы записи уравнений четырехполюсника через коэффициенты другой?
7. Что определяет коэффициент распространения?
8. Определить связь коэффициентов Y-, H- и G-форм с коэффициентами A-формы.
9. Определить коэффициенты А, В, С и D для П-образной схемы замещения четырехполюсника на рис. 3,б.

Тема-27: Схема замещения четырехполюсников.

Цель: Изучение типов и схем замещений четырёхполюсников

План:

1. Четырёхполюсник и его основные уравнения.
2. Определение коэффициентов четырёхполюсника.
3. Характеристическое сопротивление и коэффициент распространения симметричного четырёхполюсника.

Ключевые слова: Четырёхполюсник, Т-образный четырёхполюсник, П-образный четырёхполюсник, пассивный и активный четырёхполюсник.

Четырёхполюсник и его основные уравнения.

В соответствии с принципом компенсации заменим исходное сопротивление \underline{Z}_2 источником с напряжением $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_2$ (см. рис. 1,б).

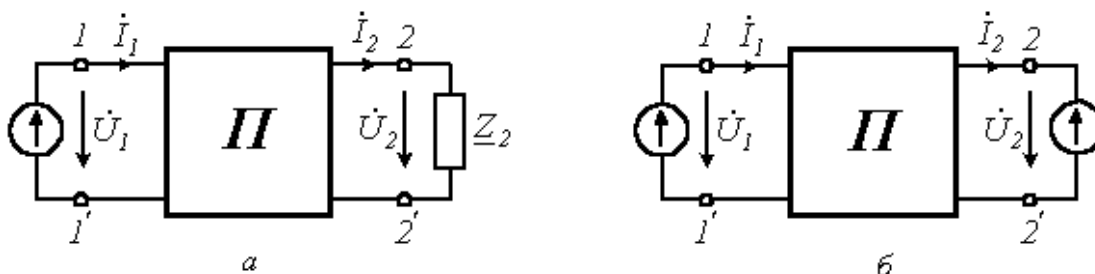


Рис.1

Тогда на основании метода наложения для цепи на рис. 1,б можно записать

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 - \underline{Y}_{12} \dot{U}_2; \quad (1)$$

$$\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 - \underline{Y}_{22} \dot{U}_2. \quad (2)$$

Решая полученные уравнения (1) и (2) относительно напряжения и тока на первичных зажимах, получим

$$\dot{U}_1 = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{\underline{Y}_{21}} \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \left(\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \dot{U}_2 + \frac{1}{\underline{Y}_{21}} \dot{I}_2 \right) - \underline{Y}_{12} \dot{U}_2 = \frac{\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}} \dot{U}_2 + \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \dot{I}_2$$

или

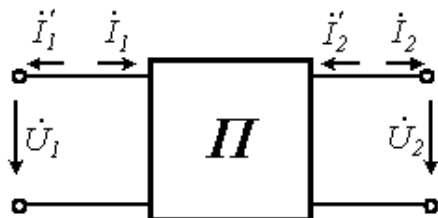


Рис.2

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2; \quad (3)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2, \quad (4)$$

где $\underline{A} = \underline{Y}_{22}/\underline{Y}_{21}$; $\underline{B} = 1/\underline{Y}_{21}$; $\underline{C} = (\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21})/\underline{Y}_{21}$; $\underline{D} = \underline{Y}_{11}/\underline{Y}_{21}$ - коэффициенты четырехполюсника.

Учитывая, что в соответствии с принципом взаимности $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$, видно, что коэффициенты четырехполюсника связаны между собой соотношением

$$\underline{AD} - \underline{BC} = \frac{\underline{Y}_{22}\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}\underline{Y}_{21}} - \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}\underline{Y}_{21}} = 1 \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) представляют собой основные уравнения четырехполюсника; их также называют уравнениями четырехполюсника в А-форме (см. табл. 1). Вообще говоря, существует шесть форм записи уравнений пассивного четырехполюсника. Действительно, четырехполюсник характеризуется двумя напряжениями \dot{U}_1 и \dot{U}_2 и двумя токами \dot{I}_1 и \dot{I}_2 . Любые две величины можно выразить через остальные. Так как число сочетаний из четырех по два равно шести, то и возможно шесть форм записи уравнений пассивного четырехполюсника, которые приведены в табл. 1. Положительные направления токов для различных форм записи уравнений приведены на рис. 2. Отметим, что выбор той или иной формы уравнений определяется областью и типом решаемой задачи.

Таблица 1. Формы записи уравнений пассивного четырехполюсника

Форма	Уравнения	Связь с коэффициентами основных уравнений
А-форма	$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2;$ $\dot{I}_1 = \underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}_2;$	
Y-форма	$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2;$ $\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2;$	$\underline{Y}_{11} = \underline{D}/\underline{B}; \quad \underline{Y}_{12} = -1/\underline{B};$ $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \quad \underline{Y}_{22} = \underline{A}/\underline{B};$
Z-форма	$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2;$ $\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2;$	$\underline{Z}_{11} = \underline{A}/\underline{C}; \quad \underline{Z}_{12} = 1/\underline{C};$ $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \quad \underline{Z}_{22} = \underline{D}/\underline{C};$
H-форма	$\dot{U}_1 = \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{H}_{12}\dot{U}_2;$ $\dot{I}_2 = \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2;$	$\underline{H}_{11} = \underline{B}/\underline{D}; \quad \underline{H}_{12} = 1/\underline{D};$ $\underline{H}_{21} = -\underline{H}_{12}; \quad \underline{H}_{22} = \underline{C}/\underline{D};$
G-форма	$\dot{I}_1 = \underline{G}_{11}\dot{U}_1 + \underline{G}_{12}\dot{I}_2;$ $\dot{U}_2 = \underline{G}_{21}\dot{U}_1 + \underline{G}_{22}\dot{I}_2;$	$\underline{G}_{11} = \underline{C}/\underline{A}; \quad \underline{G}_{12} = -1/\underline{A};$ $\underline{G}_{21} = -\underline{G}_{12}; \quad \underline{G}_{22} = \underline{B}/\underline{A};$
В-форма	$\dot{U}_2 = \underline{B}_{11}\dot{U}_1 + \underline{B}_{12}\dot{I}_1;$ $\dot{I}_2 = \underline{B}_{21}\dot{U}_1 + \underline{B}_{22}\dot{I}_1;$	$\underline{B}_{11} = \underline{D}; \quad \underline{B}_{12} = \underline{B};$ $\underline{B}_{21} = \underline{C}; \quad \underline{B}_{22} = \underline{A}.$

Если при перемене местами источника и приемника энергии их токи не меняются, то такой четырехполюсник называется симметричным. Как видно из сравнения А- и В-форм в табл. 1, это выполняется при $\underline{A} = \underline{D}$.

Четырехполюсники, не удовлетворяющие данному условию, называются несимметричными.

Определение коэффициентов четырехполюсника

При практическом использовании уравнений четырехполюсника для анализа цепей необходимо знать значения его коэффициентов. Коэффициенты четырехполюсника могут быть определены экспериментальным или расчетным путями. При этом в соответствии с соотношением (5) определение любых трех коэффициентов дает возможность определить и четвертый.

Один из наиболее удобных экспериментальных методов определения коэффициентов четырехполюсника основан на опытах холостого хода и короткого замыкания при питании со стороны вторичных зажимов и опыте холостого хода при питании со стороны первичных зажимов. В этом случае при $\dot{I}_2 = 0$ на основании уравнений (3) и (4)

$$\underline{Z}_{1XX} = \frac{\dot{U}_{1XX}}{\dot{I}_{1XX}} = \frac{A}{C} \quad (6)$$

$$\text{При } \dot{I}'_1 = 0 \quad \underline{Z}'_{2XX} = \frac{\dot{U}'_{2XX}}{\dot{I}'_{2XX}} = \frac{D}{C} \quad (7)$$

$$\text{и при } \dot{U}'_1 = 0 \quad \underline{Z}'_{2K3} = \frac{\dot{U}'_{2K3}}{\dot{I}'_{2K3}} = \frac{B}{A} \quad (8)$$

Решение уравнений (6)-(8) относительно коэффициентов четырехполюсника дает:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1XX}}{\underline{Z}_{2XX} - \underline{Z}'_{2K3}}}; \quad \underline{B} = \underline{A}\underline{Z}'_{2K3}; \quad \underline{C} = \frac{A}{\underline{Z}_{1XX}}; \quad \underline{D} = \underline{C}\underline{Z}_{2XX}.$$

Коэффициенты А и D безразмерны, коэффициент имеет размерность Ом, коэффициент С - Сим

При определении коэффициентов четырехполюсника расчетным путем должны быть известны схема соединения и величины сопротивлений четырехполюсника. Как было отмечено ранее, пассивный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми постоянными коэффициентами.

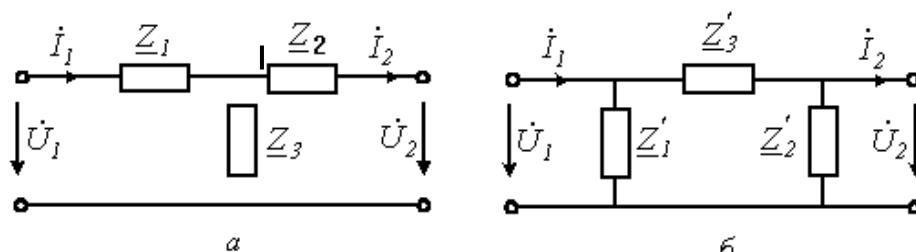


Рис.3

Для определения коэффициентов четырехполюсника для схемы на рис. 3,а с использованием первого и второго законов Кирхгофа выразим \dot{U}_1 и \dot{I}_1 через \dot{U}_2 и \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \dot{I}_2 \quad (9)$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2 + \dot{I}_1 \underline{Z}_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) \dot{U}_2 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \dot{I}_2 \quad (10)$$

Сопоставление полученных выражений (9) и (10) с соотношениями (3) и (4) дает:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3; \quad \underline{C} = 1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3.$$

Данная задача может быть решена и другим путем. При $\dot{I}_2 = 0$ (холостой ход со стороны вторичных зажимов) в соответствии с (3) и (4)

$$\dot{U}_{1XX} = \underline{A}\dot{U}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1XX} = \underline{C}\dot{U}_2;$$

но из схемы на рис. 3,а

$$\dot{I}_{1XX} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_3}, \quad \dot{U}_{1XX} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)\dot{I}_{1XX} = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right)\dot{U}_2;$$

откуда вытекает: $\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_3$ и $\underline{C} = 1/\underline{Z}_3$.

При $\dot{U}_2 = 0$ (короткое замыкание на вторичных зажимах)

$$\dot{U}_{1K3} = \underline{B}\dot{I}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1K3} = \underline{D}\dot{I}_2.$$

Из схемы на рис. 3,а

$$\dot{I}_{1K3} = \dot{I}_2 + \frac{\dot{I}_2 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right)\dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_{1K3} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{1K3} + \dot{I}_2 \underline{Z}_2 = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right)\dot{I}_2.$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}.$$

Следовательно,

Таким образом, получены те же самые результаты, что и в первом случае.

Коэффициенты четырехполюсника для схемы на рис. 3,б могут быть определены аналогично или на основании полученных для цепи на рис. 3,а с использованием рассмотренных ранее формул преобразования “звезда-треугольник”.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что зная коэффициенты четырехполюсника, всегда можно найти параметры Т- и П-образных схем его замещения.

На практике часто возникает потребность в переходе от одной формы записи уравнений четырехполюсника к другой. Для решения этой задачи, т.е. чтобы определить коэффициенты одной формы записи уравнений через коэффициенты другой, следует выразить какие-либо две одинаковые величины в этих формулах через две остальные и сопоставить их с учетом положительных направлений токов для каждой из этих форм. Так при переходе от А- к Z-форме на основании (4) имеем

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{\underline{C}}\dot{I}_1 - \frac{\underline{D}}{\underline{C}}\dot{I}_2 = \frac{1}{\underline{C}}\dot{I}_1 + \frac{\underline{D}}{\underline{C}}\dot{I}_2' \quad (11)$$

Подстановка соотношения (11) в (3) дает

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}\dot{I}_1 - \frac{\underline{AD}}{\underline{C}}\dot{I}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}\dot{I}_1 - \frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{C}}\dot{I}_2 = \\ &= \frac{\underline{A}}{\underline{C}}\dot{I}_1 - \frac{1}{\underline{C}}\dot{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} + \frac{1}{\underline{C}}\dot{I}_2'. \end{aligned} \quad (12)$$

Сопоставляя выражения (11) и (12) с уравнениями четырехполюсника в Z-форме (см. табл. 1), получим

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

При анализе работы четырехполюсника на нагрузку \underline{Z}_H удобно использовать понятие входного сопротивления с первичной стороны $\underline{Z}_{1вх}$ и коэффициента передачи

$\underline{K} = \dot{U}_2/\dot{U}_1$. Учитывая, что $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_H$ и $\dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}$, для этих параметров можно записать:

$$\underline{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}} = \frac{\underline{Z}_H}{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}};$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}}{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H}} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_H + \underline{D}}.$$

Зная \underline{K} , $\underline{Z}_{\text{вх}}$ и \dot{U}_1 , можно определить остальные переменные на входе и выходе четырехполосника: $\dot{U}_2 = \underline{K}\dot{U}_1$; $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_H$; $\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_{\text{вх}}$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Для решения каких задач применяется теория четырехполосников?
2. Сколько коэффициентов четырехполосника являются независимыми?
3. Какой четырехполосник называется симметричным?
4. Как можно определить коэффициенты четырехполосника?
5. Как определяются коэффициенты одной формы записи уравнений четырехполосника через коэффициенты другой?
6. Что определяет коэффициент распространения?
7. Определить связь коэффициентов Y-, H- и G-форм с коэффициентами A-формы.
8. Определить коэффициенты A, B, C и D для П-образной схемы замещения четырехполосника на рис. 3,б.

Ответ: $\underline{A} = 1 + \underline{Z}'_3 / \underline{Z}'_2$; $\underline{B} = \underline{Z}'_3$; $\underline{C} = (\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_3) / (\underline{Z}'_1 \underline{Z}'_2)$; $\underline{D} = 1 + \underline{Z}'_3 / \underline{Z}'_1$.

9. Коэффициенты уравнений пассивного четырехполосника $\underline{A} = 1 - j$; $\underline{B} = -j10 \text{ Ом}$
 $\underline{C} = -j0,1 \text{ См}$.
10. Определить параметры Т-образной схемы замещения. Ответ: $\underline{Z}_1 = 10 \text{ Ом}$;
 $\underline{Z}_2 = -j10 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_3 = j10 \text{ Ом}$.
11. Параметры Т-образной схемы замещения четырехполосника: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 10 \text{ Ом}$;
 $\underline{Z}_3 = j10 \text{ Ом}$.
12. Определить, при каком сопротивлении нагрузки входное сопротивление четырехполосника будет равно нагрузочному сопротивлению. Ответ:
 $\underline{Z}_H = 14,95e^{j31,72^\circ} \text{ Ом}$.

Тема-28: Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях.

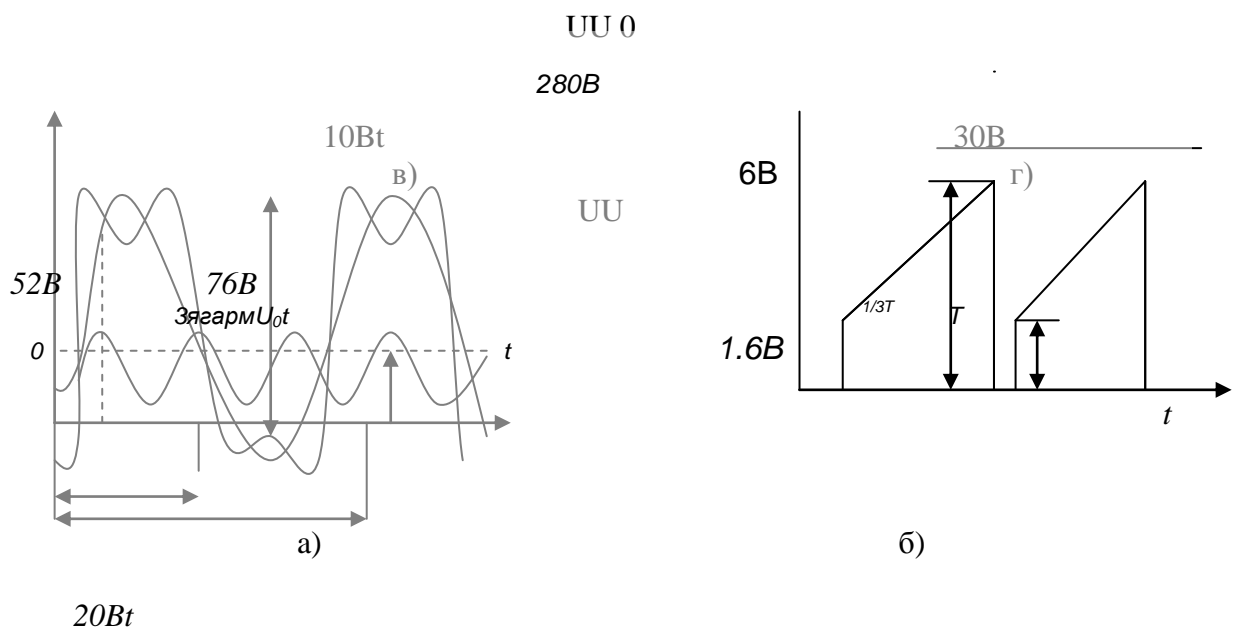
Цель: Изучение общих характеристик периодических несинусоидальных токов и напряжений.

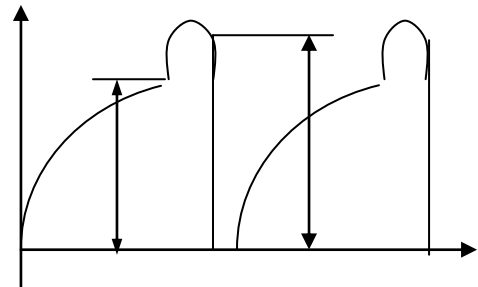
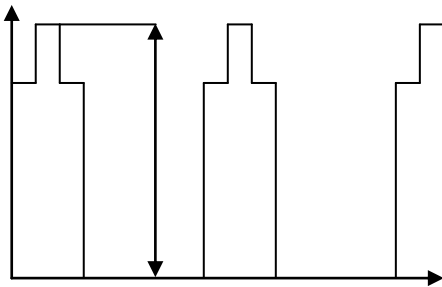
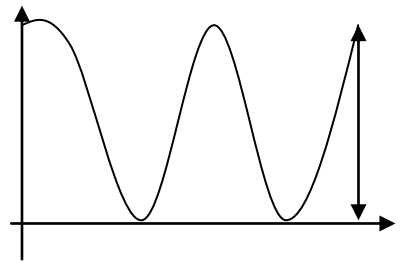
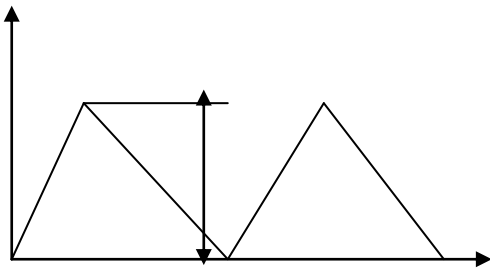
План:

1. Применение периодических несинусоидальных ЭДС, токов и напряжений.
2. Математическое описание несинусоидальных периодических сигналов.
3. Симметрия периодическая функция.
4. Экспериментальные методы разложения периодических сигналов на гармоники.

Ключевые слова: Несинусоидальная, несинусоидальная ЭДС, несинусоидальный ток, несинусоидальное напряжение, фазные токи, линейные токи, линейные напряжения.

Однако нередко случается, когда вследствие ряда причин (в основном нелинейность элементов) даже при синусоидальных ЭДС источников питания токи или напряжения имеют несинусоидальную форму. А для обеспечения целого ряда задач специально применяются периодически несинусоидальные напряжения и токи: для периодического включения указателей поворота автомобиля, для периодического включения сигнальных маяков на флоте, в авиации и т.д. Управление циклами развертки осциллографов, телевизоров, световых табло производится периодически напряжениями различной формы, в основном линейно-нарастающей или пилообразной. Наконец, синхронизация, цикличность и взаимодействие различных устройств ЭВМ и систем автоматики и управление немислимы без использования периодических электрических сигналов различной несинусоидальной формы. Необходимо отметить то, что периодические несинусоидальные сигналы могут содержать гораздо большую и разнообразную информацию (и по значению амплитуды сигнала и по временным интервалам, и по форме сигнала, т.е. характеру временных функций), чем синусоидальные величины. В зависимости от назначения на практике используются самые разнообразные формы кривой периодических сигналов. Например, только в одном устройстве-цветном телевизоре применяется более десятка периодических напряжений различной формы (рис., 1 а-е).





д) *Математическое описание несинусоидальных периодических сигналов.*

Из графиков периодических напряжений (рис.,1) видно, что форма кривой периодических сигналов чрезвычайно разнообразно, по этому непосредственно описать её математически и функциями является достаточно трудной задачей. Сравнительно просто это можно сделать лишь, для пилообразных или прямоугольных импульсов, но в этих случаях необходимо учитывать изломы и разрывы кривых.

Напршивается мысль: а нельзя ли привести периодические «нестандартные» сигналы к некоторой сумме стандартных, табличных сигналов, наиболее удобным из которых несомненно, является сталь знания синусоида.

Из математики известно решение поставленной задачи: любую периодическую функцию $f(t)$ с периодом T , удовлетворяющую условиям Дирихле (имеющую на периоде конечное число максимумов конечное число разрывов первого рода), можно представить в виде гармонического ряда

$$f(t) = A_0 + \sum (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

где A_0 - постоянная составляющая; a_n и b_n – амплитуда косинусоидальных и синусоидальных членов ряда; $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота первой (основной) гармоники, период которой равен номер гармоники.

Каждую гармонику n -га порядка, начиная с первой, образуют синусоидальная и косинусоидальная составляющие имеющие нулевые начальные фазы $\Psi_n = 0$.

Ряд Фурье в форме (1) может быть представлен и в виде суммы только одних синусоид (гармоник) с соответствующими фазами.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \psi_n), \quad (2)$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ - амплитуда n -у гармоники;

$\psi_n = \arctg(a_n/b_n)$ - начальная фаза n -у гармоники.

Как известно из курса математики амплитуды синусоидальных и косинусоидальная составляющих определяются аналитически по формулам.

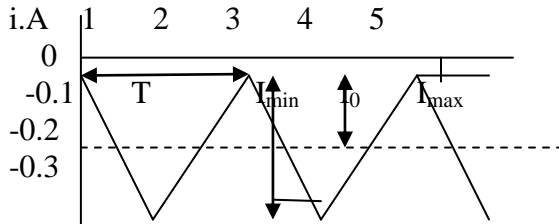
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

или путём приближённого графического расчета на основе этих формул.

Для большого числа периодических функций, использующих на практике, их разложения в ряд Фурье уже сделано и приводится в соответствующих справочниках и справочных таблицах (таблица 1 в конце главы).

Так как амплитуды гармоник довольно быстро затухают с ростом их порядкового номера, то в технических расчётах использует только несколько первых гармоник пренебрегая остальные.

Пример. Предоставить треугольный периодический ток (см.рис. 1а) в виде ряда Фурье (2).



Решение. Используем таблицу 1 и сравниваем треугольную функцию (u) и заданную. При этом оказывается, что заданная функция отличается от табличной (u) среднее значение

$I_0 = 0.2 \text{ A}$. Табличная функция, имеющая $U_0 = 0$ раскладывается в следующий ряд: $U(\omega t) = \frac{8um}{\pi^2}$

$(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3 \omega t + \frac{1}{25} \sin 5 \omega t - \dots)$ определяемый двумя параметрами: U_m и $\omega = 2\pi/T$.

Для заданной функции (рис а) с учётом постоянной составляющей I_0 вычислим все необходимые постоянные величины: I_m и ω , максимальное по модулю отклонение от среднего значения

$$I_m = \frac{I_{\min} - I_{\max}}{2} = I_{\min} - I_0 = -0.3 - (-0.2) = 0.1 \text{ A}$$

Условия частоты первой гармоники

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/2 = \pi \text{ рад/с}$$

Тогда после подстановки в табличную функцию в место U_m значений $I_m = 0.1 \text{ A}$ и $\omega = \pi \text{ рад/с}$, а также добавлено постоянной составляющей $I_0 = 0.2 \text{ A}$ периодический ток (рис а) представляется следующим рядом Фурье:

$$I(t) = I_0 + \frac{8I_m}{\pi^2} (\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3 \omega t + \frac{1}{25} \sin 5 \omega t - \dots) = 0.2 + \frac{8 * 0.1}{\pi^2} (\sin 3140t - \frac{1}{9} \sin 9420t + \frac{1}{25} \sin 15700t - \dots)$$

Симметрия периодических функций.

Значительная часть периодических функций, используемых на практике, обладает каким-то из видов симметрии относительно оси, что ограничивает число членов ряда (1) и уменьшает объем проводимых расчётов.

1. Симметрия относительно оси ординат (рис 2) и т.е. $U(t) = U(-t)$. Такие функции называется чётными. Так как косинусоиды являются чётными функциями, а синусоиды – нечётными, то чётная периодическая функция может содержать только косинусоиды и постоянную составляющую.

$$U(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega t$$

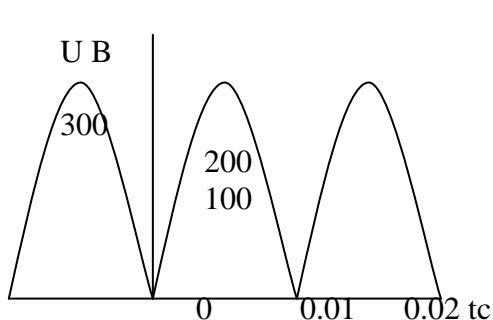


рис ,2

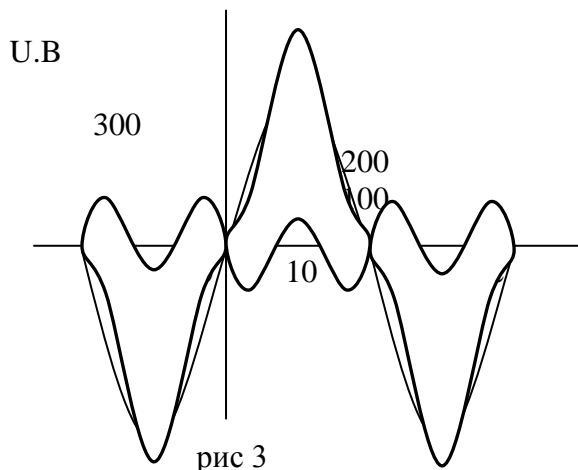
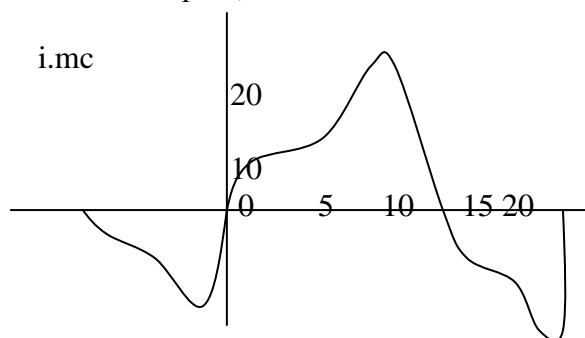


рис 3

рис 4

2. Симметрия относительно начало координат (жирная кривая – рис ,3), т.е. $u(t) = -u(-t)$. Такие функции называется нечётными. Так как косинусоиды и постоянная составляющая являются чётными функциями, а синусоиды- нечётными, то нечётная периодическая функция может содержать только синусоиды $u(t) = b_n \sin \omega t$

3. Симметрия относительно оси абсцисс при совмещении двух соседних полу периодов во времени (рис 7,4), т.е. $U(t) = -U(t + \frac{T}{2})$. В курсе математике доказывается, что функция с такой симметрией может содержать только гармоники, порядковый номер которых является нечётным числом.

Если периодическая функция обладает совокупностью симметрии 1 и 3, то её разложение в ряд Фурье содержит только косинусоиды с нечётным номером, а если совокупностью симметрии 2 и 3, то только синусоиды с нечётным номером. Виды симметрии зависят от начала отсчёта времени. Если начало отсчёта времени может быть выбрано произвольно, то целесообразно выбрать его так, чтобы обеспечивать симметрию 1 или 2.

Пример,2. Рассмотрим периодического напряжения и, заданное осциллограммой (не жирная, кривая на рис ,1а) и дать анализ его разложения в ряд Фурье.

Решение: Из анализа графика рисунок ,1 а видно, что это периодическое напряжения не обладает никакой симметрией. Действительно, его разложение в ряду Фурье (2), ограниченное тремя первыми членами и данное рисунок 1 а графиками 1-й и 3-й гармоник и постоянной составляющей $u(t) = 115 + 150 \sin(\omega t - 30^\circ) + 60 \sin(3 \omega t - 90^\circ)$ в аналитической форме включает постоянную составляющую и 1-ю и 3-ю гармоники с ненулевыми начальными фазами, которые при записи ряда в форме (1) дадут и синусоидальную, и косинусоидальную составляющие:

$$U(t)=115+130\sin \omega t-75\cos \omega t-60\cos 3 \omega t.$$

Однако при смещении начало отчёта на одну треть периода вправо эта функция станет симметричной относительно оси ординат (симметрия 1) и её разложение в ряд Фурье не будет содержать синусов (см. положение 1-й и 3-й гармоник относительно нового начала отсчёта на рис 1а):

$$u(t)=115+150\cos \omega t-60\cos 3 \omega t.$$

Если же сместить начало отсчёта на 1/12 периода (т.е. по фазе 1-й гармоники на 30°), то это периодическое напряжение относительно постоянной составляющей будет обладать симметрией 3. Если при этом одновременно сдвинуть ось абсцисс вверх на постоянную составляющую $U_0=115$ В (т.е. условно приняв $u_0=0$), то периодическое напряжение, заданное рис 7,1а, будет одновременно обладать симметрией 2 и 3 итак, при смещении начала отсчёта на 1/12 периода вправо

$$U(t)=115+150\sin \omega t+60 \sin 3 \omega t,$$

т.е. разложение в ряд Фурье содержит только постоянную составляющую и синусоиды с нечётными порядковыми номерами (см. положение 1-й и 3-й гармоник относительно этого начала отсчёта на рис. 1а.

Экспериментальные методы разложения периодических сигналов на гармоники.

Для экспериментального анализа периодических сигналов используется анализаторы гармоник. Наиболее простейшие анализаторы гармоник можно составить из простейших фильтров. Так в схеме рис. 5 анализатор гармоник состоит из параллельных контуров, настроенных на резонансную частоту, равное частоте гармоник, которые необходимо выделить. Если добротность каждого из контуров достаточна, то его сопротивление на этой гармонике намного больше, чем сопротивление всех относительных контуров.

Поэтому на каждом из контуров выделяется напряжение только той гармоники, на которую настроен этот контур. Современные анализаторы гармоник, имеющие сложную структуру (усилители с обратной связью) и высокую избирательность, обеспечивают большие возможности для экспериментального анализа периодических сигналов.

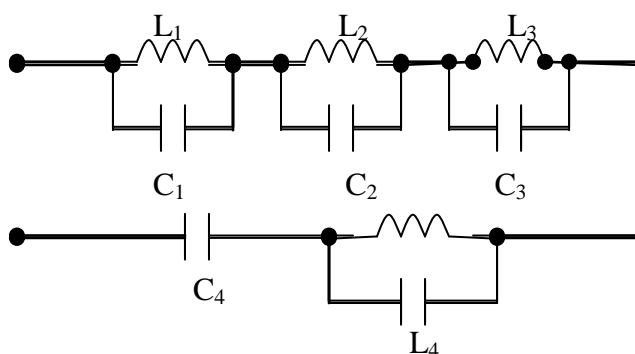


рис 5

При настройке на выделяемые частоты всегда учитывается симметрия типа 3, т.е. для сигналов с симметрией типа 3 фильтра настраиваются только на гармоники номерами (1,3,5-й и т.д.)

Пример3. Для анализа гармоник напряжения однополупериодного выпрямления используется схема рис 7,5. Необходимо определить ёмкость конденсаторов фильтров 1-

4й гармоник, если индуктивная катушка всех фильтров имеет индуктивность 100м Гн, а её активным сопротивлением можно пренебречь.

Решение. Из осциллограммы напряжения определяем период напряжения $T=0,02$ с. Тогда угловая частота первой гармоники $\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi * 50 = 314$ рад/с. Пренебречь активным сопротивлением индуктивной катушки и активной проводимости конденсаторов, имеем резонансную частоту $\omega = 1/\omega_0^2 = 1/314^2 * 0.1 = 106 * 10^{-6}$ ф = 106мкф.

Для 2-й, 3-й, 4-й гармоник имеет частоты $\omega_2 = 2 \omega_0$ $\omega_3 = 3 \omega_0$;

$$\omega_4 = 4 \omega_0 \text{ и соответственно } c_2 = \frac{1}{4} c_1 = 26,5 \text{ мкф} \quad c_3 = \frac{1}{9} c_1 = 11,8 \text{ мкф}$$

$$c_4 = \frac{1}{16} c_1 = 6,9 \text{ мкф.}$$

Конденсатор c_0 (рис. 7,5) используется для выделения постоянной составляющей. Практически добротность резонансных контуров не очень высока, поэтому избирательность такого анализатора гармоник недостаточно, а сами фильтры нуждаются в экспериментальной настройке.

Контрольные вопросы.

1. Используя таблицу 1 разложить на гармоническое составляющее:
2. а) напряжение однополупериодного выпрямления (рис. б).
3. б) напряжение двухполупериодного выпрямления (рис. 7.г).
4. Какое из этих напряжений (рис. б и рис .7.г) будет содержать больше гармоник и почему?
5. Используя таблицу 1; разложить линейно нарастающие напряжения (1б) в ряд Фурье.
6. Возможно ли изменением начала отчёта привести их к какому-либо виду симметрии?

Тема-29: Действующие и средние значения периодического несинусоидального тока и напряжения.

Цель: Изучение общих характеристик периодических несинусоидальных токов и напряжений.

План:

1. Расчёт мгновенных значений токов и напряжений на основе метода наложения.
2. Среднее значение периодических электрических сигналов.
3. Среднее по модулю значение периодической функции.
4. Расчёт действующего значения периодических токов, ЭДС, напряжений.

Ключевые слова: Несинусоидальная, несинусоидальная ЭДС, несинусоидальный ток, несинусоидальное напряжение, средняя мощность, квазисинусоидаль, модульное значение.

Расчёт мгновенных значений токов и напряжений на основе метода наложения.

Если в линейной цепи действует несинусоидальная периодическая ЭДС, то в соответствии с её разложением в ряд Фурье.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(n\omega t + \psi_{en})$$

можно полагать, что в цепи действует бесконечное множество последовательных соединённых ЭДС: $E_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_{e1})$;

$$E_2 = E_{m2} \sin(2\omega t + \psi_{e2}) \text{ и т.д.}$$

На основе метода наложения гармоник токов в линейной цепи можно

вычислять последовательно при действии только одной гармоник ЭДС, а результирующий ток получить сложением всех гармоник. Пусть в некоторой ветви цепи вычислены все гармоники тока: $I_0; i_1 = I_{m1}$

$$\sin(\omega t + \psi_{i1}); i_2 = I_{m2} \sin(2\omega t + \psi_{i2}) \text{ и т.д.}$$

Тогда мгновенное значение тока в этой ветви есть сумма всех вычисленных гармоник. $I(t) = I_0 + i_1 + i_2 + \dots$

Практически вследствие быстрого затухания гармоник с ростом их порядкового номера расчёты ограничиваются несколькими первыми гармониками.

Пример. Определить мгновенные значения токов в схеме (рис. 6) где $L_1 = 0.1 \text{ Гн}$, $C_1 = 40 \text{ мкф}$, $R_1 = 30 \text{ ом}$, $R_2 = 50 \text{ ом}$, $L_2 = 0.04 \text{ Гн}$, $e(t) = 8 + 3\sqrt{2} \cos 500t$.

Собственным потреблением энергии вольтметра и амперметра пренебрегаем.

Решение. Поочерёдно рассчитаем токи при действии только одной составляющей.

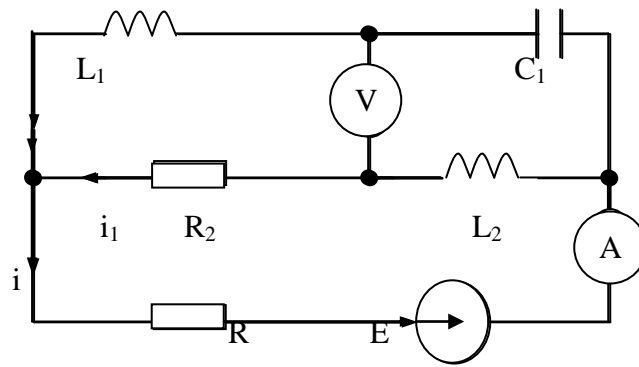


Рис.6

1. Принимаем, что действует только постоянная составляющая ЭДС $E_0=8\text{В}$. При этом постоянный ток контура R_1, R_2, L_2 .

$$I_0=I_{02}=E_0/(R_1+R_2)=8/(50+30)=0,1\text{А}$$

так как ток ветви с ёмкостью C_1 равен нулю $I_{01}=0$

2. Считаем, что действует только гармоническая составляющая ЭДС

$$E_1=3\sqrt{2}\cos 500t=3\sqrt{2}\sin(500t+90^\circ).$$

На частоте этой гармоники реактивные сопротивления цепи

$$X_{L1}=\omega L_1=500*0,1=50\text{ом} \quad X_{C1}=1/\omega C_1=1/500*40*10^{-6}=50\text{ом}$$

$$X_{L2}=\omega L_2=500*0,04=20\text{ом}; \quad X_1=X_{L1}-X_{C1}=50-50=0$$

Так как $x_1=0$, то ветвь с L_1 и C_1 на этой частоте накоротко заменяет ветвь с R_2 и L_2 . В соответствии с законом Ома комплексные токи

$$I_1^1=I_1^0=E_1/R_1=3e^{j90}/30=0,1e^{j90} \cdot I_2^1=0$$

Мгновенные значения тока ветвей: $i_2^1(t)=0$;

$$I^1(t)=i_1^1(t)=0,1\sqrt{2}\sin(500t+90^\circ)=0,141\cos 500t.$$

3. Суммируем частичные токи и определяем мгновенные значения токов ветвей:

$$i=i_0+i^1=0,1+0,141\cos 500t \text{ А}; \quad i_1=I_{01}+i_1^1=0,141\cos 500t \text{ А};$$

$$i_2=I_{02}+i_2^1=0,1 \text{ А}.$$

Среднее значение периодических электрических сигналов.

Среднее значение периодического электрического напряжения тока или ЭДС $(\int_0^T u(t) dt)$

$$U_0=\frac{1}{T}\int_0^T u(t) dt. \text{ Равно постоянной составляющей периодического напряжения } U_0(1).$$

Особенно распространено сочетание постоянной составляющей и гармоник в различных электронных схемах. В системах электроснабжения, которые используют постоянное напряжение, среднее значение периодического напряжения применяется для питания приёмников, а также для регулирования напряжения. Так, в современных автомобилях источником электроэнергии при работе двигателя является трёхфазный синхронный генератор. Среднее значение выпрямленного трёхфазного напряжения используется для питания всех электросетей автомобиля. Регулирование напряжения генератора осуществляется изменениям тока возбуждения. Для этого в обмотку

возбуждения сопротивлением R_B и индуктивностью L_B (рис.7а) включается дополнительное сопротивление R доп (вторая ступень регулирования). В рассматриваемом случае регулирование среднего значения тока обеспечивается как изменения сопротивления в цепи возбуждения, так и изменение длительности включения первого или второго контакта.

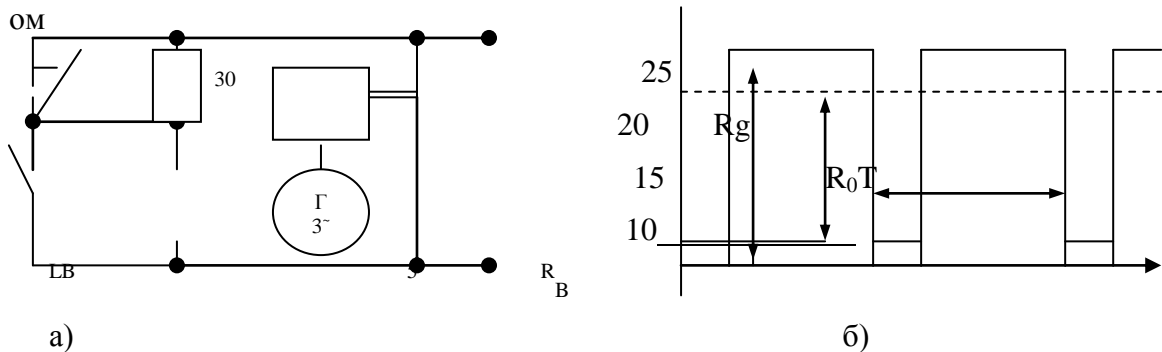


рис7

Пример. Номинальное значение постоянной составляющей напряжения автомобильного трёхфазного генератора $U_{НОМ}=14,213$, сопротивление обмотки возбуждения $R_B=4.5$ ом. При некоторой частоте вращения генератора 1/5 часть периода напряжение генератора приложено непосредственно к обмотке, а остальную часть периода через добавочное сопротивление $R_{гон}=27.7$ ом (первая ступень регулирования)-рис 7а.

График периодического изменения сопротивления во времени показан на рис 7б.

Определить среднее значение тока обмотки возбуждения генератора.

Решение. Среднее значение сопротивления R_0 (рис 7б) определяется в соответствии с формулой $U_o = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$ с учётом того, что $\int_0^T R(t)dt = \int_0^{0.2T} R(t)dt + \int_{0.2T}^T R(t)dt = R_B \cdot 0.2T + (R_B + R_{гон})(T - 0.2T)$

Среднее значение тока в цепи возбуждения (постоянная составляющая) $I_0 \approx U_{НОМ}/R_0 = 14.2/26.7 = 0.54A$.

Заметим, что поддержание тока вблизи его постоянной составляющей с небольшими колебаниями обеспечиваются индуктивностью обмотки возбуждения. Действительно, по правилу Ленца ЭДС самоиндукции обмотки возбуждения стремится поддерживать ток обмотки возбуждения около его начального значения в моменты срабатывания контактов. Чем больше индуктивность обмотки L_B и чем меньше период T , тем стабильнее поддерживается значение I_0 .

Среднее по модулю значение периодической функции.

Если среднее значение функции за период, т.е. её постоянная составляющая, равна нулю, то для характеристики этой функции часто используется среднее по модулю значения периодической функции

$$U_{ср} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt.$$

Во многих практических случаях периодические функции с постоянной составляющей, равное нулю, обладают симметрией относительно оси абсцисс. Для таких функций (рис 3; 4), среднее по модулю значение вычислять за половину периода. Начало

отсчёта времени для этого необходимо выбрать с момента, когда начинается положительная половина периода.

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t) dt$$

Представляя периодическую функцию рядом Фурье

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin n \omega t.$$

замечаем, что за половину периода должно укладываться чётное число полувольт гармоник с чётными номерами и нечётными число полувольт гармоник с нечётными номерами. Поэтому при интегрировании за половину периода гармоники с чётными номерами в сумме всегда дойти нуль, а для гармоник с нечётными номерами взаимно уничтожаются все полувольты этой гармоники, кроме одной полувольты за период (положительной или отрицательной).

Следовательно, с учётом среднего значения для синусоидальной гармоники

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \left[U_{m1} \pm \frac{1}{3} U_{m3} \pm \frac{1}{5} U_{m5} \pm \frac{1}{7} U_{m7} \pm \dots \right]$$

Где коэффициенты 1/3, 1/5, 1/7 введены с учётом того, что для 3-й гармоники взаимно компенсируются две полувольты и учитывается одна из трёх, для 5-й учитывается одна из пяти полувольт (четыре взаимно компенсируются) и т.д.

Пример. Определить среднее по модулю значение периодического напряжения, заданного осциллограммой (см. рисунок 3-жирная кривая).

Решение. Исследуемое напряжение симметрично относительно начала координат и представляется следующим рядом.

$$\text{Фурье: } U(t) = 300 \sin \omega t - 100 \sin 3 \omega t.$$

Тогда среднее значение функции за половину периода

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} (U_{m1} - \frac{1}{3} U_{m3}) = 0.637 (300 - \frac{1}{3} 100) = 170 \text{ В}$$

Расчёт действующего значения периодических токов, ЭДС, напряжений.

Вычисление действующих значений периодических токов, ЭДС и напряжений

непосредственно по формуле $u = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$; представляет значительные трудности.

Поэтому гораздо чаще используются разложения периодических функций в ряд Фурье

Представляя в формулу для действующего значения (*)

$$U_{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

* Действующее значение периодических величин с постоянной составляющей будем обозначать с индексом « Δ » (U_{Δ} , I_{Δ}) а без этой составляющей, как обычно U , I .

Представление периодического напряжения рядом Фурье (2), получаем:

$$U_{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{m,n} \sin(n\omega t + \psi_n) \right]^2 dt}$$

При вычислении определённого интеграла под знаком корня учтём, во-первых, равенство нулю определённого интеграла за период от всех синусоид в первой степени и произведений двух синусоид с разной частотой и, во-вторых, из соотношения $U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m$ - определённого интеграла для квадрата синусоиды.

Тогда окончательно $U_{\Delta} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}$ (3) где U_0 - постоянная составляющая периодического напряжения; U_1, U_2, U_3 - действующие значения 1-й, 2-й, 3-й и т.д. гармоник в разложение этого напряжения.

Пример. Вычислить действующее значение периодического напряжения (см. рисунок, 1а).

Решение. Разложение этого периодического напряжения дано в примере 2. U содержит только при слагаемых:

$$U(t) = 115 + 150 \cos \omega t - 60 \cos 3 \omega t.$$

$$\text{Согласно формуле (3)} \quad U_{\Delta} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{115^2 + \frac{150^2}{2} + \frac{60^2}{2}} = 162 \text{ В}$$

Пример. Определить показания приборов в схеме (см рисунок б), если они измеряют действующее значение.

Решение. Используя расчёты примера 4, определяем составляющие напряжения на зажимах вольтметра поочерёдно при действии каждой из составляющих ЭДС

1. При действии $E_0 = 8 \text{ В}$

$$U_{OV} = U_{OR2} = I_{O2} * R_2 = 0.1 * 50 = 5 \text{ В}$$

2. При действии $e_1 = 3 \sqrt{2} \cos 500t$

$$U_V^1 = U_{C1}^1 = U_{L1}^1 = X_{C1} I_1^1 = 50 * 0.1 = 5 \text{ В}$$

В соответствии с формулой (7,3) показание вольтметра

$$U_{\Delta V} = \sqrt{U_{OV}^2 + (U_V^1)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07 \text{ В}$$

Показание амперметра (расчёт токов см пример 4)

$$I_{\Delta A} = \sqrt{I_0^2 + (I^1)^2} = \sqrt{0.1^2 + 0.1^2} = 0.141 \text{ А}$$

Контрольные вопросы.

1. Рассчитать мгновенные значения токов в ветвях схемы (рисунок 8), если, $R_1 = 20 \text{ ом}$; $R_2 = 40 \text{ ом}$; $R_3 = 30 \text{ ом}$; $L_1 = 0.1 \text{ Гн}$; $C_1 = 10 \text{ мкФ}$; $C_2 = 5 \text{ мкФ}$

$$U(t) = 50 + 20 \sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ).$$

2. Определить показания приборов (рисунок 8), если они измеряют действующее значение.

3. Определить постоянную составляющую периодического тока в обмотке возбуждения генератора по исходным данным примера 5

4. Генератор имеет большую частоту вращения, поэтому $1/10$ часть периода обмотка непосредственно включена на напряжение генератора, а остальная часть периода включена через добавочное сопротивление.

Тема-30: Активная и полная мощности несинусоидальных цепей.

Цель: Изучение активной и реактивной мощности несинусоидального тока.

План.

1. Активная и реактивная мощность несинусоидального тока
2. Средняя мощность несинусоидального тока.
3. Мощность в квазисинусоидальном режиме.

Ключевые слова: Мощность, несинусоидальная, несинусоидальная ЭДС, несинусоидальное напряжение, средняя мощность, квазисинусоидаль, модульное значение.

Активная мощность

Пусть напряжение и ток разложены в ряд Фурье:

$$i(t) = i^{(0)}(t) = i^{(1)}(t) = i^{(2)}(t) + \dots + i^{(n)}(t) + \dots$$

$$u(t) = u^{(0)}(t) = u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t) + \dots + u^{(n)}(t) + \dots$$

Тогда мгновенная мощность равна

$$P(t) = i(t)U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{(n)}(t)U^{(n)}(t) + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} i^{(p)}(t)U^{(q)}(t) \quad (4.5)$$

Пользоваться понятием мгновенной мощности неудобно, так как она зависит от времени.

Найдем среднюю мощность за период, т.е. активную мощность:

$$P = \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} i^{(n)}(t)u^{(n)}(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} i^{(p)}(t)u^{(q)}(t) dt,$$

где $\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} i^{(p)}(t)u^{(q)}(t) dt = 0$ (в силу ортогональности гармонической функции)

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i^{(n)}(t)u^{(n)}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(t) dt$$

где $P^{(n)}(t)$ - мгновенное значение мощности 'n'-ой гармоники,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^{(n)}(t)u^{(n)}(t) dt = P^{(n)}$$
 - среднее значение (активная мощность) 'n'-ой гармоники,

тогда с учётом последнего получим:

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} = U^{(0)}I^{(0)} + U^{(1)}I^{(1)} \cos \varphi^{(2)} + U^{(2)}I^{(2)} \cos \varphi^{(2)} + \dots [Bm] \quad (4.6)$$

Активная мощность в цепи несинусоидального тока равна сумме активных мощностей каждой из гармоник в отдельности.

Кроме понятия активной мощности рассматриваем понятие полной мощности

$$S = UI = \sqrt{[U^{(0)}]^2 + [U^{(1)}]^2 + \dots} \times \sqrt{[I^{(0)}]^2 + [I^{(1)}]^2 + \dots} [BA] \quad (4.7)$$

где $p^{(n)}(t)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^n(t) u^{(n)}(t) dt = P^{(n)}$$

Реактивная мощность

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{(i)} = U^{(1)} I^{(1)} \sin \varphi^{(1)} + U^{(2)} I^{(2)} \sin \varphi^{(2)} + \dots \quad (4.8)$$

Последняя равна алгебраической сумме реактивных мощностей каждой гармоники. Отношение активной мощности к полной называется коэффициентом мощности:

$$a = \frac{P}{S} \text{ коэффициент мощности.}$$

$a < \cos \varphi^{(1)}$ - т.е. a всегда меньше $\cos(\varphi)$ для основной гармоники

Активная мощность в цепи несинусоидального тока больше активной мощности в цепи синусоидального тока за счет наличия дополнительных высших гармоник.

В цепи несинусоидального тока присутствует также мощность искажений

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad (4.10)$$

которая получается в силу разного гармонического состава кривых тока и напряжения.

Для оценки формы кривых напряжения и тока используется ряд коэффициентов, при этом рассматриваются кривые, в которых отсутствует постоянная составляющая.

Коэффициент формы определяется как отношение действующего значения к среднему за период:

$$K_\phi = \frac{U}{U_{cp}} \quad K_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \quad (4.11)$$

$$\text{для синусоиды } K_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения к действующему:

$$K_0 = \frac{U_m}{U} \quad (4.12)$$

$$\text{для синусоиды } K_0 = \sqrt{2} = 1,41,$$

Коэффициент гармоник характеризует совокупную величину высших гармоник и равен отношению действующего значения высших гармоник к действующему значению основной:

$$K_\Gamma = \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (u^{(n)})^2}}{U^{(1)}} = \frac{\sqrt{(U^{(2)})^2 + (U^{(3)})^2 + \dots}}{U^{(1)}} \quad (4.13)$$

По стандарту для промышленной сети коэффициент гармоник не должен превышать 5%.

Средняя мощность.

Мгновенную мощность цепи периодического (несинусоидального) тока выразим через гармонические составляющие тока и напряжения, используя их представление рядами Фурье:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(n \omega t + \Psi_{un}); \quad i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n \omega t + \Psi_{in}).$$

Мгновенная мощность

$$P(t)=u(t)*i(t)=\left[U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{m1n} \sin(n\omega t + \Psi_{u1n})\right] \times \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{m,n} \sin(n\omega t + \Psi_{i,n})\right]$$

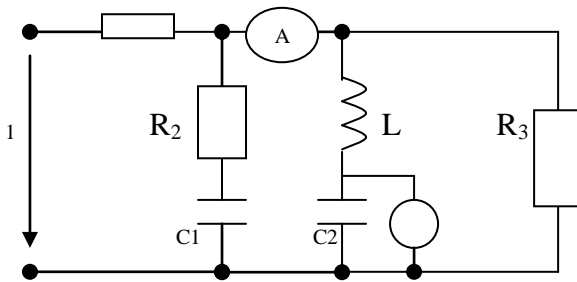
Для вычисления средней мощности цепи $P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt$ необходимо взять интеграл от произведения двух рядов Фурье.

Учитывая, что средние значения синусоиды и произведения двух синусоид с разными частотами за период равны нулю, а также формулу для средней мощности в синусоидальном режиме получаем:

$$P=U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (4)$$

где $U_n I_n$ – действующие значения напряжения и тока n-й гармоники; φ_n -разность фаз напряжения и тока n-й гармоники, а $P_n=U_n I_n \cos \varphi_n$ - средняя (активная) мощность n-й гармоники.

Итак, средняя мощность цепи несинусоидального тока равна сумме средних мощностей отдельных гармоник, если рассматривать постоянную составляющую как нулевую гармонику;



Рис,8

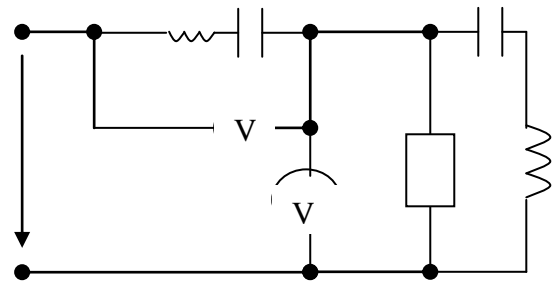


рис 9

Пример. Вычислить среднюю мощность цепи рисунок 6.

Решение. Используя расчёты токов в этой схеме, выполненные в примере 4 этого параграфа, имеем мгновенные значения ЭДС и тока в ветви с ЭДС:

$$e(t)=8+3\sqrt{2} \cos 500t$$

$$i(t)=0.1+0.1\sqrt{2} \cos 500t$$

Тогда в соответствии с формулой (7,4)

$$P=E_0 I_0 + E_1 I_1 \cos \varphi_1 = 8*0.1 + 3*0.1 = 1.1 \text{ Вт.}$$

Мощность в квазисинусоидальном режиме.

Условно назовём периодический режим, при котором токи и напряжения цепи (рисунок,10) имеют одинаковую частоту, в той или иной степени близки к синусоидальным и описываются эквивалентными синусоидами, квазисинусоидальным.

В квазисинусоидальном режиме цепи периодические ток и напряжение представляются эквивалентными синусоидами и по аналогии с синусоидальным режимом вводится полная мощность S , определяемая как произведение действующих значений напряжения и тока:

$$S=UI=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2} \quad (7,5)$$

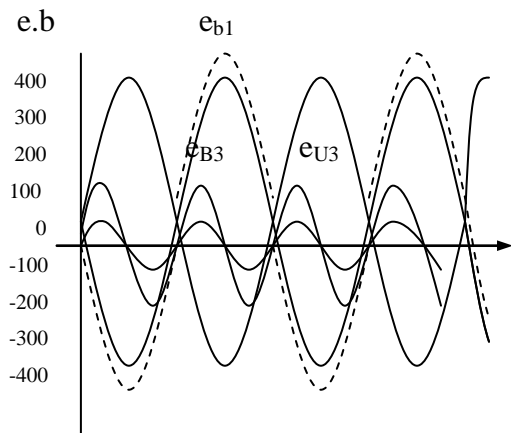
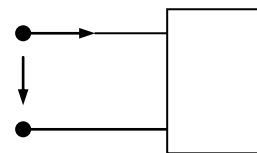


Рис 11

Так как действующие значения одинаковы и для периодического тока и напряжения, и для эквивалентных им синусоид, то полная мощность исходного периодического квазисинусоидального режима равна полной мощности эквивалентного синусоидального режима. Средняя мощность периодического режима

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n$$

должна быть равной средней мощности эквивалентного ему синусоидального режима. Поэтому разность фаз эквивалентных синусоид напряжения и тока определяется через среднюю и полную мощности:

$$\cos \varphi_{\text{эк}} = \frac{P}{S} = \frac{\sum U_n I_n \cos \varphi_n}{\sqrt{\sum U_n^2 \sum I_n^2}} \quad (6).$$

По аналогии со средней (условно активной) мощностью в квазисинусоидальном режиме вводится «условно реактивная» мощность, определяемая как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник несинусоидальных тока и напряжения

$$Q_{\text{НС}} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \quad (7).$$

Так как синусоидальный режим эквивалентен исходному квазисинусоидальному режиму лишь приближенно, в среднем (равенством средних мощностей), то реактивная мощность его

$$Q = UI \sin \varphi_{\text{эк}} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

обычно не равна условно реактивной мощности

Для количественного учёта этого неравенства вводится так называемая мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_{\text{НС}}^2} \quad (8).$$

Отношение мощности искажения к полной характеризует различие в формах кривых тока и напряжения, возникающее при наличии в цепи ёмкости или индуктивности.

В нелинейных цепях часто при синусоидальном напряжении ток вследствие нелинейности элементов несинусоидален. Например, при синусоидальном напряжении на выводах нелинейной индуктивной катушки, имеющей магнитопровод с петлей гистерезиса, ток в её обмотке имеет кривую, изображённую на рисунке 4. Поэтому квазисинусоидальный режим используется для упрощения анализа и расчёта цепей такого рода.

Контрольные вопросы.

1. Рассчитать мгновенные значения токов в ветвях схемы (рисунок 8), если, $R_1=20$ ом; $R_2=40$ ом; $R_3=30$ ом; $L_1=0.1$ Гн; $C_1=10$ мкФ; $C_2=5$ мкФ
 - i. $U(t)=50+20\sqrt{2}\sin(1000t+30^\circ)$.
2. Определить показания приборов (рисунок 8), если они измеряют действующее значение.
3. Определить постоянную составляющую периодического тока в обмотке возбуждения генератора по исходным данным примера
4. Генератор имеет большую частоту вращения, поэтому 1/10 часть периода обмотка непосредственно включена на напряжение генератора, а остальная часть периода включена через добавочное сопротивление.
5. К цепи (рисунок 9) подведено напряжение $U(t)$, определяемое гармониками (рисунок 3). Параметры цепи $L_1=L_2=0.1$ Гн, $C_2=11.25$ мкФ
Определить ёмкость C_1 из условия обеспечения резонанса напряжений на 1-й гармонике для L_1 и C_1

Тема-31: Несинусоидальные ток и напряжения в трёхфазных системах.

Цель: Изучение несинусоидальных токов и напряжений трёхфазной системы их применение.

План:

1. Высшие гармоники ЭДС в трёхфазных цепях.
2. Высшие гармоники напряжений и токов в линейных трёхфазных цепях.
3. Заключение

Ключевые слова: Несинусоидальная, несинусоидальная ЭДС, несинусоидальный ток, несинусоидальное напряжение, средняя мощность, квазисинусоидаль, модульное значение.

Высшие гармоники ЭДС в трёхфазных цепях.

Анализ высших гармоник в трёхфазных симметричных цепях позволяет в конкретных условиях электроснабжения рационально выбирать группу соединения первичных и вторичных обмоток силовых трёхфазных трансформаторов (из числа рекомендуемых). При анализе различных схем соединения обмоток генератора, вторичных обмоток трансформатора и фаз нагрузки примем следующие допущения, вероятность выполнения которых на практике весьма велика. Будем считать, что ЭДС всех трёх фаз смещены точно на $1/3$ периода, имеют совершенно идентичную форму кривой обладающей симметрией и относительно начала координат, и относительно оси абсцисс (рисунок 7,11).

Тогда несинусоидальная ЭДС каждой фазы источника представляется гармоническим рядом Фурье, включающим только нечётные гармоники:

$$e_A(t) = E_{A1} \sin \omega t \pm E_{A3} \sin 3 \omega t \pm E_{A5} \sin 5 \omega t \pm \dots,$$

$$e_B(t) = E_{A1} \sin(\omega t - 120^\circ) \pm E_{A3} \sin 3(\omega t - 120^\circ) \pm E_{A5} \sin 5(\omega t - 120^\circ) \pm \dots,$$

$$e_C(t) = E_{A1} \sin(\omega t - 240^\circ) \pm E_{A3} \sin 3(\omega t - 240^\circ) \pm E_{A5} \sin 5(\omega t - 240^\circ) \pm \dots,$$

На графике рис 7,11 представлены разложение на гармоники ЭДС фазы В и 3-я гармоника всех трёх фаз. Пятая и другие высшие гармоники, имеющие малые амплитуды, на рис 7,11 не показаны.

Из анализа несинусоидальных трёхфазных ЭДС видно, что их гармоники с номерами, краткими 3(3,9,15-я и т.д.), имеют одну и ту же начальную фазу

($e_{A3} = e_{B3} = e_{C3} = e_3$ или $E_{A3} = E_{B3} = E_{C3} = E_3$), т.е. составляют нулевую последовательность. Так как 3-я гармоника имеет наибольшее относительное значение, в дальнейшем будем говорить только о 3-й гармонике, подразумевая под ней и все остальные, составляющие нулевую последовательность, т.е. кратные трём.

Высшие гармоники напряжений и токов в линейных трёхфазных цепях.

Если источник и симметричный потребитель соединены звездой с нейтральным проводом, то ток нейтрального провода равен утроенному току i_0 нулевой последовательности, т.е. утроенному току 3-й гармоники $i_n = 3i_3$

При отсутствии нейтрального провода согласно первому закону Кирхгофа $i_{A3} + i_{B3} + i_{C3} = 0$, следовательно, $3i_3 = 0$ так как $i_{A3} + i_{B3} + i_{C3} = i_3$.

Отсюда нулевая последовательность фазных токов равна нулю – фазные токи не содержат 3-ю гармонику. Однако между нулевыми точками источника и симметричного потребителя возникает напряжение нулевой последовательности, т.е. напряжение 3-й гармоники $U_{NN} = U_3$

При соединении источника звездой линейные мгновенные напряжения равны разности фазных; при вычитании двух фазных напряжений составляющие нулевой последовательности взаимно уничтожаются. Поэтому линейные напряжения в этом случае не содержат 3-й гармоники.

Если источник соединён треугольником, то для этого замкнутого треугольника согласно второму закону Кирхгофа $U_{AB}+U_{BC}+U_{CA}=0$, а так как $U_{ABO}=U_{BCO}=U_{CAO}=U_{\wedge 0}$, то $3U_{\wedge 0}=0$, т.е. $U_{\wedge 0}=0$. Следовательно, во внешней по отношению к источнику цепи, если она является линейной, нулевая составляющая всех токов и напряжений, равная 3-й гармонике, отсутствует. Однако в каждой фазе источника, соединённого треугольником, 3-я гармоника ЭДС имеется. Следовательно, она уравнивается падением напряжения 3-й гармоники в каждой фазе источника. Это означает, что даже при обрыве всех линейных проводов и равенстве нулю линейных токов в замкнутом треугольнике источника имеет место ток нулевой последовательности, т.е. 3-я гармоника тока.

Итак, даже при симметричной линейной нагрузке и симметричной трёхфазной системе ЭДС, но несинусоидальной формы, в зависимости от схемы соединения в трёхфазной цепи возможно появление напряжения или тока нулевой последовательности, состоящих из гармоник, кратных трём.

Пример. Трёхфазный трансформатор на выходных зажимах имеет несинусоидальное напряжение (рисунок 7,11) и питает симметричную трёхфазную цепь. Активное сопротивление фазы $R_{\phi}=17,3\text{ом}$, ёмкостное сопротивление фазы на 1-й гармонике $X_{\phi 1}=30\text{ом}$. Дать анализ режимом цепи при соединении звездой с нулевым проводом и без него.

Решение. Из осциллограммы рис. 7,11 в соответствии с масштабом записываем напряжение фазы А рядом Фурье (на рисунке пунктом изображена 1-я гармоника фазы В и сплошной линией 3-я гармоника ЭДС, одинаковая для всех трёх фаз): $U_A=540\sin \omega t+56\sin 3 \omega t$

Полное сопротивление фазы на 1-й гармонике

$$Z_1=\sqrt{R_{\phi}^2 + X_{\phi 1}^2} = \sqrt{17,3^2 + 30^2} = 34.6 \text{ ом}$$

$$\text{на 3-й гармонике } Z_2=\sqrt{R_{\phi}^2 + \left(\frac{1}{3} X_{\phi 1}\right)^2} = \sqrt{17,3^2 + 10^2} = 20 \text{ ом}$$

При соединении звездой с нулевым проводом:

$$\text{фазное напряжение } U_{\phi}=\sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(540^2 + 56^2)} = 385 \text{ В}$$

$$\text{линейное напряжение } U_{\wedge}=\sqrt{3} U_1=\frac{540}{\sqrt{2}} * \sqrt{3} = 664 \text{ В}$$

По методу наложения рассчитаем токи поочередно для каждой гармоники.

$$\text{Фазный ток 1-й гармоники } I_1=\frac{U_{\phi 1}}{Z_1} = \frac{540}{\sqrt{2} * 34.6} = 11.1 \text{ А}$$

$$\text{Фазный ток 3-й гармоники } I_3=\frac{U_{\phi 3}}{Z_3} = \frac{56}{\sqrt{2} * 20} = 2 \text{ А}$$

$$\text{Фазный ток } I_{\phi}=\sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{11.1^2 + 2^2} = 11.3 \text{ А}$$

$$\text{Ток нулевого провода } I_N=3I_3=6 \text{ А}$$

и соизмерим с фазным током.

При соединении звездой без нулевого провода напряжение смещения для 1-й гармоники равно нулю, а для 3-й

$$U_{NN}^1 = \frac{E_3 Y_{-3} + E_3 Y_{-3} + E_3 Y_{-3}}{Y_{-3} Y_3 Y_3} = E_3 \quad \text{т.е. напряжения смещения равно 3-й гармонике}$$

напряжение трансформатора: $U_{NN}^1 = U_3 = 56 / \sqrt{2} = 40 \text{ В}$

фазные токи не содержит 3-й гармоники $I_\phi = I_2 = U_1 / Z_1 = 11.1 \text{ А}$

Если соединить обмотки трансформатора в треугольник, то линейное напряжение нагрузки равно фазному и содержит только 1-ю гармонику:

$U_\lambda = U_\phi = U_1$, поэтому токи приёмника при этом способе его соединения содержат только 1-ю гармонику.

Если к выводам разомкнутого треугольника обмоток трансформатора включить вольтметр то он покажет утроенное напряжение нулевой последовательности: $3U_3 = 3 * 40 = 120 \text{ В}$

Мгновенное значение этого напряжения 3-й гармоники $3U_3$ показано на рис 11.

ЭДС 3-й гармоники может вызывать значительные токи в обмотках трансформатора в режиме ХХ и привести к его перегреву (при малом сопротивлении обмоток).

Итак, составляющая ЭДС 3-й гармоники вызывает в схеме симметричной звезды с нейтральным проводом ток нейтрального провода, соизмеримый с фазным, а при соединении обмоток трансформатора в треугольник вызывает значительные токи в режиме ХХ трансформатора.

Заключение.

1. Периодические токи, напряжения, ЭДС могут быть представлены гармоническим рядом Фурье. Для некоторых периодических функций гармонические ряды Фурье приведены в таблице 7.1.
2. Расчёт линейных электрических цепей с несинусоидальными ЭДС источников питания целесообразно проводить на основе метода наложения – последовательно для каждой гармоники ЭДС, представляемой рядом Фурье.
3. Действующее значение периодических токов и напряжений и среднее значение мощности можно рассчитать по действующим значениям гармоник напряжения и тока и с учётом сдвига фаз между ними (для вычисления средней мощности).
4. Для анализа токов и напряжений, близких к синусоиде, иногда используются эквивалентные синусоидальные токи и напряжения, обеспечивающие равную мощность в цепи.

Контрольные вопросы.

1. Представить периодическое напряжение (рисунок 7,3) эквивалентной синусоидой.
2. Выразить коэффициент гармоники через коэффициент искажения.
3. Вычислить коэффициенты, характеризующие не синусоидальность напряжения (рисунок 7,3) и ЭДС фазы В (рисунок 7,11). Какая из этих кривых ближе к синусоиде?
4. Вычислить коэффициент гармоник для напряжения (рисунок 7,3) и ЭДС фазы В (рисунок 7,11) и проверить его на соответствие требованиям ГОСТ.

Тема-32: Краткая теория электрических фильтров.

Цель: Изучение типов, схем и принципов работы электрических фильтров.

План:

1. Типы электрических фильтров.
2. Классификация фильтров
3. Низкочастотные фильтры

Ключевые слова: Фильтр, низкочастотный фильтр, высокочастотный фильтр, контур, четырехполюсник,

Типы электрических фильтров.

Электрическим фильтром называется четырехполюсник, устанавливаемый между источником питания и нагрузкой и служащий для беспрепятственного (с малым затуханием) пропускания токов одних частот и задержки (или пропускания с большим затуханием) токов других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания (с малым затуханием), называется полосой пропускания или полосой прозрачности; диапазон частот, пропускаемых с большим затуханием, называется полосой затухания или полосой задерживания. Качество фильтра считается тем выше, чем ярче выражены его фильтрующие свойства, т.е. чем сильнее возрастает затухание в полосе задерживания. В качестве пассивных фильтров обычно применяются четырехполюсники на основе катушек индуктивности и конденсаторов. Возможно также применение пассивных RC-фильтров, используемых при больших сопротивлениях нагрузки.

Фильтры применяются как в радиотехнике и технике связи, где имеют место токи достаточно высоких частот, так и в силовой электронике и электротехнике. Для упрощения анализа будем считать, что фильтры составлены из идеальных катушек индуктивности и конденсаторов, т.е. элементов соответственно с нулевыми активными сопротивлением и проводимостью. Это допущение достаточно корректно при высоких частотах, когда индуктивные сопротивления катушек много больше их активных сопротивлений ($\omega L \gg R_k$), а емкостные проводимости конденсаторов много больше их активных проводимостей ($\omega C \gg g_c$).

Фильтрующие свойства четырехполюсников обусловлены возникающими в них резонансными режимами – резонансами токов и напряжений. Фильтры обычно собираются по симметричной T- или П-образной схеме, т.е. при $Z_1 = Z_2$ или $Z'_1 = Z'_2$. В этой связи при изучении фильтров будем использовать введенные в предыдущей лекции понятия коэффициентов затухания и фазы.

Классификация фильтров

Классификация фильтров в зависимости от диапазона пропускаемых частот приведена в табл. 1.

Название фильтра	Диапазон пропускаемых частот
Низкочастотный фильтр (фильтр нижних частот)	$0 \leq \omega \leq \omega_{C1}$
Высокочастотный фильтр (фильтр верхних частот)	$\omega_{C2} \leq \omega < \infty$
Полосовой фильтр (полосно-пропускающий фильтр)	$\omega_{C1} \leq \omega \leq \omega_{C2}$
Режекторный фильтр (полосно-задерживающий фильтр)	$0 \leq \omega \leq \omega_{C1}$ где $\omega_{C1} < \omega_{C2}$ и $\omega_{C2} \leq \omega < \infty$

В соответствии с материалом, изложенным в предыдущей лекции, если фильтр имеет нагрузку, сопротивление которой при всех частотах равно характеристическому, то напряжения и соответственно токи на его входе и выходе связаны соотношением

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^\gamma = e^{\alpha + j\beta} = e^\alpha e^{j\beta} \quad (1)$$

В идеальном случае в полосе пропускания (прозрачности) $\alpha = 0$, т.е. в соответствии с (1) $U_1 = U_2$, $I_1 = I_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, справедливо и равенство $P_1 = P_2$, которое указывает на отсутствие потерь в идеальном фильтре, а значит, идеальный фильтр должен быть реализован на основе идеальных катушек индуктивности и конденсаторов. Вне области пропускания (в полосе затухания) в идеальном случае $\alpha = \infty$, т.е. $U_2 = 0$ и $I_2 = 0$.

Низкочастотные фильтры

Рассмотрим схему простейшего **низкочастотного фильтра**, представленную на рис. 1,а.

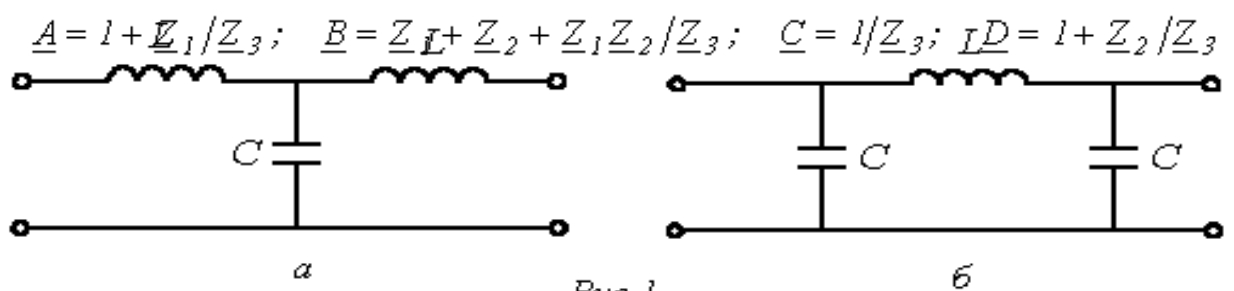


Рис.1

Связь коэффициентов четырехполюсника с параметрами элементов T-образной схемы замещения определяется соотношениями (см. лекцию № 14) или конкретно для фильтра на рис. 1,а

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{j\omega L}{1/j\omega C} = 1 - \omega^2 LC \quad (2)$$

$$\underline{B} = 2j\omega L + \frac{(j\omega L)^2}{1/j\omega C} = 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C \quad ; \quad (3)$$

$$\underline{C} = \frac{1}{1/j\omega C} = j\omega C \quad . \quad (4)$$

Из уравнений четырехполюсника, записанных с использованием гиперболических функций (см. лекцию № 14), вытекает, что

$\underline{A} = ch \gamma = ch(\alpha + j\beta) = ch \alpha \cos \beta + jsh \alpha \sin \beta$ Однако в соответствии с (2) \underline{A} - вещественная переменная, а следовательно,

$$\underline{A} = ch \alpha \cos \beta = 1 - \omega^2 LC \quad . \quad (5)$$

Поскольку в полосе пропускания частот коэффициент затухания $\alpha = 0$, то на основании (5).

Так как пределы $\cos \beta = 1 - \omega^2 LC$ изменения $\cos \beta$, $-1 \leq \cos \beta \leq 1$, - то границы полосы пропускания определяются неравенством

$$-1 \leq 1 - \omega^2 LC \leq 1$$

которому удовлетворяют частоты, лежащие в диапазоне

$$0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad . \quad (6)$$

Для характеристического сопротивления фильтра на основании (3) и (4) имеем

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{2j\omega L - j\omega^3 L^2 C}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}(2 - \omega^2 LC)} \quad . \quad (7)$$

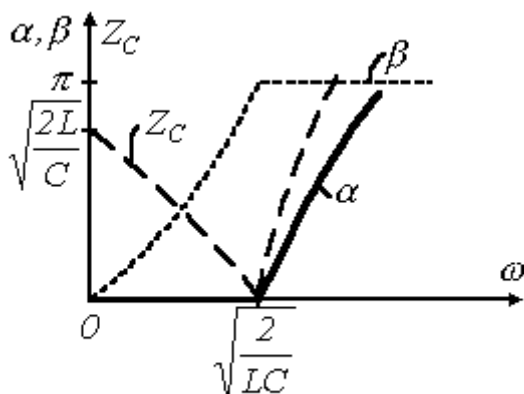


Рис.2

Анализ соотношения (7) показывает, что с ростом частоты ω в пределах, определяемых неравенством (6), характеристическое сопротивление фильтра уменьшается до нуля, оставаясь активным. Поскольку, при нагрузке фильтра сопротивлением, равным характеристическому, его входное сопротивление также будет равно \underline{Z}_C , то, вследствие вещественности \underline{Z}_C , можно сделать заключение, что фильтр работает в режиме резонанса, что было отмечено ранее. При частотах,

больших, $\sqrt{2/LC}$ как это следует из (7), характеристическое сопротивление приобретает индуктивный характер. На рис. 2 приведены качественные зависимости $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ и $Z_c(\omega)$.

Следует отметить, что вне полосы пропускания $\beta = \pi$. Действительно, поскольку коэффициент A – вещественный, то всегда должно удовлетворяться равенство

$$\operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0 \quad . \quad (8)$$

Так как вне полосы прозрачности $\alpha = 0$, то соотношение (8) может выполняться только при $\sin \beta = 0$.

В полосе задерживания коэффициент затухания α определяется из уравнения (5) при $\beta = \pi$. Существенным при этом является факт постепенного нарастания α , т.е. в полосе затухания фильтр не является идеальным. Аналогичный вывод о неидеальности реального фильтра можно сделать и для полосы прозрачности, поскольку обеспечить практически согласованный режим работы фильтра во всей полосе прозрачности невозможно, а, следовательно, в полосе пропускания коэффициент затухания α будет отличен от нуля. Другим вариантом простейшего низкочастотного фильтра может служить четырехполюсник по схеме на рис. 1,б.

Контрольные вопросы и задачи

1. Для чего служат фильтры?
2. Что такое полосы прозрачности и затухания?
3. Как классифицируются фильтры в зависимости от диапазона пропускаемых частот?
4. В каком режиме работают фильтры в полосе пропускания частот?
5. Почему рассмотренных фильтров нельзя считать идеальными?
6. Как можно улучшить характеристики фильтра?

Тема-33: Типы электрических фильтров.

Цель: Изучение типов, схем и принципов работы электрических фильтров.

План:

1. Высокочастотные фильтры.
2. Полосовой фильтр.
3. Прожекторные фильтры
4. RC-фильтр

Ключевые слова: Фильтр, низкочастотный фильтр, высокочастотный фильтр, контур, четырехполюсник.

Высокочастотные фильтры

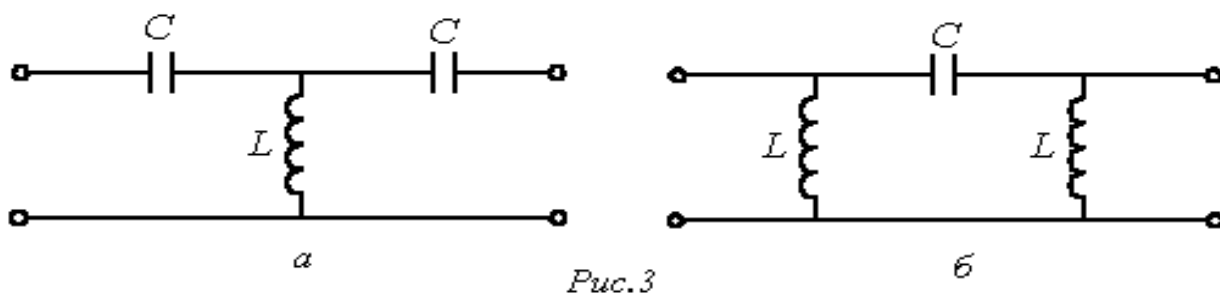


Рис.3

Схема простейшего высокочастотного фильтра приведена на рис. 3,а.

Для данного фильтра коэффициенты четырехполюсника определяются выражениями

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{1/j\omega C}{j\omega L} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} ; \quad (9)$$

$$\underline{B} = \frac{2}{j\omega C} + \frac{(1/j\omega C)^2}{j\omega L} = \frac{1}{j\omega C} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) ; \quad (10)$$

$$\underline{C} = \frac{1}{j\omega L} . \quad (11)$$

Как и для рассмотренного выше случая, A – вещественная переменная. Поэтому на основании (9)

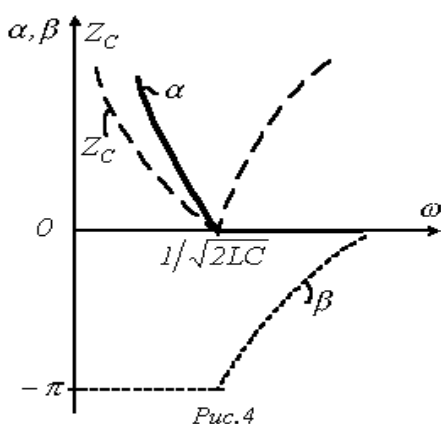


Рис.4

$$-1 \leq 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \leq 1$$

Данному неравенству удовлетворяет диапазон изменения частот

(12)

Характеристическое сопротивление фильтра

$$Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{j\omega C \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}{1/j\omega L}} = \sqrt{\frac{L}{C} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}, \quad (13)$$

изменяясь в пределах от нуля до $\sqrt{2L/C}$ с ростом частоты, остается вещественным. Это соответствует, как уже отмечалось, работе фильтра, нагруженного характеристическим сопротивлением, в резонансном режиме. Поскольку такое согласование фильтра с нагрузкой во всей полосе пропускания практически невозможно, реально фильтр работает с $\alpha = 0$ в ограниченном диапазоне частот.

Вне области пропускания частот α определяется из уравнения

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \quad (14)$$

при $\beta = -\pi$. Плавное изменение коэффициента затухания в соответствии с (14) показывает, что в полосе задерживания фильтр не является идеальным.

Качественный вид зависимостей $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ и $Z_c(\omega)$ для низкочастотного фильтра представлен на рис. 4. Следует отметить, что другим примером простейшего высокочастотного фильтра может служить П-образный четырехполюсник на рис. 3,б.

Полосовой фильтр

Полосовой фильтр формально получается путем последовательного соединения низкочастотного фильтра с полосой пропускания $\omega \geq \omega_{C2}$ и высокочастотного с полосой пропускания $\omega \geq \omega_{C1}$, причем $\omega_{C1} \geq \omega_{C2}$. Схема простейшего полосового фильтра приведена на рис. 5,а, а на рис. 5,б представлены качественные зависимости $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ для него.

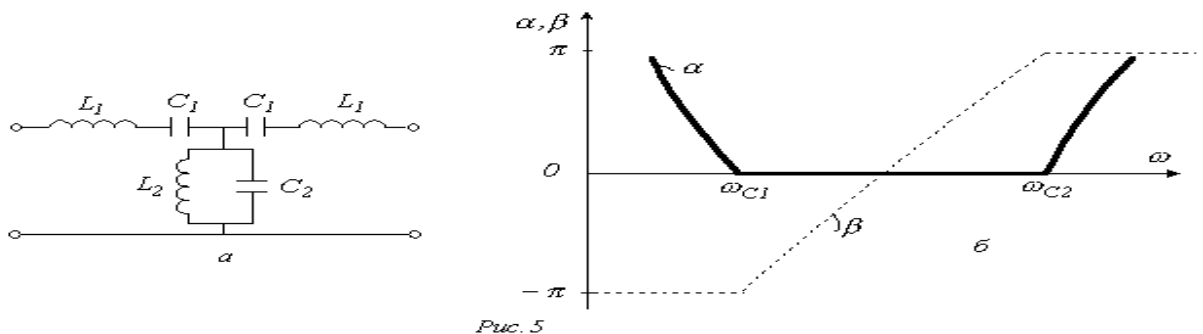


Рис. 5

Режекторные фильтры

У режекторного фильтра полоса прозрачности разделена на две части полосой затухания. Схема простейшего режекторного фильтра и качественные зависимости $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ для него приведены на рис.6.

В заключение необходимо отметить, что для улучшения характеристик фильтров всех типов их целесообразно выполнять в виде цепной схемы, представляющей собой каскадно включенные четырехполюсники. При обеспечении согласованного режима

работы всех n звеньев схемы коэффициент затухания α_n такого фильтра возрастает в соответствии с выражением $\alpha_n = n\alpha$, что приближает фильтр к идеальному.

$$\frac{1}{\sqrt{2LC}} \leq \omega < \infty$$

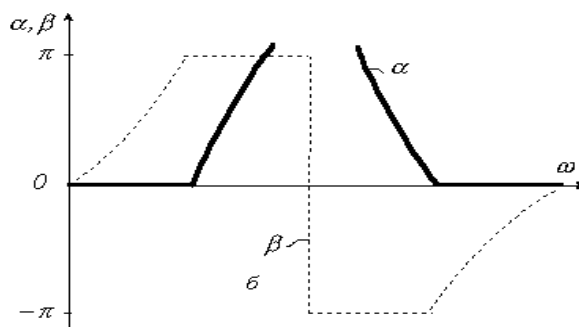
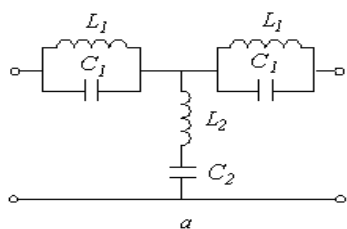


Рис. 6

Контрольные вопросы и задачи

1. Для чего служат фильтры?
2. Что такое полосы прозрачности и затухания?
3. Как классифицируются фильтры в зависимости от диапазона пропускаемых частот?
4. В каком режиме работают фильтры в полосе пропускания частот?
5. Почему рассмотренных фильтров нельзя считать идеальными?
6. Как можно улучшить характеристики фильтра?

Цель: Изучение переходных процессов в электрических цепях.

План:

1. Переходные процессы.
2. Экспериментальное изучение переходных процессов.
3. Задачи анализа и расчёта переходных процессов.

Ключевые слова: Переходной процесс, экспонента, контур, переходной процесс R,C цепи, коммутация, первый закон коммутации, второй закон коммутации, время перехода.

Переходные процессы.

В предыдущих графах были рассмотрены установившиеся режимы в электрических цепях. В этих режимах изменяющиеся во времени токи напряжения можно характеризовать численными значениями, которые являются постоянными или установившимися. Однако в электротехнике имеют место не только установившиеся режимы. Например, в электроэнергетике включаются и отключаются приёмники, изменяется сопротивление нагрузки и т.д.

Пусть в работу, останов, изменение режима различных технологических процессов (электролиз, сварка и т.п.) приводят к переходу от одного установившегося режима к другому.

Электромагнитные процессы, возникающие в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называются переходными. Как показали экспериментальные исследования, токи и напряжения в переходных режимах являются некоторыми функциями времени (экспонента, затухающая синусоида, сумма экспонент), характер которых определяется параметрами цепей (сопротивлением, ёмкостью, индуктивностью) и схемой их соединения.

Все многочисленные и разнообразные причины возникновения переходных процессов в теории электрических цепей принято называть коммутацией.

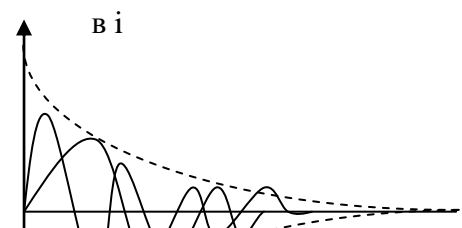
Весьма различные и по своему функциональному назначению, и по внешнему, конструктивному выполнению аппараты и элементы, играющие коммутационную роль (механические, электромеханические, электронные реле, переключатели, выключатели, коммутаторы и т.п.), на схемах электрических цепей принято условно обозначать срабатыванием контакта. Контакты на схемах либо замыкаются, либо размыкаются. Время срабатывания контактов – коммутации – считается бесконечно малым.

Экспериментальное изучение переходных процессов.

Изучать и анализировать переходные процессы с помощью вольтметров, амперметров практически невозможно. Во-первых, эти приборы измеряют в подавляющем большинстве действующие значения напряжений и токов, т.е. «усреднённые» во времени электрические величины. Во-вторых, переходные процессы в электрических цепях являются в основном настолько быстротекущими, что измерительные электромеханические преобразователи приборов не успевают на них реагировать в силу своей инерционности. Поэтому для экспериментального анализа переходных процессов – временных функций напряжений и токов используются электронные и электромеханические осциллографы, которые позволяют не только получать качественное изображение переходных напряжений, но и количественно анализировать их с помощью специальных устройств.

Если снять осциллограммы напряжения и тока на различных элементах в различных электрических цепях (рисунок 1-3), то можно отметить их большое разнообразие, отличие друг от друга.

и,



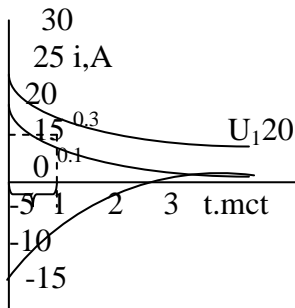


рис 1

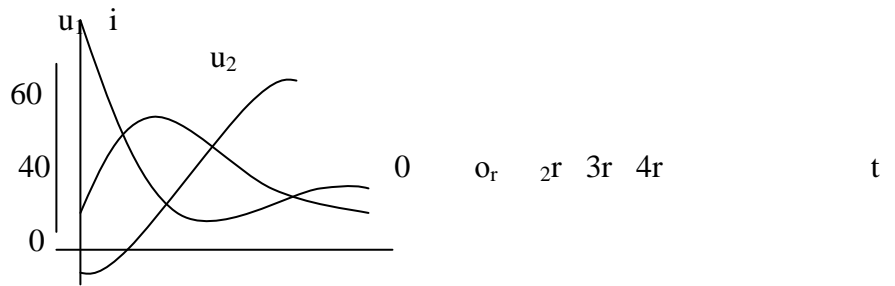


рис 2

рис 3

В момент $t=0$ начала переходных процессов (коммутации) напряжения и токи могут изменять свои значения скачкообразно: u_1, u_2 (рисунок 1); u_1 (рисунок 2). Однако в тот же момент коммутации напряжения и токи могут сохранять свои значения неизменными: i (рисунок 1); i, u_2 (рисунок 2). После коммутации напряжения и токи могут меняться монотонно во времени: u_1, u_2, i (рисунок 1). А на рисунке 3 дана осциллограмма колебательного напряжения – синусоида с уменьшающейся, затухающей амплитудой. Как видно из риса 1-3, через некоторое время, по окончании переходного процесса, токи и напряжения достигают их установившихся значений.

Какие же задачи стоят при расчёте и анализе переходных процессов?

Задачи анализа и расчёта переходных процессов.

Условно разделим задачи анализа переходных режимов на количественные и качественные. Количественный расчёт переходных токов и напряжений включает задачу их математического описания, включающего определение временных графиков как функций времени и позволяющего произвести числовые расчёты значений токов и напряжений в любой момент времени, а также произвести анализ зависимости этих временных графиков от параметров цепи R, L и C . Это наиболее полное и всеобъемлющее описание переходных процессов.

Однако не всегда необходимо производить всеобъемлющий анализ и расчёт переходных процессов. Во многих практических случаях достаточно произвести оценку некоторых важных с эксплуатационной точки зрения характеристик, показателей переходных процессов. К таким характеристикам относится вид временных графиков: монотонный (рисунок 1) или немонотонный (рисунок 2); колебательный (рисунок 3) или не колебательный, т.е. апериодический (рисунок 2). В число важнейших показателей переходных процессов включают время перехода от одного установившегося значения к другому.

Часто необходимо знать значения токов и напряжений в момент сразу после коммутации и по окончании переходного процесса. Эти значения электрических величин называются начальными (в момент сразу после коммутации) и установившимися или принуждёнными (по окончании переходного процесса установившимися по «принуждению» внешних источников электроэнергии). Наконец, нередко стоит задача выяснения зависимости длительности переходного процесса от параметров R, L и C цепи и схемы их соединения.

В большинстве случаев вполне достаточен качественный анализ переходных процессов, т.е. определение характера и длительности переходных процессов, а также начальных и конечных значений токов и напряжений.

Наконец, в связи с нарастающим развитием и совершенствованием автоматических систем регулирования и управления, сложных комплексов и систем передачи и обработки информации, дискретной и вычислительной технике все большие значения приобретают задачи не только теоретического, но и экспериментального анализа переходных

процессов. Анализ экспериментальных осциллограмм позволяет решить целый ряд задач: во-первых, измерить необходимые численные значения переходных токов и напряжений в любой момент времени, во-вторых, по численным величинам, измеренным на осциллограммах, рассчитать неизвестные параметры схемы (R , L или C), в-третьих, производить настройку схемы, устройства по отклонению реальных осциллограмм от заданных, эталонных.

Контрольные вопросы.

1. Что такое переходной процесс?
2. Какие же задачи стоят при расчёте и анализе переходных процессов?
4. К каким характеристикам относится вид временных графиков?
5. Определить независимые начальные условия в схеме (рисунок 5) если $R_2=1\text{к}\Omega$, $R_3=1,25\text{к}\Omega$, $R_1=3\text{к}\Omega$, а внешнее напряжение $U=40\text{В}$.
6. Определить независимые начальные условия в схеме (рисунок 6) если $R_1=100\ \Omega$, $R_2=150\ \Omega$, $U=25\text{В}$.
7. Определить независимые начальные условия в схеме с последовательным соединением сопротивления, ёмкости и индуктивности при её включении на постоянное напряжение $U=32\text{В}$, если до коммутации ёмкость была заряжена до напряжения 20В (рисунок 7).
8. Почему при отключении ёмкостной нагрузки от источника на размыкаемых контактах нет искры, а при индуктивной нагрузке есть?

Тема-35: Классический метод расчета переходных процессов в цепях.

Цель: Изучение переходных процессов в электрических цепях.

План:

1. Коммутация.
2. Закон коммутации для индуктивности.
3. Закон коммутации для ёмкости.
4. Зависимые и независимые начальные условия.
5. Нулевые и ненулевые начальные условия.
6. Коммутация.

Ключевые слова: Переходной процесс, экспонента, контур, переходной процесс R,C цепи, коммутация, первый закон коммутации, второй закон коммутации, время перехода.

Коммутация.

Прежде чем начать изучение переходных процессов, необходимо выяснить, что происходит в момент коммутации, т.е. в самом начале переходных процессов. Почему одни величины в момент коммутации изменяются скачком, а другие сохраняют своё первоначальное значение?

Так как под коммутацией понимается любая причина возникновения переходных процессов (включение, отключение, переключение и т.п.), то процессы коммутации имеют конечно, некоторую длительность. Однако, как показали многочисленные эксперименты, в подавляющем большинстве случаев время коммутации неизмеримо меньше длительности переходных процессов. Поэтому условно считается, что время коммутации бесконечно мало (в пределе стремится к нулю). Это допущение практически оправданно при длительности коммутации много меньшей, чем время переходных процессов. Обычно начало отсчёта времени процессов выбирают с момента коммутации $t=0$. Тогда момент сразу после коммутации отмечают значком «+»: $t=0_+$, а момент непосредственно перед коммутацией со значком «-»: $t=0_-$ (ведь время коммутации от $t=0_-$ до $t=0_+$ бесконечно мало, стремится к нулю). Рассмотрим поведение элементов цепи с параметрами L и C в момент коммутации.

Закон коммутации для индуктивности.

Если в ветви с индуктивностью протекал ток $i_L(0_-)$, то непосредственно перед коммутацией энергия магнитного поля индуктивности

$$\omega_M(0_-) = Li_L^2(0_-)/2 \quad (1)$$

пропорциональна квадрату этого тока.

В момент сразу после коммутации $t=0_+$ энергия магнитного поля

$$\omega_M(0_+) = Li_L^2(0_+)/2$$

пропорциональна квадрату тока $i_L^2(0_+)$

За время коммутации $\Delta t = 0_+ - 0_-$ приращение энергии магнитного поля

$$\Delta \omega_M = \omega_M(0_+) - \omega_M(0_-) = P_M \Delta t,$$

где P_M - мощность индуктивности (скорость изменения энергии магнитного поля).

Конечная мощность внешних источников энергии не может обеспечить бесконечно большую мощность индуктивности P_M в момент коммутации. Поэтому за бесконечно малое время коммутации Δt при конечном, ограниченном значении мощности приращение энергии магнитного поля бесконечно мало: $\Delta \omega_M = P_M \Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$

Следовательно, в момент сразу после коммутации $t=0_+$ энергия магнитного поля индуктивности равна этой энергии в момент непосредственно до коммутации $t=0_-$.

А поэтому из (1) и ток индуктивности

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (2)$$

Это равенство подтверждается многочисленными опытными и экспериментальными данными и называется законом коммутации для индуктивности.

Итак, закон коммутации для ветви с индуктивностью гласит, что ток в ветви с индуктивностью сразу после коммутации равен току в этой ветви непосредственно перед коммутацией и начинает изменяться с этого значения.

А как ведёт себя при коммутации напряжение на индуктивности? Так как $U_L = L di/dt$ т.е. напряжение пропорционально производной от тока по времени, то при резком изломе временного графика $i_L(t)$, скачкообразном изменении di_L/dt в момент коммутации $t=0$ напряжение на индуктивности в момент коммутации за бесконечное малое время $\Delta t = 0_+ - 0_-$ момент изменяется скачком.

Закон коммутации для ёмкости.

Если напряжение ёмкости $u_c(0_-)$, то непосредственно перед коммутацией энергии электрического поля ёмкости

$$\omega_3(0_-) = cu_c^2(0_-)/2 \quad (3)$$

пропорциональна квадрату этого напряжения.

В момент сразу после коммутации $t=0_+$ энергия электрического поля

$$\omega_3(0_+) = cu_c^2(0_+)/2$$

пропорциональна квадрату напряжения $u_c(0_+)$. За время коммутации $\Delta t = 0_+ - 0_- \rightarrow 0$ приращение энергии электрического поля

$$\Delta \omega_3 = \omega_3(0_+) - \omega_3(0_-) = P_3 \Delta t,$$

где P_3 - мощность ёмкости (скорость изменения энергии электрического поля). Конечная мощность внешних источников энергии ограничивает P_3 в момент коммутации. Поэтому за $\Delta t \rightarrow 0$ при ограниченном значении мощности P_3 приращение энергии электрического поля бесконечно мало:

$$\Delta \omega_3 = P_3 \Delta t \rightarrow 0 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Следовательно, в момент сразу после коммутации $t=0_+$ энергия электрического поля ёмкости равна этой энергии непосредственно до момента коммутации $t=0_-$. А поэтому из (3) и напряжение ёмкости $u_c(0_+) = u_c(0_-)$.

Итак, закон коммутации для ёмкости гласит, что напряжение ёмкости сразу после коммутации равно напряжению ёмкости непосредственно перед коммутацией и начинает изменяться с этого значения.

Каково при этом поведение ёмкости?

Так как $i_c = c du_c/dt$, то при резком изломе временного графика $u_c(t)$ в момент коммутации $t=0$ ток ёмкости может изменяться скачком.

Зависимые и независимые начальные условия.

Значение токов и напряжений элементов цепи в момент сразу после коммутации $t=0_+$ называются начальными условиями переходного процесса. Из законов коммутации следует, что ток индуктивности и напряжение ёмкости при коммутации не изменяются. Следовательно, их начальные значения в момент $t=0_+$ можно определить, рассчитав их значения до коммутации в момент $t=0_-$.

Поэтому значения этих величин в момент коммутации (ток в индуктивности и напряжение ёмкости) называются независимыми начальными условиями. В момент $t=0_+$ ток индуктивности и напряжение ёмкости не зависят ни от ЭДС подключаемых внешних источников энергии, ни от токов или напряжений других элементов в этот момент времени $t=0_+$.

Значения напряжений и токов сопротивлений, тока ёмкости и напряжения индуктивности в момент $t=0_+$ не могут быть определены по их значениям до коммутации, т.е. в момент $t=0_-$. Эти значения зависят от ЭДС подключенных или отключенных источников, от независимых начальных условий, от схемы соединения элементов и т.д. Зависимые

начальные условия в момент коммутации за бесконечно малое время $\Delta t=0_+-0$ могут изменяться скачкообразно.

Нулевые и ненулевые начальные условия.

Ток индуктивности и напряжение ёмкости в начале переходного процесса в момент $t=0_+$ могут иметь нулевые и ненулевые значения. Если ток индуктивности $i_L(0_-)=0$, то по закону коммутации $i_L(0_+)=0$. Следовательно, индуктивность в момент коммутации играет роль обрыва ветви (бесконечно большого сопротивления), так как в этот момент её ток равен нулю.

Если ток индуктивности $i_L(0_-) \neq 0$, то и после коммутации в момент $t=0_+$ ток равен этому же значению – индуктивность в момент коммутации играет роль источника тока. Для выполнения этой роли используется эта энергия магнитного поля индуктивности, накопленная ещё до коммутации. (табл. 1).

Если напряжение ёмкости $U_C(0_-)=0$, то по закону коммутации $U_C(0_+)=0$, т.е. ёмкость в момент коммутации играет роль короткого замыкания (бесконечно малого сопротивления), так как $U_C(0_+)=0$ при $i_C(0_+) \neq 0$

Если напряжение ёмкости $U_C(0_-) \neq 0$, то в момент коммутации ёмкость играет роль источника ЭДС, используя для этого энергию электрического поля ёмкости, накопленную ещё до коммутации. (таблица 1).

Пример 1. Определить независимые начальные условия в схеме (рис. 4), если $R_1=200$ ом, $R_2=R_3=400$ ом, $U=16$ В.

Решение. В данной схеме независимым начальным условием будет только ток ветви с индуктивностью, который в соответствии с законом коммутации будет равен току в этой ветви до коммутации.

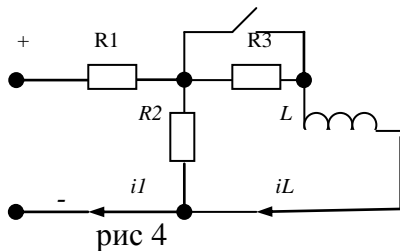


рис 4

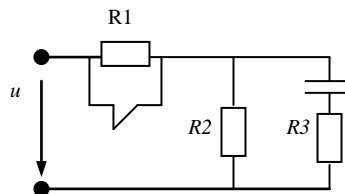


рис 5

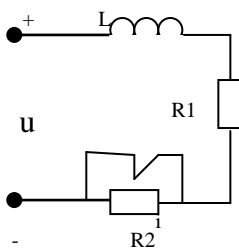


рис 6

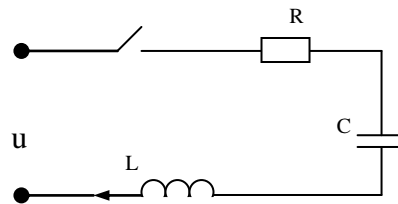


рис 7

Для расчёта $i_L(0)$ предварительно определим $i_1(0)$. Так как до коммутации в цепи (рисунок 4) ток сопротивления R_1 был постоянным, то

$$i_1(0) = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{16}{200 + \frac{400 * 400}{2 * 400}} = 0.04 \text{ A}$$

Тогда ток ветви с индуктивностью до коммутации

$$i_L(0) = i_1(0) * \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0.04 * \frac{400}{2 * 400} = 0.02 \text{ A.}$$

В соответствии с законом коммутации

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0.02 \text{ A.}$$

Контрольные вопросы.

1. Что такое коммутация?
2. Закон коммутации для индуктивности.
3. Закон коммутации для ёмкости.
4. Определить независимые начальные условия в схеме (рисунок 5) если $R_2=1\text{к}\Omega$, $R_3=1,25\text{к}\Omega$, $R_1=3\text{к}\Omega$, а внешнее напряжение $U=40\text{В}$.
5. Определить независимые начальные условия в схеме (рисунок 6) если $R_1=100\ \Omega$, $R_2=150\ \Omega$, $U=25\text{В}$.
6. Почему при отключении ёмкостной нагрузки от источника на размыкаемых контактах нет искры, а при индуктивной нагрузке есть?

Тема-36: Операторные методы расчета переходные процессы.

Цель: Изучение переходных процессов в электрических цепях.

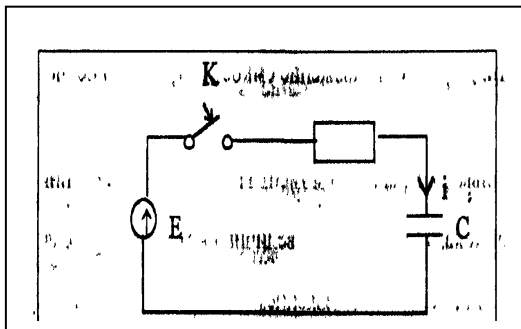
План:

1. Включение цепи R, C на постоянном напряжении
2. Короткое замыкание цепи R, C
3. Включение цепи R, C на источник гармонического напряжения

Включение цепи R, C на постоянном напряжении

В соответствии ЗНК $iR + U_C = E$ и учитывая, что ток $I = C(dU_C)/dt$ имеем следующее неоднородное дифференциальное уравнение для цепи

$$CR \frac{dU_C}{dt} + U_C = E \quad (1)$$



$$U_C(t) = U_{C.уст}(t) + (U_C^+ - U_{C.уст}^+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

$$U_{C.уст}(t) = E; \quad U_{C.уст}^+ = E \quad (4)$$

или в нормальной форме

Общее решение запишем в следующем виде

Напряжение на емкости в новом установившемся режиме и его значение при $t=0$ равны, соответственно

В соответствии с законом коммутации напряжение емкости во время коммутации скачком измениться не может, поэтому

$$U_C^+ = U_C^- = U_0$$

т.е. пусть до коммутации на емкости имелось начальное значение U_0 .

$$\alpha + \frac{1}{RC} = 0$$

Составляя характеристическое уравнение получаем

Постоянная цепи RC:

$$\tau = \left| \frac{1}{RC} \right| = RC \quad (6)$$

В соответствии с (3) и с учетом (4) - (6) напряжение на емкости во время переходного процесса изменяется

$$U_C(t) = E + (U_0 - E) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7)$$

$$\text{При этом ток } i(t) = C \frac{dU_C}{dt} = C(U_0 - E) \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U_0 - E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8)$$

На рис. 2.13. в соответствии с (7) и (8) построены напряжение емкости и ток в цепи для трех случаев в зависимости от начального напряжения емкости.

$$U_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}};$$

1-й случай. Заряд емкости: Пусть напряжение $U_0=0$, из выражений (7) и (8)

2-й случай. До заряд емкости: Начальное напряжение емкости $0 < U_0 < E$ тогда напряжение и ток изменяются в соответствии с выражениями (7) и (8). При этом как видно из выражения (8), ток при дозаряде минимальный.

3-й случай перезаряд емкости: $U_0 < 0$ напряжение емкости отрицательное, но по модулю $|U_0| < E$

Как видно полученных кривых, в начальный момент времени при включении цепи RC имеет место скачок тока, $i^+ = -(U_0 - E)/R$, величина которого значением источника ЭДС E , начальным напряжением на емкости U_0 и активным сопротивлением цепи R . При этом наибольшее значение скачок тока имеет место при перезаряде емкости, что необходимо учитывать при включении конденсаторов (необходимо подключать сопротивления, ограничивающие ток заряда емкости).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если рассмотреть энергетические процессы при включении цепи RC на источник постоянного напряжения, то окажется, что за время переходного процесса 50% энергии источника выделяется на активном сопротивлении в виде тепла, а 50% запасается в виде энергии электрического поля емкости, т.е. КПД такого устройства 50%. Другими словами, если необходимо запасти в конденсаторе энергию 1 Дж, то от источника будет потреблена энергия в 2 Дж, энергия в 1 Дж будет выделена в виде потерь на соединительных проводах.

Короткое замыкание цепи R,C

Ключ во время коммутации из положения 1 переводится в 2 (см рис 2.14). Исходя из ЗНК для цепи после коммутации, $iR + U_c = 0$ дифференциальное уравнение относительно напряжения емкости имеет вид:

$$RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{CR} U_c = 0 \quad (1)$$

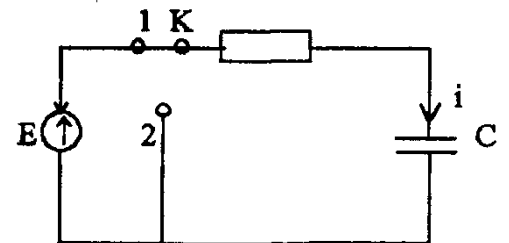
Составляя характеристическое уравнение

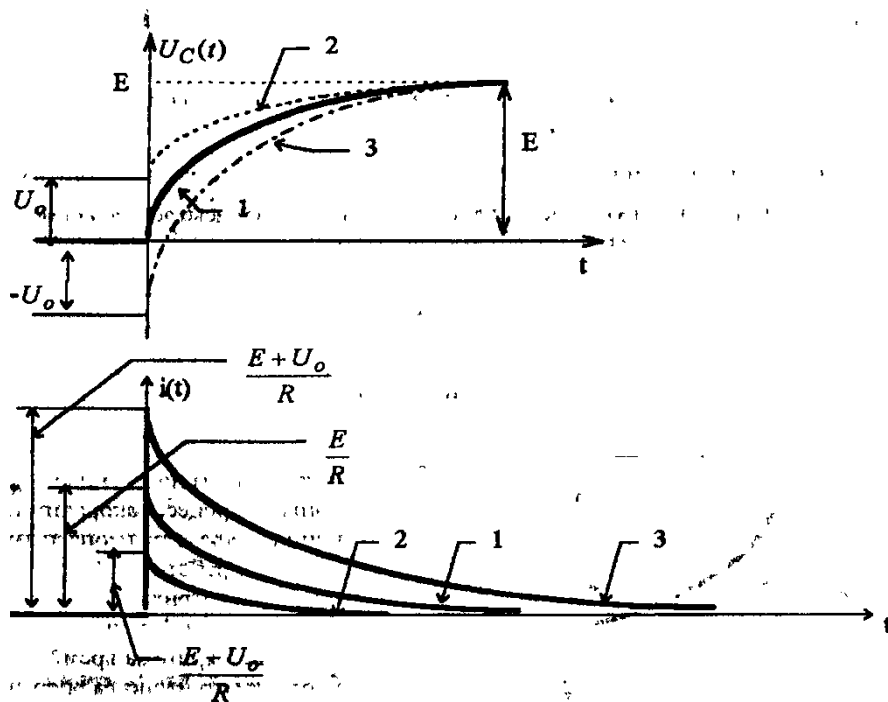
$$\alpha + \frac{1}{CR} = 0$$

и определяя его корень, найдем постоянную времени

$$\tau = \left| \frac{1}{\alpha} \right| = RC \quad (2)$$

цепи RC





$$U_C(t) = U_C^+ e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

$$i = C \frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

В соответствии с законом коммутации начальное напряжение на емкости $U_C^+ = U_C^- = E$. Так как после коммутации цепь отключается от источника, то установившееся напряжение $U_{C,уст}(t) = U_{C,уст}^- S$. Теперь, исходя из общего решения (см. выражение (3) раздела 2.5.), окончательно записываем решение дифференциального уравнения и находим ток цепи.

Как видно из полученных кривых, процесс заколачивания цепи RC является неопасным режимом работы. Если рассматривать энергетические процессы в цепи, то окажется, что за время переходного процесса энергия, накопленная в электрическом поле емкости к моменту коммутации, полностью выделяется в виде тепла на активном сопротивлении.

Включение цепи R,C на источник гармонического напряжения

Пусть исследуемая цепь R,C включается под действием гармонического источника $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$ при нулевых начальных условиях $U_C = 0$. Дифференциальное уравнение составленное по ЗНК $Ri + U_C = e(t)$, представим в виде $(dU_C)/dt = -1/(RC)U_C + 1/Ce(t)$, затем составляем характеристическое уравнение $\alpha + 1/(RC) = 0$ и находим постоянную времени. В соответствии с (3) раздела 2.

так как по закону коммутации напряжений $U^+_C = U^-_C = 0$.

При синусоидальном

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$$

напряжении источника

$$\tau = \left| \frac{1}{\alpha} \right| = RC$$

установившейся ток

$$U_C(t) = U_{C.ycm} - U^+_{C.ycm} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

где $\varphi = \arctg(\omega RC)^{-1}$ - угол

$$i_{ycm} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) \quad (2)$$

сдвига между током и напряжением источника, а установившиеся напряжение

$$U_{C.ycm}(t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) = -U_{mC} \cos(\omega t + \psi - \varphi) \quad (3)$$

где амплитудное напряжение на емкости

$$U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C}$$

Тогда из выражения 1) с учетом (2) (3) имеем

$$U_C = -U_{mC} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + U_{mC} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = RC \quad (4)$$

Вид переходного процесса зависит от фазы включения Ψ . Если $\Psi - \varphi = \pi/2$ то свободная

$$U_{C.св} = U_{mC} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$U_C = -U_{mC} \cos \omega t + U_{mC} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

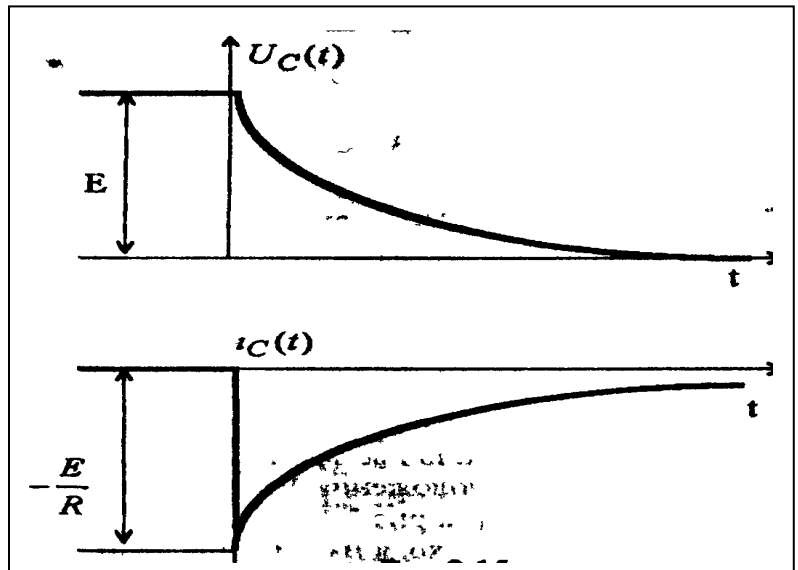
$$i = C \frac{dU_C}{dt} = I_m \sin \omega t - \frac{I_m}{\omega \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

составляющая напряжения емкости и переходный процесс отсутствует. При $\Psi - \varphi = 0$ $U_{C.св}$ имеет наибольшее значение и напряжение и ток имеют следующие выражения

На рис.2.16,а приведена кривая $U_C(t)$ при $\tau \geq 2\pi/\omega$ из которой видно что на емкости в этом случае возникает перенапряжение. При малой постоянной времени ($\tau \ll 2\pi/\omega$) в цепи в начальный Момент времени возникает значительный бросок тока величиной $I(0) = -I_m/(\omega\tau)$ (рис.2.16,б), который может

Контрольные вопросы?

1. Определить независимые начальные условия в схеме (рисунок 5) если $R_2=100$ ом, $R_3=1,25$ ом, $R_1=3$ ом, а внешнее напряжение $U=4$ В.
2. Определить независимые начальные условия в схеме (рисунок 6) если $R_1=10$ ом, $R_2=15$ ом, $U= 5$ В.
3. Почему при отключении ёмкостной нагрузки от источника на размыкаемых контактах нет искры, а при индуктивной нагрузке есть?



Тема-37: Электрические и магнитные цепи с распределёнными параметрами.

План:

1. Возникновение переходных процессов в цепях с распределенными параметрами. Падающие и отраженные волны на линиях.
2. Длинные линии с пренебрежимо малыми потерями. Распределение напряжения и токов в линии без потерь.
3. Режим бегущих волн в линии без потерь. Стоячие волны в линии без потерь.
4. Входное сопротивление линии без потерь. Линия без искажений. Условия для неискажающей линии.

Возникновение переходных процессов в цепях с распределенными параметрами.

В цепях с распределенными параметрами, в частности, в высоковольтных сетях и линиях связи, переходные процессы возникают при изменении режима цепи (включении и отключении отдельных ветвей, а также в результате грозových явлений).

Появляющиеся при этом перенапряжения или большие токи нередко приводят к повреждению изоляции или других частей электротехнических установок, если они неверно спроектированы. В отличие от переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами изменение токов и напряжений в цепях с распределенными параметрами происходит не одновременно во всех частях установки.

Изменение тока и напряжения, начавшееся в каком-либо участке цепи, распространяется на остальные элементы цепи с конечной скоростью. Вдоль воздушных линий эти изменения распространяются приблизительно со скоростью света $c = 3 \cdot 10^5$ км/с, а в кабелях - со скоростью, примерно в два раза меньшей. Скорость распространения изменений тока и напряжения. Или, как говорят, волн тока и напряжения на много порядков больше скорости перемещения электронов в проводах линий или кабелей. Она практически совпадает со скоростью распространения электромагнитных волн в среде, окружающей проводники.

В линиях такой средой является воздух; в кабелях - изоляция между жилой и оболочкой.

Движение волн тока и напряжения сопровождается передачей вдоль линии электромагнитной энергии, которая сосредоточена в поле, окружающем проводники. Распространение волн тока и напряжения определяется взаимодействием связанных с ними электрических и магнитных полей. Основные уравнения, выведенные для установившихся процессов справедливы и для переходных процессов.

В силу того, что интегрирование двух совместных дифференциальных уравнений в частных производных в общем виде представляет собой довольно сложную в математическом отношении задачу, поэтому решают их несколько упрощено, т.е. рассматривают линии без потерь, при $R_0 = 0$, $G_0 = 0$. Практически это оправдано, поскольку реальные линии с распределенными параметрами, как правило, обладают относительно малыми потерями. Изучение переходных процессов при $R_0 = 0$, $G_0 = 0$ дает возможность качественно исследовать основные черты процессов. В количественном отношении не учесть $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ для начальных стадий переходного процесса существенного влияния обычно не оказывает, однако для последующих стадий учет $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ желателен и даже необходим.

Падающие и отраженные волны на линии

В соответствии с уравнениями (7) и (8) напряжение и ток в линии могут быть

представлены в виде двух функций: функции $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ - падающие волны; функции $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ - отраженные волны.

Падающие (прямые) волны перемещаются со скоростью $v = dx/dt$ по направлению от источника энергии к приемнику, т.е. в сторону увеличения координаты x ; отраженные (обратные) волны – от приемника энергии к источнику, т.е. в сторону уменьшения координаты x .

Пусть в некоторой точке линии $x = x_1$ при $t = t_1$ значение функции $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ равно F_1 . это значение функция f_1 будет принимать во всех точках линии, где $x > x_1$, с запозданием по времени, равным $(x - x_1)/v$ и обусловленным конечной скоростью перемещения волны по линии. Так, в точке $x = x_2$ значение функции f_1 будет равно F_1 при:

$$t = t_2 = t_1 + (x_2 - x_1) / v$$

Действительно

$$f_1\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = F_1$$

Каков бы ни был закон изменения напряжения падающей волны f_1 в начале линии, по такому же закону, но с запозданием во времени изменяется напряжение падающей волны в любой точке линии.

Длинные линии с пренебрежимо малыми потерями.

Допустим, что в длинной линии отсутствует расстояние энергии, т.е. значения ее первичных параметров R_0 и G_0 равны нулю.

$$\text{Тогда } Z_c = \sqrt{L_0/C_0} \quad \gamma = j\omega\sqrt{L_0C_0} \quad \alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{L_0C_0} .$$

У такой линии волновое сопротивление Z_c является чисто вещественным и постоянным, коэффициент затухания $\alpha = 0$, а коэффициент фазы β линейная функция частоты.

Отличительной особенностью волновых процессов в подобной линии без потерь является постоянство амплитуд падающих и отраженных волн, поскольку $\alpha = 0$.

Амплитуды падающих и отраженных волн мало изменяются по длине и в линиях с потерями, если собственное ослабление линии невелико. Несмотря на малое значение собственного ослабления линии, ее длина может быть соизмерима, а в ряде случаев и немного превышать длину наиболее короткой из волн, распространяющихся в линии. Практически линии с малым ослаблением – это линии сравнительно небольших длин, используемые в области сравнительно высоких частот.

При анализе колебаний в линиях с малым собственным ослаблением или, как их называют, с малыми потерями допустимо пренебречь влиянием последних, т.е. $\alpha = 0$.

Такой подход позволяет в более ясной форме представить картину волновых явлений в длинных линиях, выявить ряд полезных свойств длинных линий и существенно упростить расчеты.

Следует иметь в виду, что в результате пренебрежения потерями, как бы малы они ни были, можно приписать линии качественно новые свойства, которыми она не обладает.

Количественные же соотношения оказываются тем менее точными, чем больше собственное ослабление реальной линии. В связи с этим, при анализе колебаний в

линиях с малыми потерями в некоторых случаях с целью проверки следует обращаться к теории длинных линий с потерями.

Контрольные вопросы?

1. В каких случаях возникают переходные процессы в линиях с распределенными параметрами?
2. Напишите волновые уравнения линии с распределенными параметрами.
3. Как решаются дифференциальные уравнения однородной линии?
В каких случаях возникают падающие и отраженные волны в линиях?

Тема-38: Волны в линиях электропередач.

План:

1. Падающие и отраженные волны на линии.
2. Длинные линии с пренебрежимо малыми потерями.

Падающие и отраженные волны на линии

В соответствии с уравнениями (7) и (8) напряжение и ток в линии могут быть представлены в виде двух функций: функции $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ - падающие волны; функции $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ - отраженные волны.

Падающие (прямые) волны перемещаются со скоростью $v = dx/dt$ по направлению от источника энергии к приемнику, т.е. в сторону увеличения координаты x ; отраженные (обратные) волны – от приемника энергии к источнику, т.е. в сторону уменьшения координаты x .

Пусть в некоторой точке линии $x = x_1$ при $t = t_1$ значение функции $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ равно F_1 . это значение функция f_1 будет принимать во всех точках линии, где $x > x_1$, с запозданием по времени, равным $(x - x_1)/v$ и обусловленным конечной скоростью перемещения волны по линии. Так, в точке $x = x_2$ значение функции f_1 будет равно F_1 при:

$$t = t_2 = t_1 + (x_2 - x_1) / v$$

Действительно

$$f_1\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = F_1$$

Каков бы ни был закон изменения напряжения падающей волны f_1 в начале линии, по такому же закону, но с запозданием во времени изменяется напряжение падающей волны в любой точке линии.

Длинные линии с пренебрежимо малыми потерями.

Допустим, что в длинной линии отсутствует сопротивление энергии, т.е. значения ее первичных параметров R_0 и G_0 равны нулю.

$$\text{Тогда } Z_c = \sqrt{L_0/C_0} \quad \gamma = j\omega\sqrt{L_0C_0} \quad \alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{L_0C_0}.$$

У такой линии волновое сопротивление Z_c является чисто вещественным и постоянным, коэффициент затухания $\alpha = 0$, а коэффициент фазы β линейная функция частоты.

Отличительной особенностью волновых процессов в подобной линии без потерь является постоянство амплитуд падающих и отраженных волн, поскольку $\alpha = 0$.

Амплитуды падающих и отраженных волн мало изменяются по длине и в линиях с потерями, если собственное ослабление линии невелико. Несмотря на малое значение собственного ослабления линии, ее длина может быть соизмерима, а в ряде случаев и немного превышать длину наиболее короткой из волн, распространяющихся в линии. Практически линии с малым ослаблением – это линии сравнительно небольших длин, используемые в области сравнительно высоких частот.

При анализе колебаний в линиях с малым собственным ослаблением или, как их называют, с малыми потерями допустимо пренебречь влиянием последних, т.е. $\alpha = 0$.

Такой подход позволяет в более ясной форме представить картину волновых явлений в длинных линиях, выявить ряд полезных свойств длинных линий и существенно упростить расчеты.

Следует иметь в виду, что в результате пренебрежения потерями, как бы малы они ни были, можно приписать линии качественно новые свойства, которыми она не обладает.

Количественные же соотношения оказываются тем менее точными, чем больше собственное ослабление реальной линии. В связи с этим, при анализе колебаний в линиях с малыми потерями в некоторых случаях с целью проверки следует обращаться к теории длинных линий с потерями.

Контрольные вопросы?

1. В каких случаях возникают падающие и отраженные волны в линиях?
2. Как изменяется напряжение падающей волны в любой точке линии?
3. Чему равен ток падающей волны в любой точке линии и в любой момент времени?
4. Чему равен ток обратной волны в любой точке линии?

Тема-39: Линии без искажения и без потерь.

План:

1. Волновое сопротивление линии:
2. Режим бегущих волн в линии без потерь. Стоячие волны в линии без потерь.
3. Входное сопротивление линии без потерь. Линия без искажений. Условия для неискажающей линии.

Волновое сопротивление линии:

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

и коэффициент распределения:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

зависят от частоты. Поэтому условия прохождения волн тока и напряжения для разных частот оказываются различными.

Если сигнал на входе линии является периодической несинусоидальной функцией времени, то на выходе линии форма кривой сигнала будет отличаться от ее формы на входе, т.к. для различных гармоник условия прохождения различны.

Это же будет иметь место и при любом апериодическом сигнале, т.к. такой сигнал может быть представлен в виде сплошного частотного спектра с помощью преобразования Фурье и для различных частот этого спектра условия прохождения вдоль линии будут различными.

Для линии связи чрезвычайно важно создание условий, при которых отсутствовало бы искажение формы передаваемого сигнала (тока и напряжения). Для этого необходимо, чтобы волновое сопротивление \underline{Z} , коэффициент затухания α и фазовая скорость $v = \omega / \beta$ не зависели от частоты. Очевидно, при этом коэффициент фазы β должен быть пропорционален частоте. Такие условия оказываются выполненными, если соблюдено соотношение: $R_0 / L_0 = G_0 / C_0$.

Действительно при этом:

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{R_0/L_0 + j\omega}{G_0/L_0 + j\omega}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{R_0/L_0 + j\omega}{G_0/L_0 + j\omega}} =$$

т.е.

удовлетворяются все вышеуказанные требования, необходимые для того, чтобы линия была неискажающей. Можно показать, что в этих условиях коэффициент затухания и коэффициент фазы имеют минимальные значения, т.е.

$$\alpha_{\min} = \sqrt{R_0 G_0} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

Соответственно фазовая скорость при этом принимает максимальное значение.

$v_{\max} = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0}$ и равна скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике, окружающем провода линии.

Для воздушных линий $Z \approx 300 \div 400$ Ом $v \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Для кабельной $Z \approx 50$ Ом $v < 3 \cdot 10^8$ м/с. Длина волны $\lambda = v / f$ для воздушной линии при частоте 50 Гц оказывается 6000 км.

Обычно в линиях $R_0 / L_0 > G_0 / C_0$, т.к. проводимость утечки через изоляцию незначительна. Для достижения равенства $R_0 / L_0 = G_0 / C_0$ увеличение проводимости нецелесообразно.

Уменьшение R_0 или C_0 практически не представляется возможным. Поэтому в линиях связи искусственно увеличивают индуктивность, включая в линию через определенные расстояния особые реактивные катушки или применяя кабели, проводящие жилы которых обмотаны тонкой лентой их материала с высокой магнитной проницаемостью.

Мы получаем условие для передачи сигнала без искажений, но сигнал затухает по мере продвижения вдоль линии, т.к. $\alpha > 0$. В предельном случае, когда $R_0 = 0$, $G_0 = 0$ получаем неискажающую линию без потерь, по которой сигнал передается не только без искажения, но и без затухания. Для осуществления передачи сигналов без искажения, необходимо, чтобы отсутствовали отраженные волны от конца линии. Для этого необходимо, чтобы приемник и линия были согласованы, т.е. $Z_{пр} = Z_c$.

Режим стоячих волн в линии без потерь.

Пусть в линии без потерь распространяются навстречу друг другу две волны длиной $\lambda = 2\pi / \beta$ равных амплитуд. С подобным случаем приходится встречаться всякий раз, когда значение модуля коэффициента отражения равно единице, т.е. когда падающая волна полностью отражается. Это происходит в случаях, когда выходные зажимы линии замкнуты накоротко, разомкнуты или нагружены на чисто реактивное сопротивление. Принимая для упрощения начальную фазу падающей волны в конце линии равной нулю, имеем:

$$U_{пад} = U_m \cos(\omega t + \beta y)$$

следовательно:

$$U = U_{пад} + U_{отр} = U_m \cos(\omega t + \beta y) + U_m \cos(\omega t - \beta y + \varphi), \quad \text{а}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \text{то}$$

$$U = 2U_m \cos\left(\beta y - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

это выражение характеризует гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой:

$$2U_m \left| \cos\left(\beta y - \frac{\varphi}{2}\right) \right| = 2U_m \left| \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{\varphi}{2}\right) \right|$$

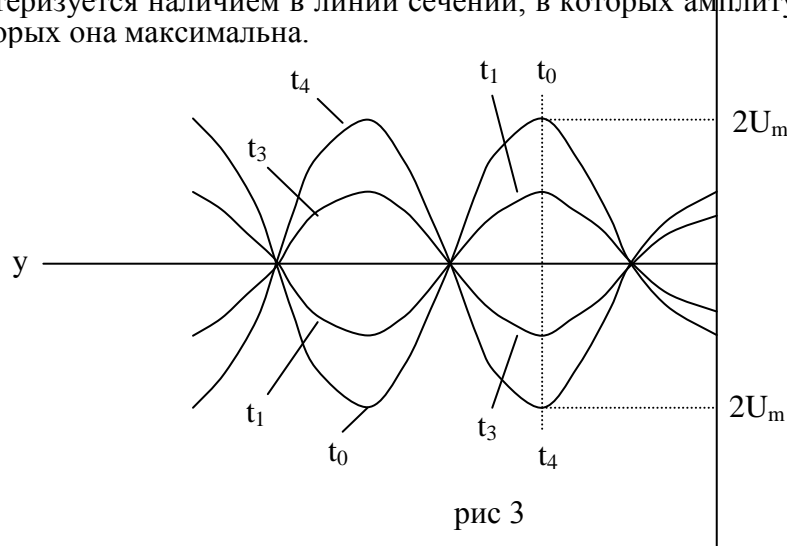
значения которой изменяются вдоль линии.

В сечениях линии, где $\beta y - 0,5\varphi = k\pi$, амплитуда напряжения принимает максимальное значение, вдвое превышающее амплитуду напряжения падающей (отраженной) волны.

Там же, где $\beta y - 0,5\varphi = (2k - 1)\pi / 2$, она равна 0.

На рис 3 приведены графики распределения мгновенных значений напряжения в разомкнутой на конце линии для некоторых последовательных моментов $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ в пределах одного полупериода колебания.

Рассмотренный режим колебаний в линии называют режимом стоячих волн. Такой режим характеризуется наличием в линии сечений, в которых амплитуда колебаний равна нулю и в которых она максимальна.



Первые называют узлами, а вторые пучностями стоячей волны. В силу периодического характера распределения мгновенных значений гармонических колебаний в линии без потерь смежные узлы удалены друг от друга на расстояние, равное половине длины падающей (отраженной) волны. Точно также удалены друг от друга на расстояние, равное половине длины волны, и пучности колебаний. Расстояние же от узла до смежной пучности равно одной четверти длины волны. В любых точках, находящихся между двумя смежными узлами, колебания напряжения происходят в одной и той же фазе; при переходе через узел фазы колебаний скачком изменяются на угол π .

Аналогично выглядит картина колебания тока в линии без потерь. Действительно, т.к. $I_{\text{пад}} = U_{\text{пад}} / Z_c$ и $I_{\text{отр}} = -U_{\text{отр}} / Z_c$, то

$$i = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}} = \frac{U_m}{Z_c} \cos(\omega t + \beta y) - \frac{U_m}{Z_c} \cos(\omega t - \beta y + \varphi) = 2I_m \sin\left(\beta y - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

сопоставление уравнений для тока и напряжения показывает, что узлы (пучности) тока совпадают с пучностями (узлами) напряжения.

На рис 4 показано распределение амплитуд напряжений и токов в короткозамкнутой линии.

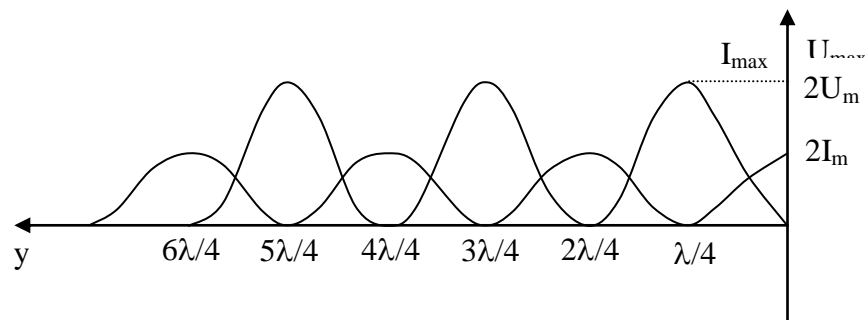


рис. 4

В конце линии расположен узел напряжения поскольку $Z_{\text{н}} = 0$ всегда $U_2 = 0$. Этому узлу напряжения соответствует пучность тока.

Распределения амплитуд и фаз колебаний можно найти, если положить, что $\varphi = \pi$.

Распределение амплитуд напряжений и токов в разомкнутой на конце линии приведено на рис 5. Здесь в конце линии располагаются узел тока ($i_2 = 0$) и пучность напряжения.

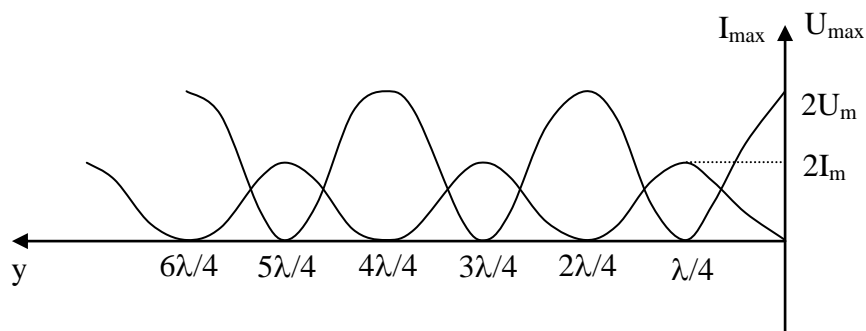


рис. 5

Разность фаз колебаний напряжения и тока в любом сечении линии, находящейся в режиме стоячих волн, равна или $+\pi/2$ или $-\pi/2$ и изменяет знак при переходе через каждый узел напряжения и каждый узел тока.

Это означает, что входное сопротивление линии оказывается чисто реактивным.

При несогласованной активной нагрузке на линии возникает смешанная волна – комбинация бегущей и стоячей волн.

Если обозначить за $m = Z_c / Z_{\text{н}}$, то:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 \cos \beta y + j m U_0 \sin \beta y = \dot{U}_0 \cos \beta y + j \dot{U}_0 \sin \beta y + j \dot{U}_0 (m-1) \sin \beta y$$

или

$$\dot{U} = \dot{U}_0 e^{j\beta y} + j(m-1)\dot{U}_0 \sin \beta y$$

Первое слагаемое – бегущая, второе – стоячая волна.

Распределение напряжения на линии в функции расстояния y :

$$U = U_0 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y}$$

При $m > 1$ напряжение на конце линии минимально (U_{\min}), а через $1/4\lambda\beta y = \pi/2$ максимально (U_{\max}). При $m < 1$ на конце линии U_{\max} , а через $\beta y = \pi/2$ – минимум.

Коэффициентом бегущей волны называют отношение минимума напряжения смешанной волны к ее максимуму:

$$K_{\text{бв}} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$$

Коэффициент стоячей волны:

$$K_{\text{св}} = \frac{1}{K_{\text{бв}}}$$

График распределения амплитуд напряжений и токов в линиях без потерь, построенных при $m = 0,8$ $\psi = \pi/6$ показаны на рис. 6

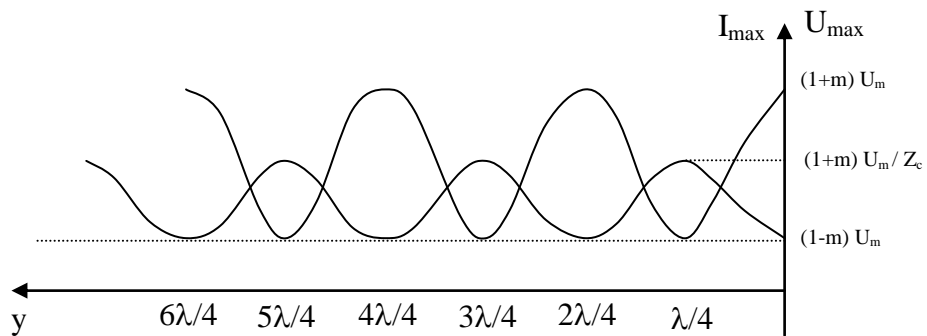


рис. 6

Входное сопротивление линии без потерь.

Для линии без потерь при холостом ходе $I_2 = 0$, поэтому $Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cos \beta y}{-jZ_c \sin \beta y} = -jZ_c \cot \beta y = -j \frac{L_0}{C_0} \cot \beta y = jx$

Исследуем характер изменения входного сопротивления линии без потерь при разомкнутых выходных зажимах $Z_{\text{вх}}$ при изменении расстояния « y » от конца линии до текущей точки на ней.

В интервале βy от 0 до $\pi/2$ $\text{tg} \beta y$ изменяется от 0 до ∞ , поэтому $Z_{\text{вх}}$ имеет емкостной характер (множитель $-j$) и по модулю изменяется от ∞ до 0. (рис. *).

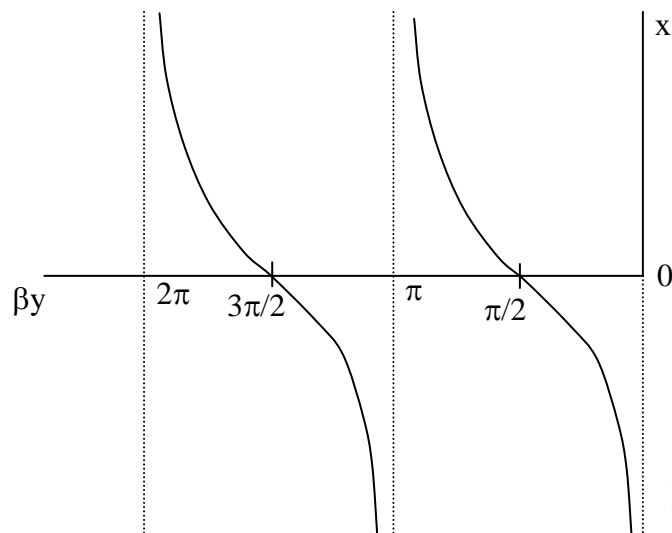


рис. 96

На рис. 96 расположение кривой выше оси абсцисс соответствует индуктивному характеру реактивного сопротивления линии x , ниже оси – емкостному. В интервале значений βy от $\pi/2$ до π $\text{tg}\beta y$ отрицателен и изменяется от $-\infty$ до 0 , поэтому $Z_{\text{вхр}}$ изменяется по модулю от 0 до ∞ и имеет индуктивный характер (множитель $+j$). Изменяя длину отрезка линии без потерь, можно имитировать емкостное и индуктивное сопротивление любой величины.

При коротком замыкании на конце линии $U_2 = 0$ следует, что:

$$Z_{\text{вхк}} = jZ_c \text{tg}\beta y = j\sqrt{L_0/C_0} \text{tg}\beta y, \quad \text{где} \\ \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$$

Будем менять длину отрезка линии «у» исследуем характер изменения входного сопротивления (рис. 97).

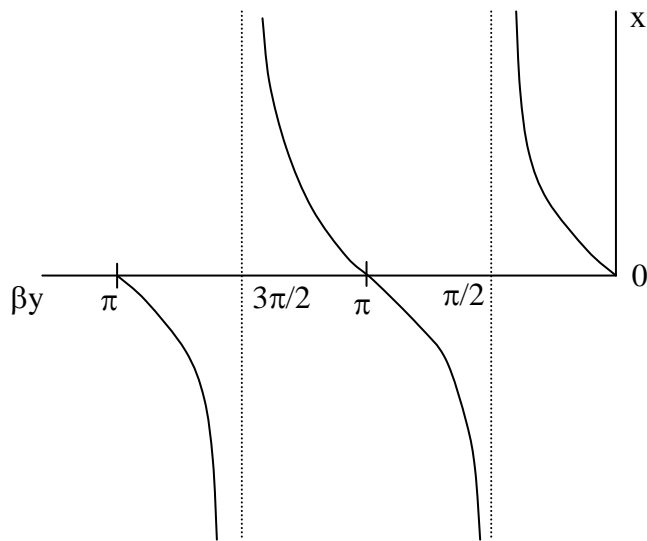


рис. 97

В интервале βy от 0 до $\pi/2$ $\text{tg}\beta y$ положителен и изменяется от 0 до ∞ , следовательно, в этом интервале входное сопротивление имеет индуктивный характер и по модулю изменяется от 0 до ∞ .

В интервале βy от $\pi/2$ до π входное сопротивление имеет емкостной характер и изменяется по модулю от $-\infty$ до 0 (в точке $\beta y = \pi/2$ $\text{tg}\beta y$ скачком изменяется от $+\infty$ до $-\infty$).

Изменяя длину отрезка линии, короткозамкнутой на конце можно создавать различные по величине индуктивные и емкостные сопротивления.

Отрезок короткозамкнутой на конце линии без потерь длиной в четверть длины волны теоретически имеет входное сопротивление, равное бесконечности. Это позволяет применять его при подвеске проводов в качестве изолятора.

Входное сопротивление нагруженной линии без потерь: $Z_{\text{вр}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ чисто вещественно и максимально по модулю.

Расстояние между двумя сечениями линии, в которых ее входные сопротивления чисто вещественны и максимальны (минимально), равно половине длины волны в линии.

Посредине между ними расположено сечение, в котором входное сопротивление линии чисто вещественно и минимально (максимально).

Контрольные вопросы?

1. В каком случае возникает преломленная волна в линиях?
2. Какие условия соблюдаются в месте неоднородностей?
3. Как заменить линию с распределенными параметрами схемой с сосредоточенными параметрами?

Тема-40: Столкновения и модуляционные колебания.

Цель: изучить роль волн и модулированных колебаний в линиях электропередач

ПЛАН:

1. Примеры.
2. Модулированные колебания.

1. Примеры.

То же самое и амплитуда, но вибрация действия, вызванная коллапсом двух синусоидальных колебаний, которые не равны.

$$\text{Предположим, что } f(t) = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t$$

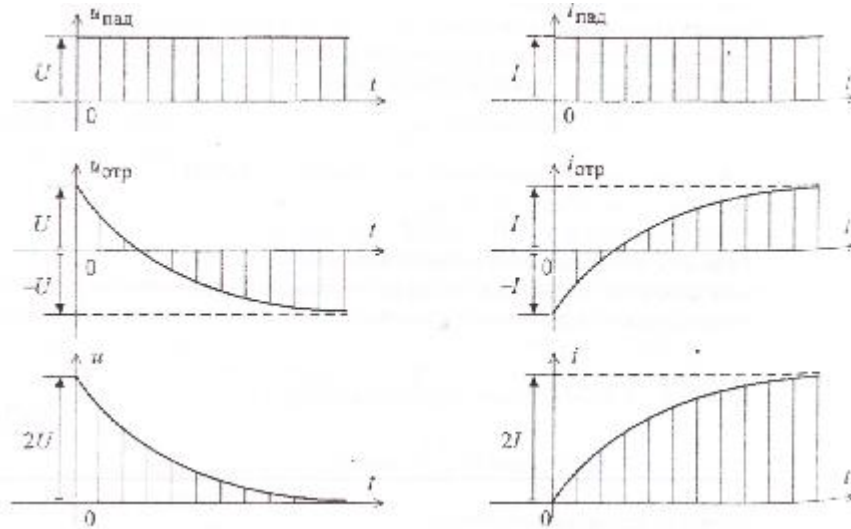
Как вы знаете, $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos (\alpha - \beta) / 2 \cdot \sin (\alpha + \beta) / 2$

Принимая это во внимание

$$f(t) = 2A \cos \Omega t \sin \omega t$$

$$\text{где } \Omega = (\omega_1 - \omega_2) / 2 ; \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 / 2 ; \quad \Omega \ll \omega$$

Катастрофы могут использоваться для определения частоты двух вибраций.



2. Модулированные колебания.

Модифицированный $f(t) = A \sin (\omega t + \psi)$ - колебательная флуктуация, которая изменяет амплитуду A , частоту ω , фазу ψ и другие параметры с течением времени.

Если амплитуда колебаний A является переменной, частота ω и ψ фаза остаются неизменными, то вибрация называется модулированной вибрацией по амплитуде.

Если колебания частоты A и амплитуды не изменяются, это колебание называется модулированной частотой колебаний.

Если фаза колебаний и частота изменяются, колебания модулируются фазой.

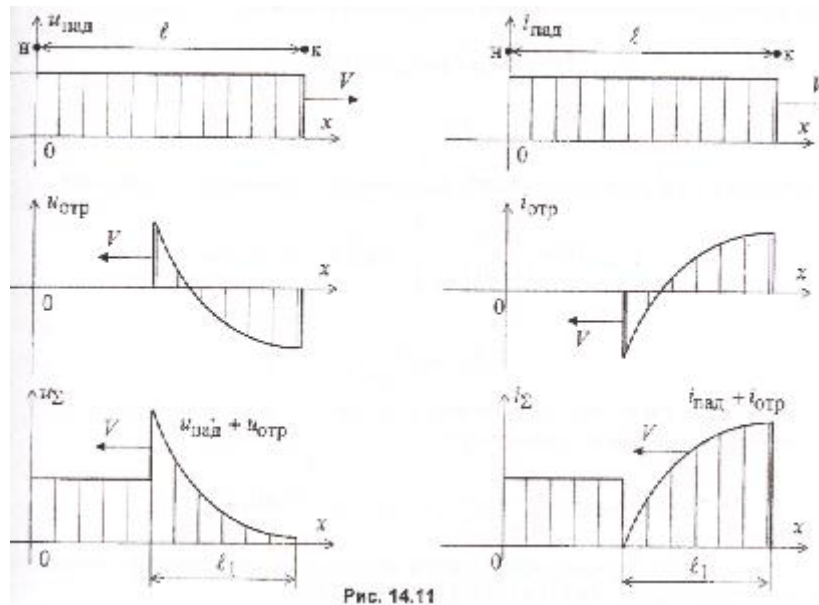


Рис. 14.11

Нормальные амплитудно-модулированные (АМ) флукуационные амплитудные синусы модулируются модулем и называются вибрациями.

$$f(t) = A_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin (\omega t + \psi) \quad \Omega \ll \omega$$

Здесь m называется глубиной модуляции и $m < 1$
 Если мы заменим амплитуду пазух на монету

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$f = A_0 \sin (\omega t + \psi) + (mA_0 / 2) \cos [(\omega - \Omega)t + \psi] - (mA_0) \cos [(\omega + \Omega)t + \psi]$$

В конечном выражении частота ω -носителей, $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ - боковые частоты. Эти частотные колебания дают спектр модулированных преобразований в амплитуде:

Контрольные вопросы?

1. Что такое Стинг?
2. Объясните модулированные вибрации.
3. Каков спектр вибраций?

41– Тема. Нелинейные электрические цепи постоянного тока. Методы расчета нелинейные электрических цепей постоянного тока.

План:

1. Особые свойства нелинейных электрических цепей.
2. Характеристики и параметры электрических цепей.
3. Общая характеристика методов расчёта электрических цепей постоянного тока.
4. Последовательное соединение нелинейных сопротивлений.
5. Параллельное соединение нелинейных сопротивлений, и не содержащих источников ЭДС.
6. Последовательное соединение участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники Э.Д.С.
7. Параллельное соединение участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники Э.Д.С.
8. Смешанное соединение участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники Э.Д.С.

Особые свойства нелинейных электрических цепей.

Нелинейными электрическими цепями являются цепи, параметры которых зависят от тока и напряжения. Все электрические цепи нелинейные. Однако во многих практических эта нелинейность столь слабо выражена, что при анализе процессов в цепи ею можно пренебречь. Существуют элементы цепи, нелинейность характеристик которых выражена весьма резко. Цепи, содержащие такие элементы, именуемые нелинейными цепями, обладают рядом новых свойств, которые отсутствуют для линейных цепей. Эти свойства позволяют создать основанные на них системы автоматического управления и регулирования, устройства для преобразования электромагнитной энергии, устройства для производства электрических измерений и передачи информации, быстродействующие вычислительные машины и т.д. Использование нелинейных элементов, обладающих при одном направлении тока малым сопротивлением, а при другом направлении большим сопротивлением даёт возможность осуществить преобразование переменного тока в постоянный.

Возможность создания управляемых нелинейных элементов (триодов, тиристоров) позволяет использовать их для преобразования постоянного тока в переменный ток (инвертирование). Своеобразные явления возникают в цепи переменного тока, содержащей конденсаторы и индуктивные катушки с нелинейными характеристиками, называемые явлениями феррорезонансная. На этой основе осуществляются стабилизаторы напряжения и тока.

Теоретическое исследование процессов в нелинейных электрических цепях оказывается много сложнее, чем в линейных. Процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями, которые составляются на основе первого и второго законов Кирхгофа. Для аналитического решения этих уравнений необходимы аналитические характеристики всех нелинейных элементов цепи. Можно выбрать различные аналитические выражения, приближённо изображающие характеристики элементов. От удачного выбора приближённых аналитических выражений характеристик зависит возможность аналитического решения задачи.

Для анализа процессов в нелинейных цепях с успехом используются графические или графоаналитические методы. Эти методы дают более точный результат, так как в них используются действительные характеристики нелинейных элементов, заданные графически в виде кривых. Однако такие методы не дают возможности получить общие связи, позволяющие анализировать изменения характера процессов в цепи при изменении её параметров.

Элементы и характеристики электрической цепи

Элементами нелинейной электрической цепи являются нелинейные сопротивления. Их можно разделить на 3 группы: активные, индуктивные и ёмкостные. Каждую из этих групп можно подразделить на управляемые и неуправляемые. Основными характеристиками нелинейных элементов являются: для нелинейных сопротивлений – вольтамперные характеристики – это зависимость тока, протекающего через сопротивление, от напряжения на нём, т.е.

$$i = f(u);$$

Для нелинейной индуктивности основной характеристикой является вебер – амперная характеристика – это зависимость потокосцепления от тока, т.е.

$$\Psi = f(i);$$

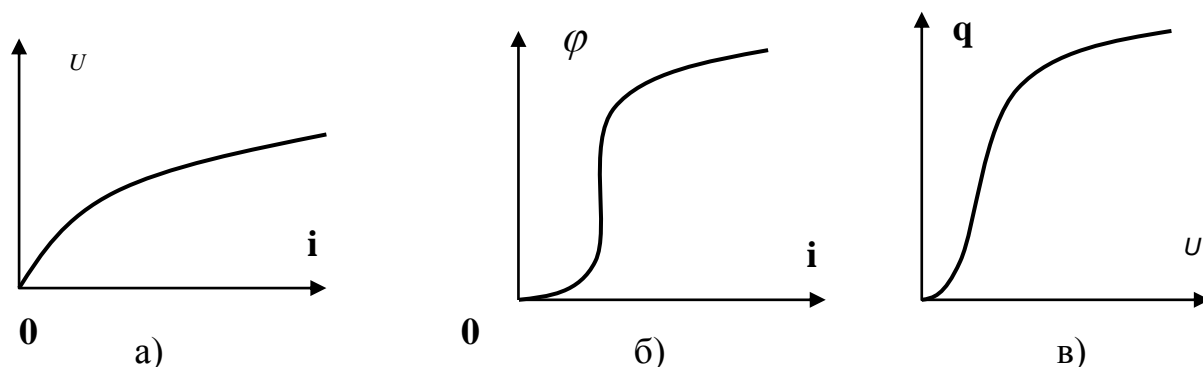
Для нелинейной ёмкости основной характеристикой является кулон-вольтная характеристика – это зависимость заряда от напряжения,

$$\text{т.е. } q = f(u);$$

Характеристики бывают симметричные и несимметричные. К симметричным элементам относятся, например, лампы накаливания и терм сопротивления, пиритовые элементы, лампы с тлеющим зарядом. К несимметричным нелинейным элементам относятся, например, электрическая дуга при неоднородных электродах, лампа с тлеющим зарядом при неодинаковых формах электродов, ртутный вентиль, кенотрон, газотрон, полупроводниковый вентиль.

Характерной особенностью некоторых нелинейных элементов при переменном токе является значительная их инерционность, которая приводит к невозможности быстрого изменения их сопротивления. Такими инерционными нелинейными элементами являются, например, лампы накаливания, обладающие значительной тепловой энергией. В отличие от инерционных элементов мы располагаем нелинейными элементами, которые при не слишком высоких частотах могут рассматриваться как безынерционные. К ним относятся электронные лампы. Такие элементы являются нелинейными как в отношении действующих значений, так и в отношении мгновенных значений тока и напряжения. Характеристики нелинейных элементов могут быть статическими и динамическими.

Статическими называют характеристики, в которых каждая точка даёт значения постоянного напряжения при соответствующем значении постоянного тока.



Статические характеристики

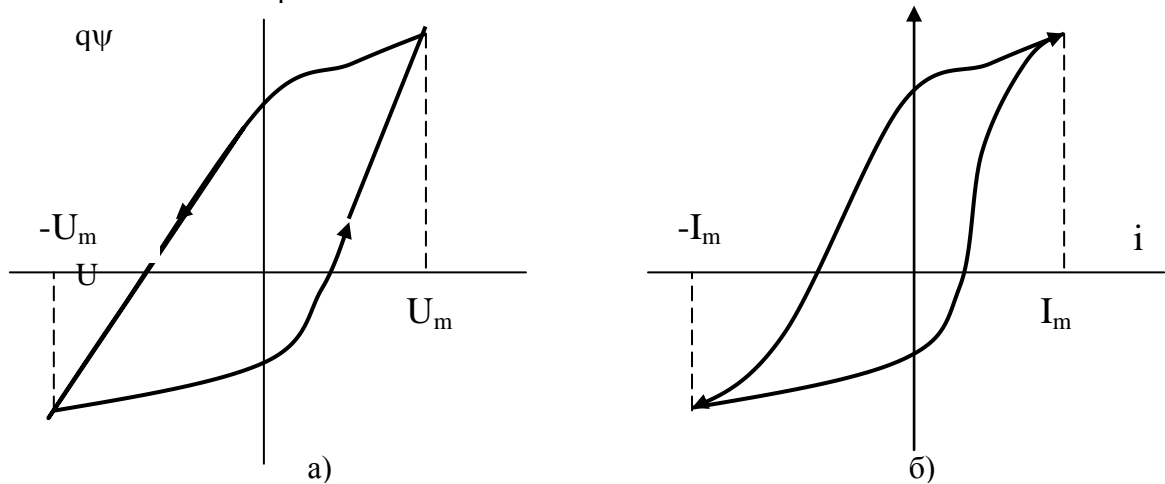
- а) для нелинейного сопротивления;
- б) для нелинейной катушки индуктивности;
- в) для нелинейной ёмкости;

Из статических характеристик определяют статические параметры нелинейных элементов

$$r_{ст} = \frac{U}{i} = f(i) \quad \text{и} \quad g_{ст} = \frac{i}{U} = P_1(i);$$

$$L_{ст} = \frac{\varphi}{i} = F_2(i) \quad C_{ст} = \frac{q}{U} = F_3(U);$$

Динамическими называют характеристики, дающие связь между напряжением и током, между потоком и током, между зарядом и напряжением, при достаточно быстром изменении тока и напряжения.



Динамические характеристики:

а) нелинейной ёмкости;

б) нелинейной индуктивности;

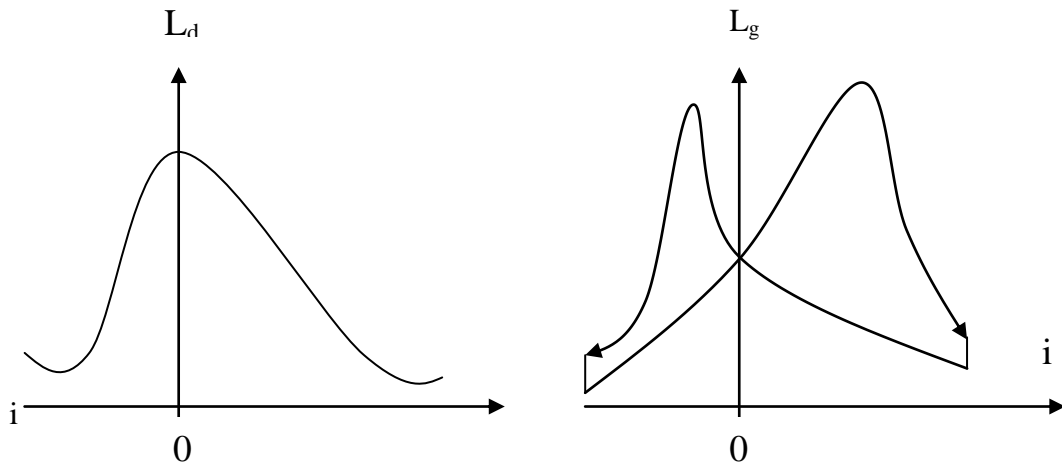
Из динамических характеристик определяют динамические параметры нелинейных элементов

$$R_g = \frac{du}{di} = F_1(i) \quad L_g = \frac{d\varphi}{di} = F_3(i);$$

$$g_g = \frac{di}{dq} = F_2(i) \quad C_g = \frac{dq}{dU} = F(U);$$

Определённые из статических характеристик сопротивления и проводимости в виде производных $\frac{du}{di}$ или $\frac{di}{dq}$ индуктивность в виде $\frac{d\varphi}{di}$ ёмкость в виде $\frac{dq}{dU}$

$\frac{dq}{dU}$ называются дифференциальными, и будем обозначать r_d, g_d, L_d, C_d . Характеристики для $r_g(i), g_g(i), L_g(i), C_g(u)$ и характеристика $r_d(i), g_d(i), L_d(i), C_d(u)$ не совпадают, Так, например, для нелинейной индуктивности.



Для общности мы всегда будем говорить о динамическом сопротивлении, индуктивности, ёмкости, имея в виду, что при весьма медленном изменении тока, напряжения, они совпадают с дифференциальными.

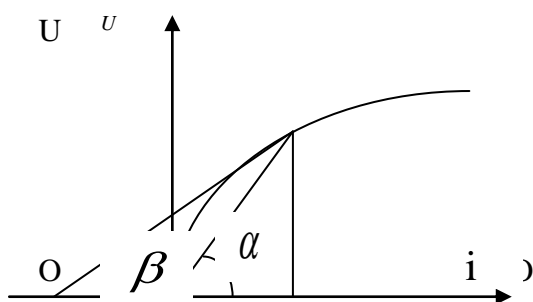
$$r_g = r_d; L_g = L_d; C_g = C_d;$$

Статические параметры пропорциональны тангенсу угла наклона луча, проведённого из начала координат в данную точку характеристики.

Динамические параметры пропорциональны тангенсу угла наклона касательной в данной точке характеристики.

Статические параметры всегда положительны, а динамические положительные только тогда, когда данная точка характеристики лежит на её восходящей части и отрицательна, если данная точка лежит на падающей части характеристики.

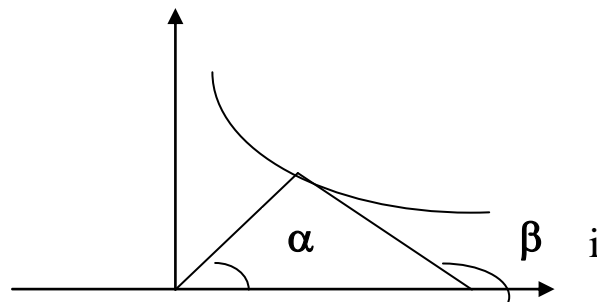
Так, например, для нелинейного сопротивления:



$$r_{ст} = \text{ktg } \alpha > 0$$

$$r_g = \text{ktg } \beta > 0$$

$$k = \frac{U}{i}$$



$$r_{ст} = \text{ktg } \alpha > 0$$

$$r_g = \text{ktg } \beta < 0$$

Общая характеристика методов расчёта нелинейных электрических цепей постоянного тока.

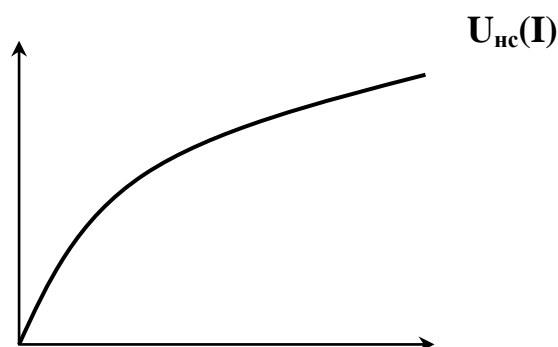
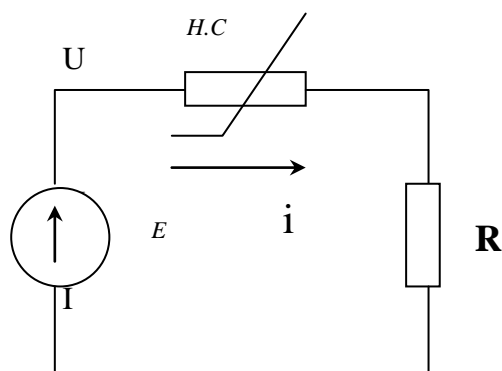
Для любой сложной электрической цепи, содержащей нелинейные сопротивления, с линейной частью можно осуществлять любые преобразования, облегчающие расчёт всей электрической цепи. К нелинейным цепям применимы следующие методы:

- 1) метод двух узлов;
- 2) замена нескольких параллельно включённых ветвей одной эквивалентной;
- 3) метод холостого хода и короткого замыкания (метод эквивалентного генератора);

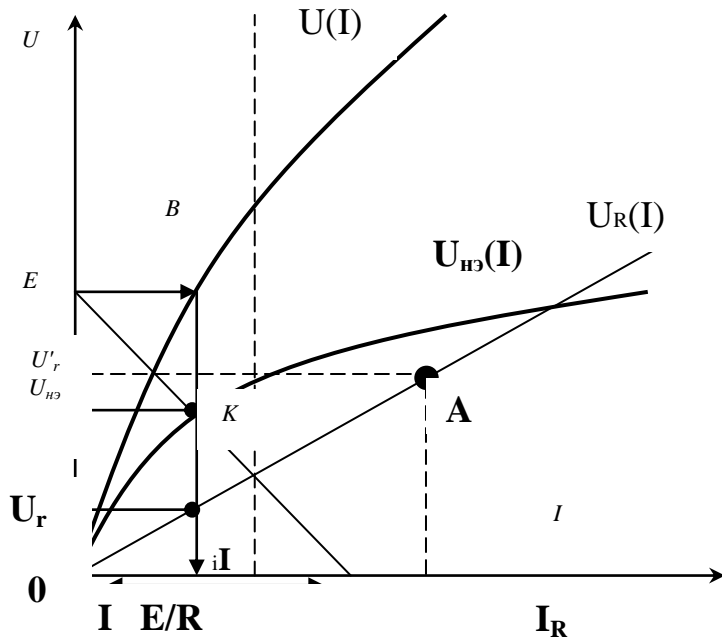
До проведения расчёта нелинейных цепей должны быть известны вольтамперные характеристики входящих в схему нелинейных сопротивлений. Расчёт нелинейных цепей постоянного тока производится, как правило, графически.

Последовательное соединение нелинейных сопротивлений

Пусть задана схема последовательного соединения нелинейного сопротивления, с заданной в.а.х., линейного сопротивления R и источника ЭДС E . Требуется найти ток в цепи и напряжение на нелинейном и линейном сопротивлении цепи.



Построим характеристику линейного элемента R. Зададимся значением тока I_r , тогда $U'_r = I_r R$. Эта характеристика линейная, которая пройдёт через начало координат и точку A(I_r, U'_r).



Согласно второму закону Кирхгофа $E = U_{нз} + U_r$, но так как $U = f(I) + U_r(I)$, то полное напряжение в цепи

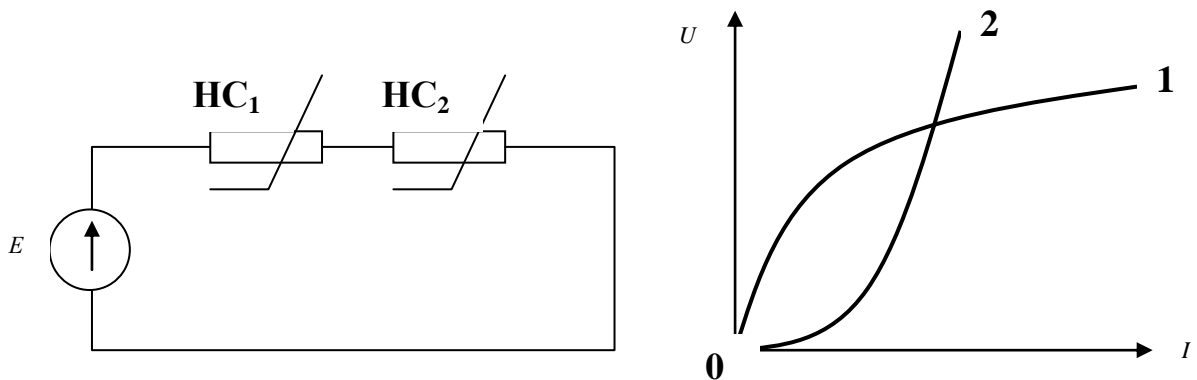
$U(I) = U_{нз} + U_r(I)$, так как ток в последовательной цепи один и тот же, то сложим эти две характеристики по оси ординат, т.е. по напряжению, получим характеристику $U(I)$, зная, что $U = E$, найдём по характеристике $U(I)$ точку B, которой соответствует ток I в нелинейной цепи. Зная I по характеристике $U_r(I)$ находим U_r , а по $U_{нз}(I)$ найдём $U_{нз}$. В данном случае должно соблюдаться условие

$$U_{нз} + U_r(I) = E$$

Разберём второй способ, учитывая, что $IR + U_{нз} = E$ в координатах I и $U_{нз}$ представляет собой уравнение прямой, проходящей через точки $I = E/R, U_{нз} = 0$; $U_{нз} = U = E$ проводим эту прямую. Эта прямая (нагрузочная) пересекает характеристику $U_{нз}(I)$ в точке K, которой соответствует ток I в электрической цепи и напряжение на линейном элементе, найдём из уравнения закона Кирхгофа.

$$U_r = E - U_{нз}$$

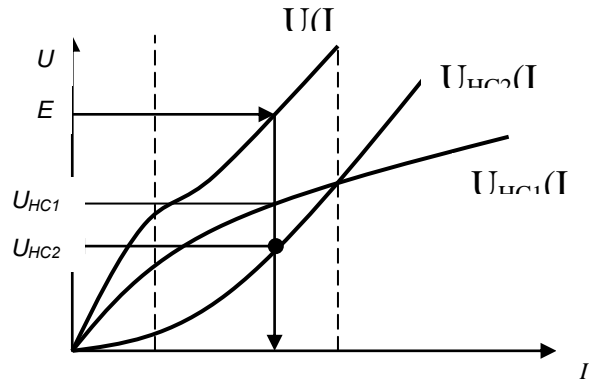
Пусть задана электрическая цепь с двумя нелинейными элементами $НС_1$ и $НС_2$ с заданными в.а.х.



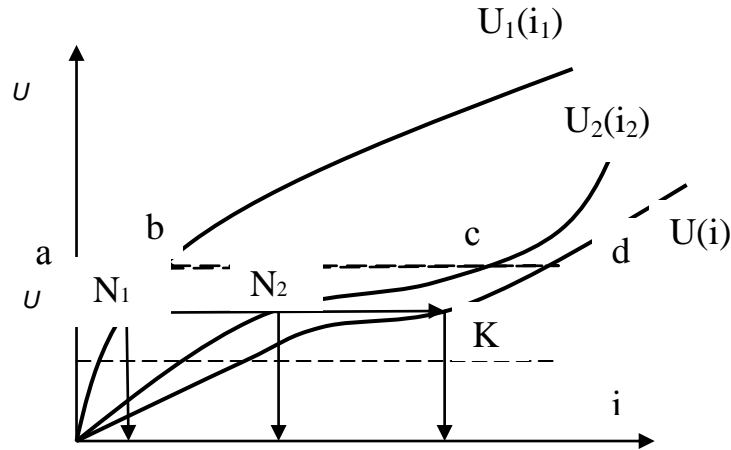
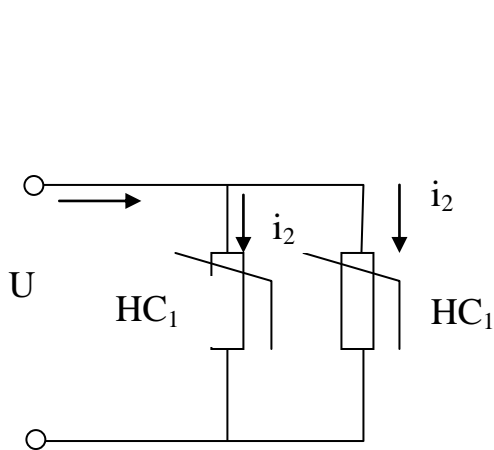
Найдём ток в цепи и напряжение на нелинейных сопротивлениях. Согласно второго закона Кирхгофа:

$$U(I) = U_{НС1}(I) + U_{НС2}(I);$$

Сложим характеристики НС по напряжению. По характеристике находим I, $U_{НС1}$, $U_{НС2}$.



Параллельное сведение нелинейных сопротивлений

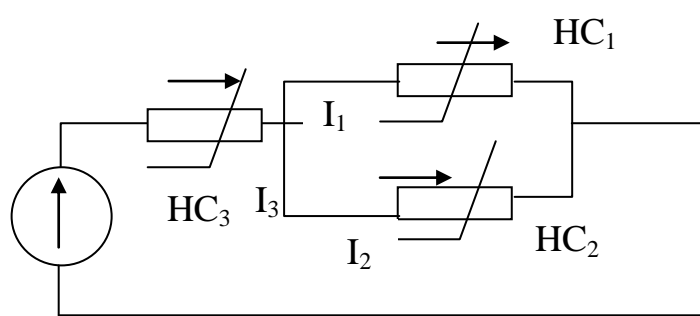


Согласно первому закону Кирхгофа

$$i(U) = i_1(U_1) + i_2(U_2)$$

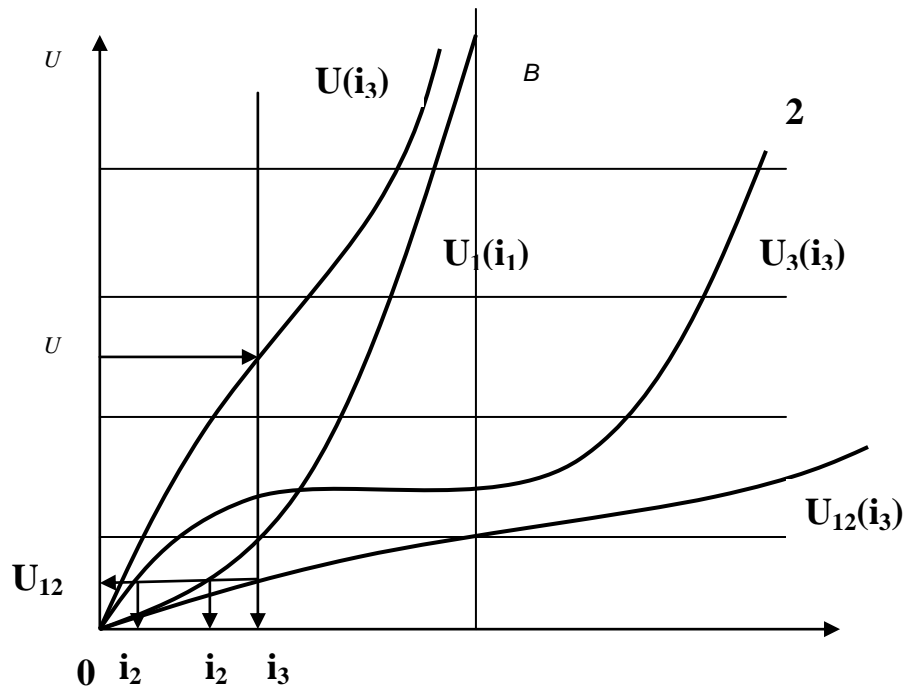
Для параллельной цепи напряжения одинаковы для всех ветвей, поэтому складываем по току $U_1(i_1) + U_2(i_2)$, т.е. по оси абсцисс, получаем $U(i)$ относящей ко всей цепи в целом. Например, $ab + ac = ad$. Зная напряжение во входной цепи $U_{вх} = U_1$, на входной характеристике $U(i)$ это соответствует точке K и ток i , по характеристике $U_2(i_2)$, этому напряжению соответствует ток i_2 , по $U_1(i_1)$ соответствует i_1

Последовательно – параллельное соединение нелинейных сопротивлений



Пусть задана схема последовательного соединения $НС_3$ и двух параллельно соединенных $НС_1$ $НС_2$. Требуется найти токи в ветвях схемы. Заданы в.а.х. нелинейных сопротивлений (кривые 1,2,3) и Э.Д.С. E.

Сначала строим в.а.х параллельного соединения, складывая 1 и 2 по току. После этого цепь сводится к последовательному соединению $НС_3$ и $НС_1$, имеющего в.а.х. 1+2. Складываем эти характеристики по напряжению (по оси ординат). Напряжению U соответствует ток i_3 и напряжение U_{12} , данному напряжению соответствует i_2 и i_1 .



Последовательное соединение участков электрической цепи, содержащей нелинейный элемент и источник Э.Д.С.

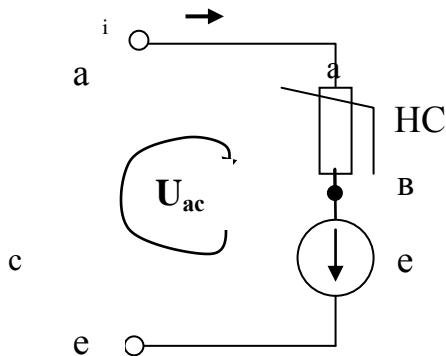
Пусть имеется ветвь с последовательно соединёнными нелинейными элементами и с источником Э.Д.С. Е. Напряжение на всей ветви между точками, а и с равно

$$U_{ac} = U_{ab} + U_{bc} = U_{ab} + E_{bc};$$

Это соотношение получается, если применить второй закон Кирхгофа к контуру

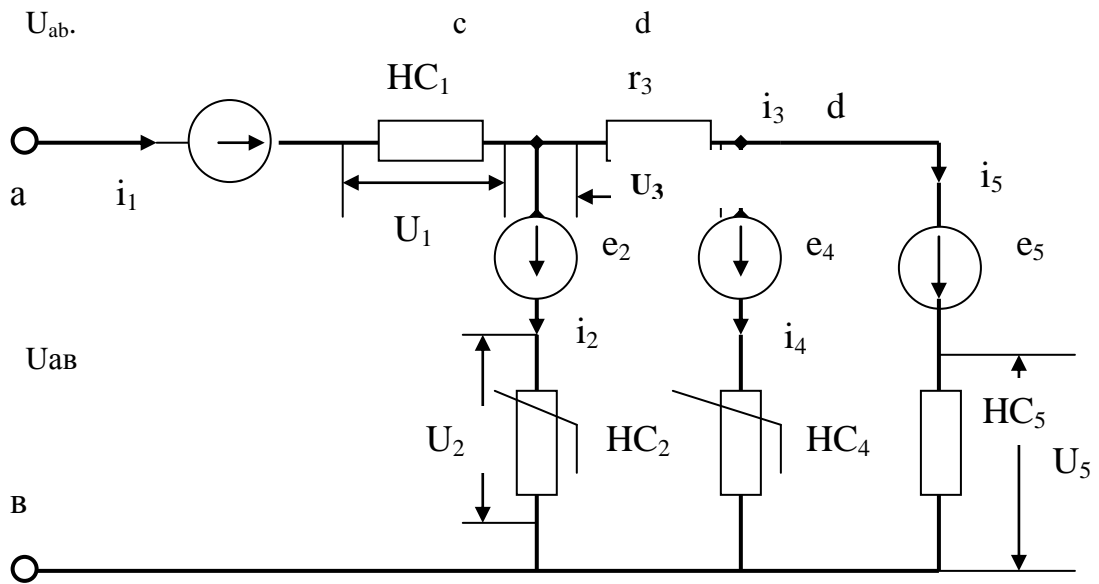
$$e_{bc} = U_{ca} + U_{ab} = -U_{ac} + U_{ab} \text{ или } U_{ac} = U_{ab} - e_{bc}.$$

Если Э.Д.С. Е действует в направлении выбранного положительного направления тока, т.е. $e_{bc} > 0$, то при положительном токе она способствует прохождению тока и при $e_{bc} < U_{ab}$ уменьшает величину U_{ac} .

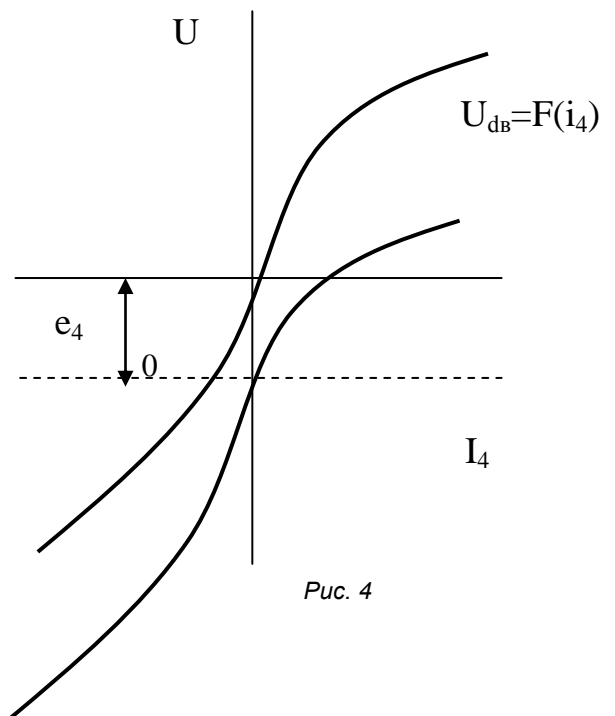
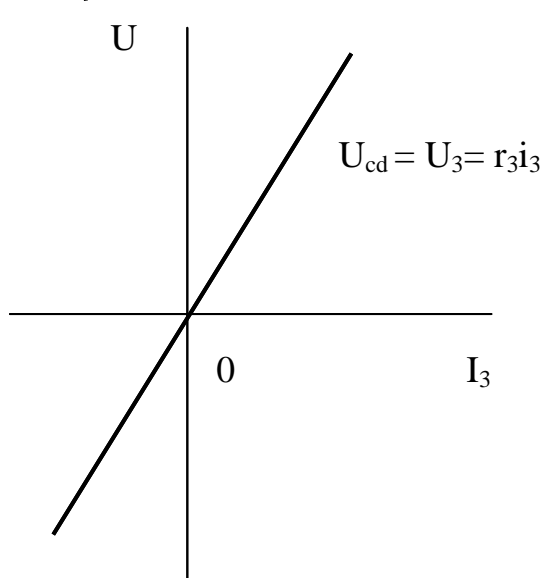
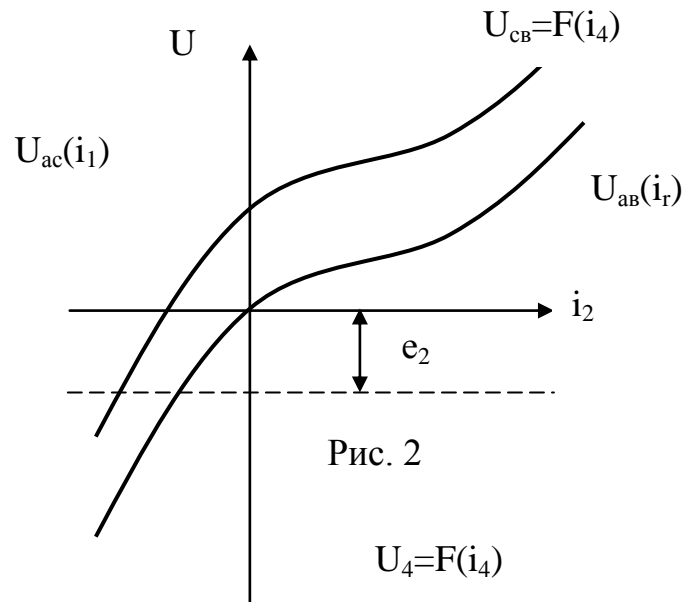
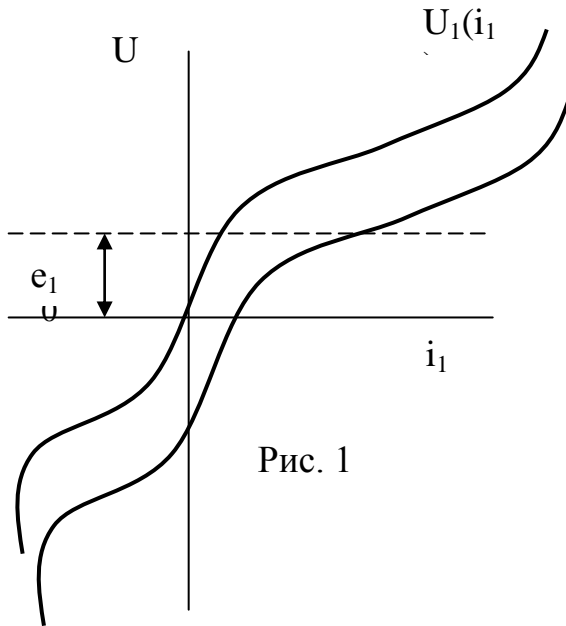


На рисунке а) изображена характеристика нелинейного элемента $U_{ab} = F(i)$ и отложена прямая, соответствующая $e_{bc} > 0$. Здесь же нанесена результирующая характеристика $U_{ac} = F(i)$ для всей ветви.

На рисунке б) произведено то же построение при $e_{bc} < 0$, т.е. когда Э.Д.С. источника в рассматриваемой ветви действует против принятого положительного направления тока. Предположим, что электрическая цепь между зажимами ав состоит из любого числа последовательно и параллельно соединённых участков, содержащих линейные Э.Д.С.. К зажимам, а и в приложено заданное напряжение



Задаёмся положительными направлениями токов во всех ветвях цепи. Направления и величины Э.Д.С. во всех ветвях заданы и заданы характеристики всех элементов ветвей. Строим результирующие характеристики всех ветвей. (рис. 1, 2, 3, 4, 5).



Для данной цепи складываем абсциссы кривых $U_{db}=F(i_4)$ и $U_{db}=F(i_5)$, изображающих характеристики ветвей $d-4-b$ и $d-5-b$, так как эти ветви соединены параллельно. Получаем характеристику $U_{db}=F(i_3)$ параллельно соединённых этих ветвей, изображённую на рис. 6

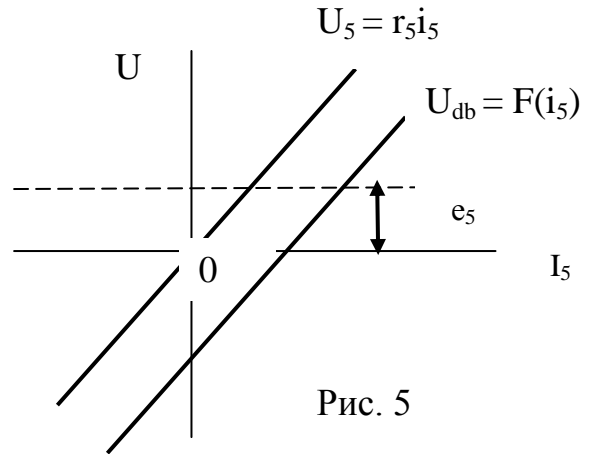


Рис. 5

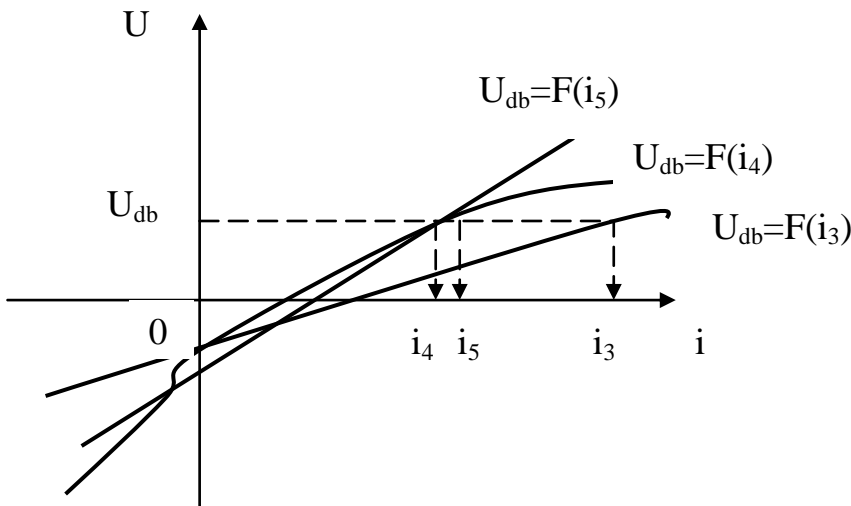


Рис. 6

Складываем затем координаты кривой $U_{db}=F(i_3)$ с ординатами кривой $U_3=r_3i_3$, так как третий участок соединен последовательно с параллельно соединёнными участками, получаем характеристику всех трёх участков

$$U_{cb}=F(i_3) \text{ (рис. 7)}$$

К абсциссам этой кривой прибавляем абсциссы кривой $U_{cb}=F(i_2)$, изображающей характеристику второй ветви. Получаем характеристику $U_{cb}=F(i_3)$ части всей цепи между зажимами с и в (рис. 8)

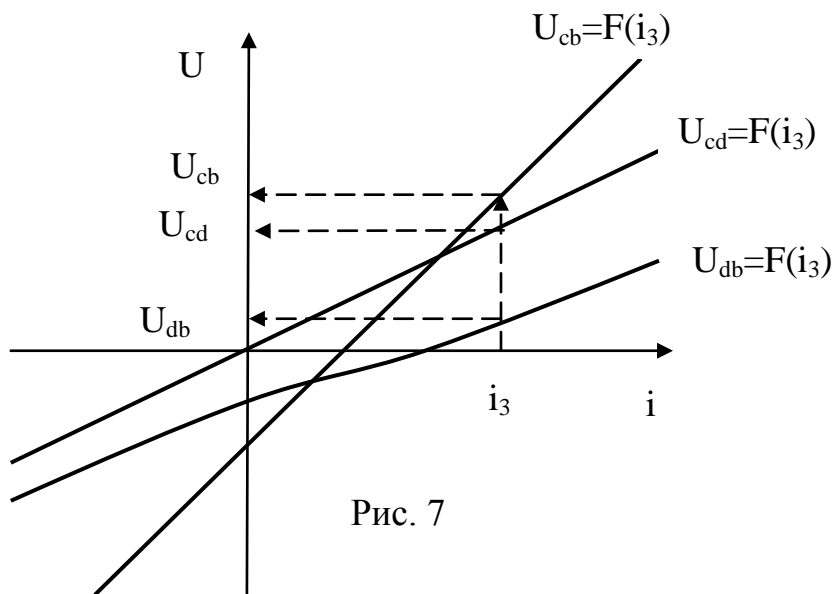


Рис. 7

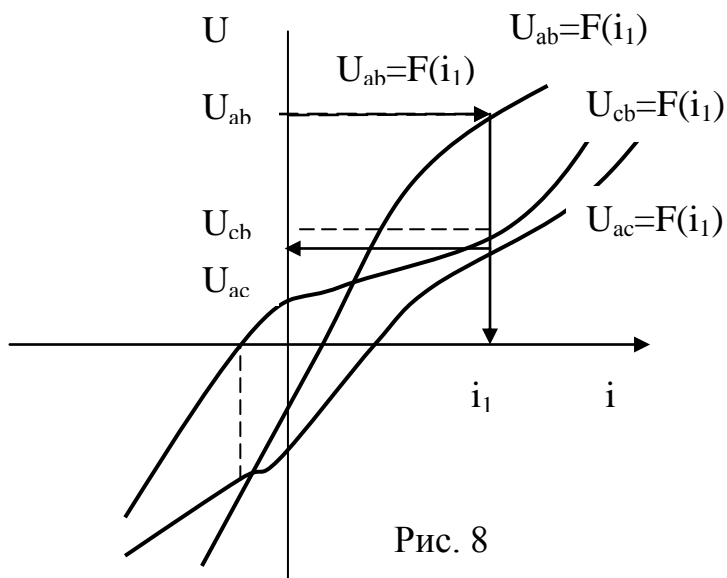


Рис. 8

Однородная среда – среда , данное физическое свойство которой не зависит от координат.

Наконец, складывая ординаты этой кривой с ординатами кривой $U_{ac}=F(i_1)$ находим характеристику всей цепи между зажимами а и в (рис. 9). Располагая построенными характеристиками, легко находим токи во всех ветвях и направления во всех ветвях , если задано приложенное ко всей цепи напряжение U_{ab} . Если задан один из токов или задано напряжение, на каком – либо участке ветви, то из этих характеристик определяются

Токи и напряжения во всех остальных ветвях и напряжение U_{ab} на зажимах всей цепи. Пунктирными линиями на рисунках 6, 7, 8, 9 показано решение для одного из таких частных режимов. Если зажимы а и в замкнуты накоротко, то токи в цепи возникают только под действием всех источников Э.Д.С. , содержащихся в самой цепи. При этом $U_{ab} = 0$ и, следовательно, решение определяется точкой пересечения характеристики $U_{ab}=F(i_1)$ на рисунке 9 с осью абсцисс.

Литература:

1.Л.Р.Нейман; К.С.Демирчян "Теоретические основы электротехники" т.2 "энергия" Москва 1971 г. стр. 52-79

2.Бессонов Л.А. "Теоретические основы электротехники". Высшая школа 1978 г. стр.44-58

Значачие слова:

1. Метод двух узлов – метод расчёта электрических цепей, в котором за искомое принимают напряжение между двумя узлами схемы.

2. Метод эквивалентного генератора (метод активного двухполюсника или метод холостого хода и короткого замыкания) – метод расчёта тока в выделенной ветви, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором.

3. Стабилизатор тока – устройство, которое способно поддерживать в нагрузке неизменный ток при изменении сопротивления нагрузки и при изменении напряжения на входе всей схемы.

4. Стабилизатор напряжения – устройство, напряжение на выходе, которого U_n поддерживается постоянным или почти постоянным при изменении сопротивления нагрузки, или величины напряжения на входе устройства.

5. Последовательное соединение нелинейных элементов – соединение, при котором через них проходит один и тоже ток.

6. Параллельное соединение нелинейных элементов – если две и более ветвей имеют одно и тоже напряжение, будучи подключёнными к одной паре узлов.

7. Смешанное соединение нелинейных элементов – цепь, содержащая последовательно и параллельно соединенные ветви, и группы ветвей с нелинейными элементами.

8. Сложно разветвлённые цепи – цепь с четырьмя более узлами, которая не может быть отображена схемой со смешанным соединением.

9. Электродвижущая сила – характеристика источников тока, определяемая отношением работы, совершаемой сторонними силами над зарядом при его движении по замкнутому контуру, к величине этого заряда.

10. Источник Э.Д.С. – идеализированный источник питания, напряжение на зажимах которого постоянно и равно Э.Д.С., а внутреннее сопротивление равно 0.

11. Активный нелинейный двухполюсник – двухполюсник, содержащий нелинейный элемент электрической цепи и источник Э.Д.С.

12. Теорема компенсации – теорема о замене нелинейного сопротивления ток зависимой Э.Д.С.

13. Графический метод расчёта нелинейных электрических цепей постоянного тока – используют нелинейные вольтамперные характеристики.

14. Итерационный метод расчёта нелинейных электрических цепей – основан на использовании заданных графически или аналитически характеристик нелинейных элементов этих цепей.

15. Нелинейный пассивный четырёхполюсник – четырёхполюсник, содержащий нелинейные элементы и не имеющий источников Э.Д.С. или тока.

16. Метод последовательных приближений – состоит в разумном выборе предположительного решения и последовательного исправления результата.

17. Метод итерации – численный метод расчёта, дающий возможность уточнить решение, если известно его первое приближение.

Контрольные вопросы?

1. Как рассчитать нелинейную электрическую цепь с последовательным соединением линейного и нелинейного сопротивлений?

2. Как применяется метод эквивалентного генератора к расчёту нелинейной цепи с последовательным соединением линейного и нелинейного сопротивления?

3. Как рассчитываются цепи с параллельным соединением нелинейных сопротивлений?

4. Определить токи и напряжения на нелинейных элементах при последовательно - параллельном соединении?

5. Как осуществляется расчёт цепей с последовательным соединением участков электрической цепи, содержащих нелинейный элемент и источник Э.Д.С.?

Тема-42 Нелинейные электрические цепи переменного тока. (активные, емкостные, индуктивные)

План:

1. Назначение и типы магнитных цепей.
2. Основные законы магнитной цепи.
3. Неразветвленная магнитная цепь.
4. Примеры расчета неразветвленной магнитной цепи.
5. Примеры расчета разветвленной магнитной цепи.
6. Формы кривых тока, магнитного потока и ЭДС в катушке с ферро магнитным сердечником. Потери в сердечниках из ферро магнитного материала.
7. Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокосцеплением и током.
8. Уравнение, векторная диаграмма и эквивалентная схема катушки с ферромагнитным сердечником.
9. Комплексное магнитное сопротивление.

Назначение и типы магнитных цепей.

Магнитной цепью называется совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела, служащие для сосредоточения магнитного потока в определённой части пространства.

Магнитные цепи включают в себя участки из ферромагнитных материалов с высокой магнитной проницаемостью μ . В силу непостоянства μ , магнитные цепи нелинейные.

Различают цепи с постоянными магнитами и цепи, в которых магнитный поток создаётся током в обмотке, насаженной на ферромагнитный сердечник.

Если вся магнитная цепь выполнена из какого-либо одного ферромагнитного материала, её называют однородной. При включении в магнитную цепь материалов с различными магнитными свойствами её называют неоднородной.

Магнитная цепь, во всех сечениях которой магнитный поток одинаков, называется неразветвленной. В разветвленной магнитной цепи потоки на различных участках неодинаковы. Для магнитных цепей характерна соизмеримость продольных и поперечных размеров. Поэтому при расчёте магнитных цепей приходится в большей мере привлекать понятия теории поля, учитывая измерения магнитных величин в пространстве от точки к точке.

Также, как и электрические цепи, магнитные цепи в частных случаях могут приниматься за линейные; при этом расчёты носят приближённый характер и справедливы лишь для определённых режимов работы.

Основные законы магнитной цепи

Одним из основных законов, используемых при расчёте магнитной цепи, является закон полного тока:

$$\oint \bar{H} d\bar{L} = \sum I$$

Циркуляция вектора напряжённости магнитного поля \bar{H} по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов $\sum I$, охватываемых этим контуром; знак тока определяется по правилу буравчика.

l - длина контура [м]

I - ток [А]

H - напряжённость магнитного поля [А/М].

В случае, когда контур интегрирования охватывает витки катушки, через которую проходит ток I , закон полного тока принимает вид:

$$\oint \vec{H} d\vec{L} = I\omega = F$$

F- намагничивающая сила (МДС) [А]. С вектором напряжённости магнитного поля H связан вектор магнитной индукции B, модуль которого измеряется [Тл]=[Вб/м²];

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} = \mu_0\vec{H}$$

μ - относительная магнитная проницаемость.

μ_0 - магнитная постоянная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

μ_a - абсолютная магнитная проницаемость [Гн/м].

Векторы B и H необязательно совпадают друг с другом по направлению. В цепях с постоянными магнитами направления B и H взаимно противоположны.

Контур интегрирования обычно выбирают таким образом, чтобы он совпадал с линией вектора напряжённости H, что позволяет заменить подынтегральное выражение произведением HdL.

Для практических расчётов интеграл заменяют суммой произведений $H_k l_k$ где k указывает участок, вдоль которого H и μ принимаются неизменными.

Формула закона полного тока запишется в виде закона магнитной цепи.

$$\sum_{K=1}^n H_k L_k = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{\mu_{ak}} L_k = F \quad \text{II Закон Кирхгофа для магнитной цепи}$$

где n - число участков.

Произведение $H_k l_k$ при отсутствии обмотки с током на k-ом участке носит название разности скалярных магнитных потенциалов и обозначается U_{mn} , где m и n - начало и конец участка.

Разность скалярных магнитных потенциалов двух точек - скалярная величина, равная линейной напряжённости магнитного поля вдоль выбранного участка цепи между двумя точками, при условии, что путь интегрирования расположен в области, где плотность электрического тока равна нулю.

В системе СИ магнитное напряжение U_{hm} измеряется в [А].

Для воздушных зазоров магнитная проницаемость может быть принята равной магнитной постоянной μ_0 и связь B и H имеет вид:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 0,8 \cdot 10^6 B$$

Т.к. линии магнитной индукции замкнуты, то поток вектора магнитной индукции сквозь замкнутый контур равен нулю. Из этого уравнения вытекает важное положение.

$$\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

В неразветвленной магнитной цепи поток на всех её участках одинаков, а в разветвленной цепи поток на участке, подходящем к месту разветвления, равен сумме магнитных потоков на участках, отходящих от места разветвления.

$$\sum \Phi_k = \hat{\quad} \quad (\text{I закон Кирхгофа для магнитной цепи})$$

Если принять, что \vec{B} одинаков во всех точках поперечного сечения S, то

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} \text{ можно записать } \Phi = B_k S_k, \text{ откуда}$$

$$B_k = \frac{F}{\sum_{k=1}^n l_k} \text{ или } \Phi = \frac{F}{\sum_{k=1}^n \frac{l_k}{\mu_{ak}}} = \frac{F}{r_m} \quad \text{Закон Ома для магнитной цепи}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{l_k}{\mu_{ak}} \quad k=1$$

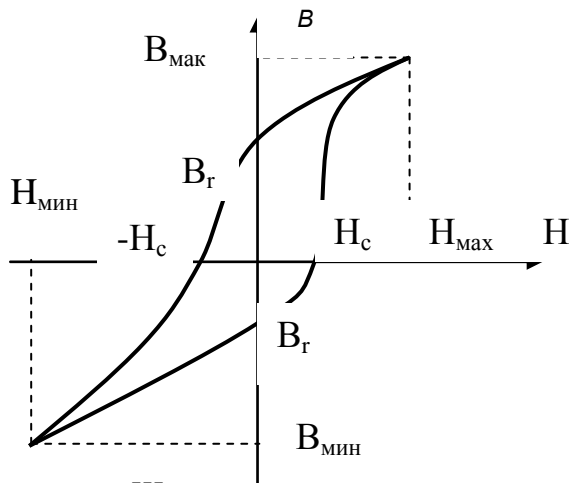
Где r_m магнитное сопротивление [1/Гн]

$$r_m = \frac{l_{cp}}{\mu_0 \mu_r S} \quad l_{cp} - \text{длина средней линии}$$

Закон Ома для магнитной индукции
расчёта, вследствие того что

е может быть применён для

Примерная зависимость $B = f(H)$ показана на рисунке, такая двузначная зависимость называется петлёй гистерезиса.



При возрастании H индукция изменяется (возрастает) по нижней петле гистерезиса, а при убывании H индукция уменьшается по верхней петле гистерезиса. При $B_{макс} = -B_{мин}$ получается симметричная петля гистерезиса. Индукция B_r при $H=0$ называется остаточной.

Ширина петли в основном зависит от свойств материала, от максимальной H и от скорости dh/dt снимают статическую петлю гистерезиса при достаточно медленном перемагничивании образца.

Основная кривая намагничивания – кривая, представляющая собой геометрическое место вершин симметричных петель гистерезиса, получающихся при различных максимальных значениях напряжённости магнитного поля.

Неразветвленная магнитная цепь

Простейшей неразветвленной магнитной цепью является замкнутый магнитный провод с одинаковым поперечным сечением и одинаковой магнитной проницаемостью по всей длине. Магнитная индукция B_0 во всех точках такой цепи одинакова, H тоже одинакова и для такой цепи справедливо:

$$H l_{cp} = F$$

Часто в состав неразветвленной магнитной цепи входят участки из различных материалов с неодинаковыми поперечными сечениями.

Пусть задана конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания и магнитный поток или индукция в каком-либо сечении. Требуется найти МДС, ток или число витков намагничивающей обмотки. Расчёт проводим в следующей последовательности.

1. Разбиваем магнитную цепь на участки постоянного сечения и определяем длины l_k (в м) и площади поперечного сечения S_k (в m^2) участков. Длины участков берём по средней силовой линии.

2. Исходя из постоянства потока вдоль всей цепи, по заданному потоку и сечениям S_k находим магнитные индукции на каждом участке $B_k = \frac{\Phi}{S_k}$.

3. По кривой намагничивания определяем напряжённости поля H_k для ферро магнитных участков магнитной цепи. Напряжённость поля в воздушном зазоре $H_{a/m} = 0,8 \cdot 10^5$ В/л.

4. Подсчитываем сумму падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k$ и на основании закона полного тока

$$\sum H_k L_k = I \omega$$

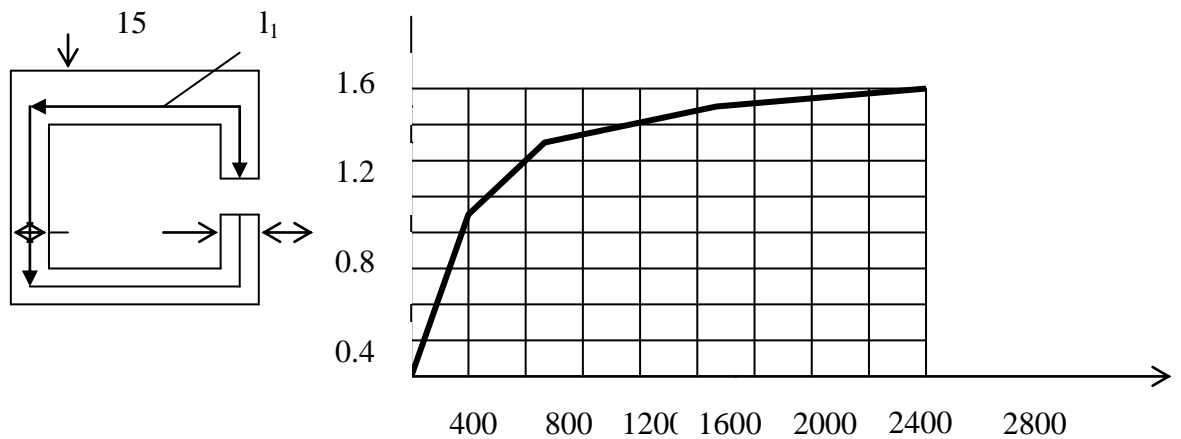
Основным допущением при расчете является то, что магнитный поток вдоль всей магнитной цепи полагаем неизменным. В действительности небольшая часть потока всегда замыкается, минуя основной путь.

Поток, который замыкается, минуя основной путь, называют потоком рассеяния. При малом воздушном зазоре поток рассеяния относительно мал; с увеличением воздушного зазора поток рассеяния может стать соизмеримым с основным потоком.

Примеры расчета неразветвленных магнитных цепей.

а) прямая задача.

Пусть задана магнитная цепь и кривая намагничивания



Найти, какой ток должен протекать по обмотке с числом витков $w = 500$, чтобы индукция в воздушном зазоре $B_6 = 1$ тл.

Магнитную цепь разбиваем на три участка:

$$e_1 = e_1' + e_1'' = 30 \text{ см} \quad s_1 = 4,5 \text{ см}^2 \quad l_2 = 13,5 \text{ см} \quad s_2 = 6 \text{ см}^2$$

Воздушный зазор $b = 0,01 \text{ см}$, $s_6 = 4,5 \text{ см}^2$ индукция $B_1 = B_6 = 1$ тл индукцию на участке 1 найдем, разделив поток $\Phi = B\delta S\delta$ на сечение S_2 второго участка:

$$B = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{B\delta S\delta}{S_2} = \frac{1 \cdot 4,5}{6} = 0,75 \text{ тл}$$

Напряженности поля на участках l_1 и l_2 определяем согласно кривой намагничивания по $B_1 = 1$ тл $H_1 = 300$ А/м по $B_2 = 0,75$ тл $H_2 = 115$ А/м

$$\text{Напряженность поля в воздушном зазоре } H\delta = 0,8 \cdot 10^6 \text{ В}\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 8 \cdot 10^5 \text{ А/м}$$

Подсчитываем падение магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи:

$$\sum H_k L_k = H_1 L_1 + H_2 L_2 + H\delta b = 300 \times 0,3 + 115 \times 0,135 + 8 \times 10^5 \times 10^{-2} = 185,6 \text{ А}$$

$$\text{Ток в обмотке } I = \frac{\sum H_k L_k}{W} = \frac{185,6}{500} = 0,37 \text{ А}$$

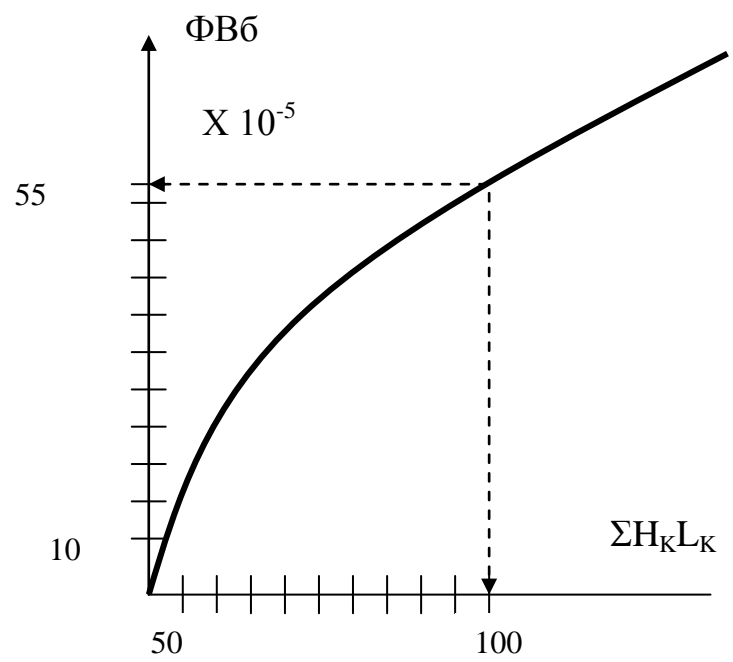
б) Обратная задача

Найти магнитную индукцию в воздушном зазоре магнитной цепи примера а, если $I = 350$ А.

Задаемся значениями $B\delta = 0,5; 1,1; 1,2; \text{ и } 1,3$ тл и для каждого из них подсчитываем сумму $\sum H_k L_k$. Подсчеты сводим в таблицу.

$B\delta$ тл	0,5	1,1	1,2	1,3
B тл	0,5	1,1	1,2	1,3

B2Тл	0,375	0,825	0,9	0,975
H1A/M	50	460	700	1020
H2A/M	25	150	200	300
HбA/M	4×10^5	$8,8 \times 10^5$	$9,6 \times 10^5$	$10,4 \times 10^5$
HкLкA	58,3	246,3	333	4595
ФBб	$22,5 \times 10^{-5}$	$49,5 \times 10^{-5}$	54×10^{-5}	$58,5 \times 10^{-5}$



По данным таблицы строим зависимость $\Phi = (\sum H_k L_k)$ и по ней находим, что при $I_w = 350A$ $\Phi = 55 \times 10^{-5}$ следовательно $B_b = \Phi / S_b = \frac{5,5 \cdot 10^{-5}}{4,5 \cdot 10^{-4}} = 1,21$ Тл.

Пример расчета разветвленной магнитной цепи методом двух узлов

В разветвленной магнитной цепи действует первый и второй Закон Кирхгофа.

Первый Закон Кирхгофа:

алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю:

$$\sum \Phi_k = 0$$

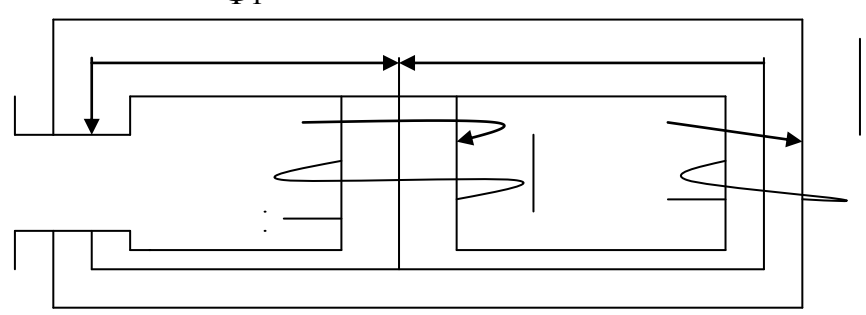
Второй Закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма намагничивающих сил в любом контуре равна алгебраической сумме произведений потоков на соответствующие магнитные сопротивления данного контура:

$$\sum H_k L_k = I_k W_k$$

Пусть задана разветвленная магнитная цепь.

- Данные: Φ_1
- L1 = 20 см
 - F3 Lб = 0,1 см
 - L1 S1 = 8 см
 - L3 L2 = 7 см
 - S2 = 2 см

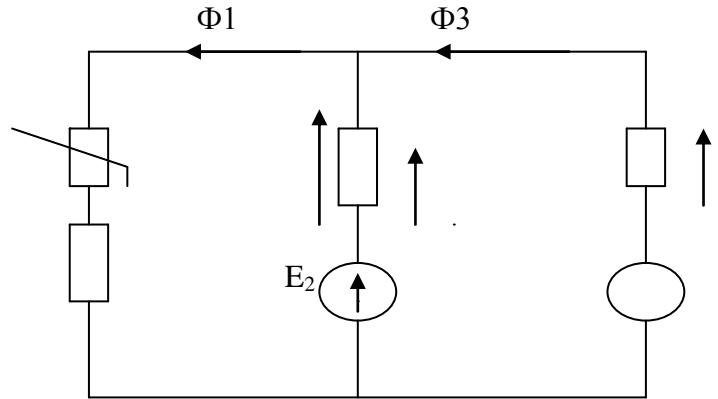


$L6W2= 500$
 $I2=0,2A$
 $L3=20 \text{ см}$
 $S3=1,78 \text{ см}$
 $W3=500$

Кривая намагничивания задана $I3= 0,3A$ в виде таблицы. Требуется определить $\Phi1$, $\Phi2$, $\Phi3$.

Представим магнитную цепь в виде электрической схемы, направления МДС определяются по правилу буравчика. Направления магнитных потоков заданы:

$F2=I2W2=100A$
 $F3=I3W3=150A$
 $H6L6=80 \times 10 = 80 \times 10 \text{ В/л6}$
 $H1L1 \quad \Phi2 \quad H2LH3L3$



Составим для данной схемы уравнения по первому и второму Законам Кирхгофа:

$$\Phi1 = \Phi2 + \Phi3$$

$$H2L2 + H1L1 + H6L6 = F2$$

$$H2L2 + H3L3 = F2 - F3$$

По методу двух узлов выразим зависимости $H1L1 + H6L6$; $H2L2$; $H3L3$ от одной величины магнитного напряжения $U_{мав}$ между узлами а и в по второму Закону Кирхгофа:

$$U_{мав(1)} = H1L1 + H6L6$$

$$U_{мав(2)} = -H2L2 + F2$$

$$U_{мав(3)} = F3 - H3L3$$

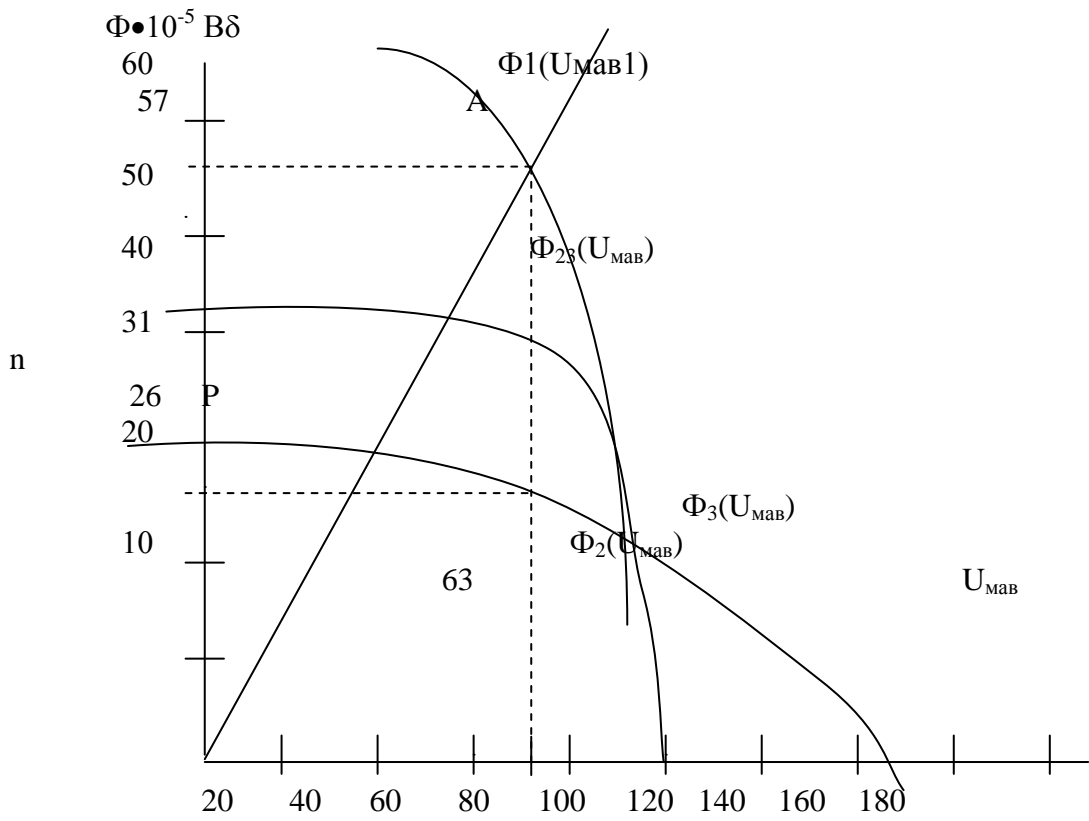
$$\Phi1 = B1S1 = 8 \times 10^{-4} B1$$

$$\Phi2 = B2S2 = 2 \times 10^{-4} B2$$

$$\Phi3 = B3S3 = 1,78 \times 10^{-4} B3$$

Результаты расчета введем в таблицу

Н А/М	0	20	40	60	80	120	200	400	600	800	1200
В Тл	2	0,22	0,75	0,93	1,02	1,14	1,28	1,47	1,53	1,57	1,6
$U_{мав1} = 0.2H1 + 80B1$	0	21,6	68	86,4	97,6	115,2	142,4	197,6	242,4	285,6	368
$\Phi1 = 8 \times 10^{-4} B1$	0	17,6	60	74,4	81,6	91,2	102,4	117,6	122,4	125,6	128
$U_{мав2} = 100 - 0,07H2$	100	98,6	97,2	95,8	94,4	91,6	86	72	58	44	16
$\Phi2 = 2 \times 10^{-4} B2$	0	4,4	15	18,6	20,4	22,8	25,6	29,4	30,6	31,4	32
$U_{мав3} = 150 - 0,2H3$	150	146	142	138	134	126	110	70	30	-10	-90
$\Phi3 = 1,78 \times 10^{-4} B3$	0	3,916	13,35	16,55	18,16	20,29	22,78	26,17	27,23	27,95	28,48



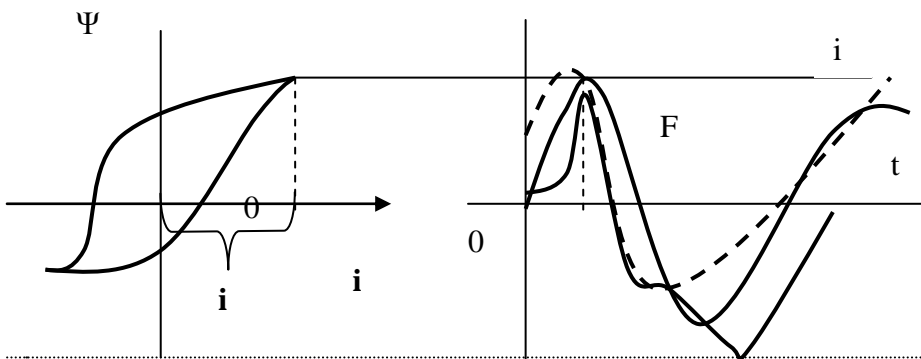
Характеристику $\Phi_{23}(U_{мав})$ строим сложение ординат характеристик $\Phi_2(U_{мав2})$ и $\Phi_3(U_{мав3})$. Например, ордината "mq". Характеристики $\Phi_{23}(U_{мав})$ равна сумме ординат mp и mn характеристик $\Phi_2(U_{мав2})$ и $\Phi_3(U_{мав3})$ ($mq = mp + mn$). На пересечении вспомогательной характеристики $\Phi_{23}(U_{мав})$ и характеристики $\Phi_1(U_{мав1})$ находится рабочая точка А. По графику следует, что

$$U_{мав} = 63 \text{ А} \\ \Phi_1 = 57 \times 10^{-5} \text{ Вδ} \quad \Phi_2 = 31 \times 10^{-5} \text{ Вδ} \quad \Phi_3 = 26 \times 10^{-5} \text{ Вδ}$$

Формы кривых тока, магнитного потока и ЭДС в катушке с ферромагнитным сердечником

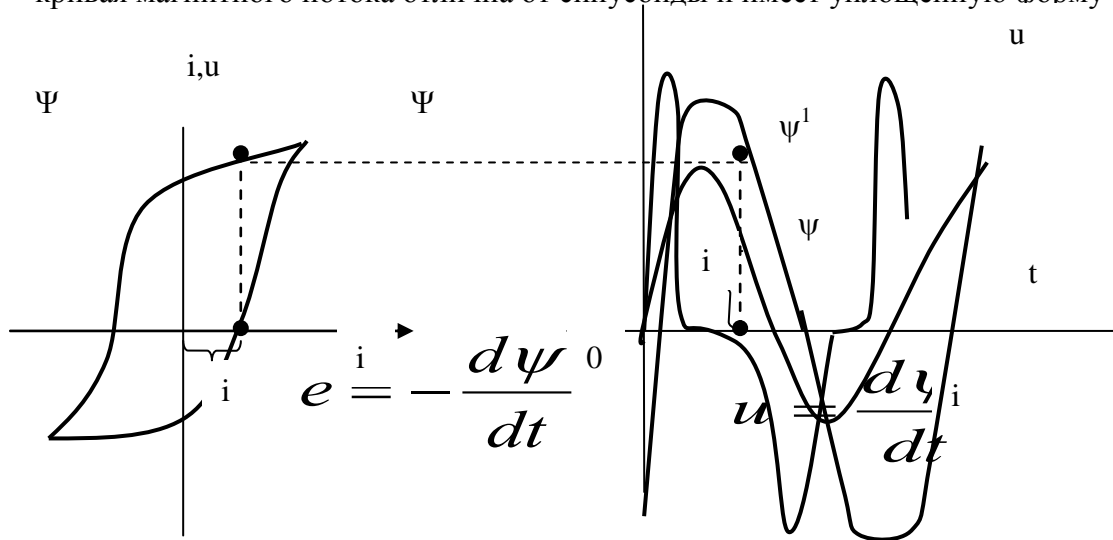
Так как катушки с ферромагнитным сердечником находят широкое применение в цепях переменного тока, рассмотрим вопрос о влиянии нелинейной зависимости магнитного тока в таких катушках от тока в них на форму кривых тока, потока и ЭДС. Связь $\Psi = f(i)$ определяется петлей гистерезиса. Пусть поток Ψ , а, следовательно, и ЭДС в обмотке катушки а также напряжением уравновешивающее, изменяются по синусоидальному закону

$$e = - \frac{d\psi}{dt} \quad u = \frac{d\psi}{dt}$$



В таком случае кривая тока в обмотке катушки содержит высшие гармоники, преимущественную третью, пятую и седьмую. Максимумы тока и потока совпадают, но через нуль кривая тока происходит раньше кривой магнитного потока. Кривая тока имеет заостренную форму.

В другом предельном случае, когда ток изменяется по синусоидальному закону, кривая магнитного потока отлична от синусоиды и имеет уплощенную форму



Кривые же Э.Д.С e , равной:

При этом имеют весьма заостренную форму. Построение потока по заданной кривой тока и петле гистерезиса нетрудно осуществить по точкам графически. Кривую же напряжения получаем дифференцированием кривой потока.

В общем случае кривая тока, напряжения могут оказаться несинусоидальными. Кривые тока, потока, напряжения симметричны относительно оси абсцисс, и, следовательно, не содержат четных гармоник.

Потери в сердечниках из ферромагнитного материала

Для правильного выбора эквивалентных синусоид, заменяющих действительные несинусоидальные кривые тока и напряжения в катушках с ферромагнитными сердечниками, необходимо рассмотреть потери энергии в сердечниках при периодическом изменении магнитного потока. Эти потери складываются из потерь на вихревые токи и на гистерезис. Сердечники по большей части набирают из тонких листов из ферромагнитного материала, изолированных друг от друга тонким слоем изоляции с целью уменьшить потери на вихревые токи.

Вихревые токи, согласно правилу Ленца, направлены таким образом, что созданное ими магнитное поле ослабляет результирующее поле. Это ослабление наиболее резко выражено в середине листа. Поэтому результирующее магнитное поле распределяется неравномерно по сечению листа. Толщину листа для уменьшения потерь выбирают

$$dg_x = \gamma \frac{ldx}{2h}$$

малой; при этом можно пренебречь неравномерностью поля внутри листа, т.е. пренебречь размагничивающим действием вихревых потоков. На рисунке показана трубка вихревого тока, имеющая сечение ldx и длину приблизительно равную $2h$. Активная проводимость вдоль этой трубки обратно ее активному сопротивлению

Действующее значение ЭДС индуцируемой вдоль трубки, равно:

Где K_Φ - коэффициент формы кривой Э.Д.С., следовательно, потери внутри трубки тока равны

Интегрируя от 0 до $d/2$ получаем потери на вихревые токи во всем листе

Где $V=hld$ - объем листа. Потери на вихревые потоки пропорциональны

квадрату частоты, квадрату амплитуды индукции, квадрату толщины листа и первой

$$E_x = 4K_\Phi f \Phi_{mx} = 4K_\Phi f 2xhB_m$$

степени удельной проводимости.

$$dP_e = E_x^2 dg_x = 32hl\gamma K_\Phi^2 f^2 B_m^2 x^2 dx$$

$$P_e = \frac{1}{2} \gamma K_\Phi^2 d^2 f^2 B_m^2 V$$

$$P_e = \frac{4}{3} \gamma K_\Phi^2 d^2 f^2 B_m^2 V$$

Для сердечника из проволок кругового сечения с диаметром d , оси которых направлены вдоль линии магнитной индукции, обобщая полученный результат:

$P_e = \xi f^2 B_m^2 V$, где ξ - коэффициент зависящий от формы сечения элементов, на которые разделен сердечник, геометрических размеров этого сечения, удельной проводимости материала и коэффициента формы K_{op} .

Потери на гистерезис в единице объема вещества за один цикл перемагничивания может быть выражена в виде

$$W_\Gamma^I = \eta B_m^n$$

где η - коэффициент, зависящий от свойств ферромагнитного вещества. Следовательно, мощность потерь на гистерезис в объеме V , равная потерям энергии в единицу времени, т.е. за f циклов может быть выражена в виде

В электротехнических устройствах $n=2$. Суммарная мощность потерь в сердечнике может быть представлена

$$P_{\Phi EP} = P_r + P_B = \eta f B_m^2 V + \xi f^2 B_m^2 V$$

Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокосцеплением и током

Заменим несинусоидальный ток в катушке с ферро магнитным сердечником и напряжение на ее зажимах эквивалентными синусоидами. Надлежит выбрать амплитуды U_m ; I_m эквивалентных синусоид и угол сдвига фаз ϕ между ними. Мы рассматриваем напряжение, уравновешивающее ЭДС, индуцируемую в обмотке катушки переменным магнитным потоком в сердечнике, не учитывая падения напряжения в активном

сопротивлении обмотки, и индуктивного попадания напряжения, определяемого потоками рассеяния.

Связь между φ

$$U_m = \sqrt{2}U \quad I_m = \sqrt{2}I$$

для эквивалентных синусоид определяется из условия сохранения потерь в сердечнике:

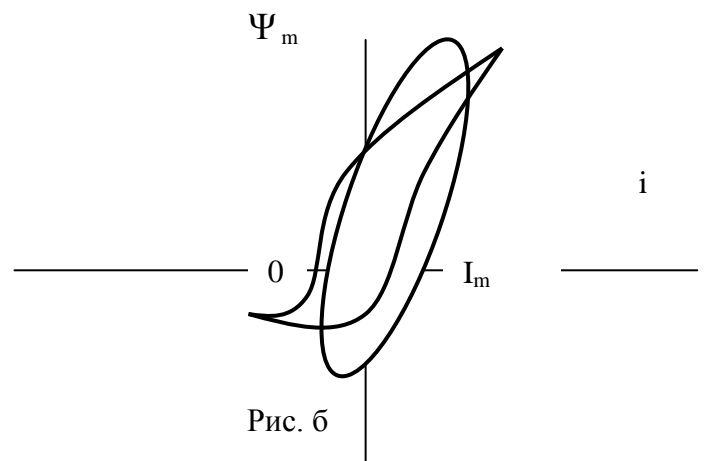
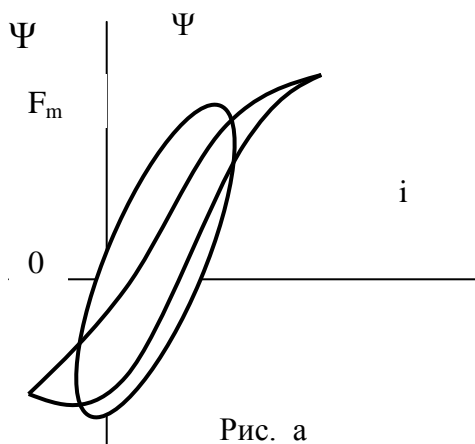
$$UI \cos \varphi = P_{\Phi EP} = P_r + P_B$$

Необходимы еще два условия: это выбор U_m и I_m равными амплитудами первых гармоник напряжения и тока, или выбор величин I и U равными действующим значениям несинусоидальных напряжений и тока.

Замена действительных кривых тока эквивалентными синусоидами приводит к тому, что связь Ψ и i выражается уравнением эллипса, площадь которого в соответствующих масштабах равна потерям в сердечнике за один период. В зависимости от выбора амплитуд U_m и I_m эквивалентных синусоид мы получим тот или иной эллипс, но все эти эллипсы должны иметь одну и ту же площадь. При синусоидальном напряжении, соответственно, при синусоидальном потоке, в качестве амплитуд U_m и Ψ_m естественно взять действительные амплитуды этих величин. Амплитуду же I_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармонике тока i , либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Соответственно тому или другому выбору амплитуды эквивалентной синусоиды тока. Получим то или иное значение φ или тот или иной вид эллипса.

При синусоидальном токе величину I_m выбрать равной действительной амплитуде тока i . Амплитуду же U_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармонике напряжения U , либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Амплитуда Ψ_m определится из равенства $U_m = \omega \Psi_m$. Соответственно получим то или иное значение φ и тот или иной вид эллипса. Все сказанное иллюстрируется на рисунках, в предположении, что учитываются только потери на гистерезис.

Рис. "а" относится к случаю синусоидальных U и Ψ , а рис. "б" к случаю синусоидального тока i .



В этих случаях площадь эллипса равна площади петли гистерезиса. Наличие вихревых токов несколько приближает к эллипсу действительную кривую Ψ от i .

Площадь эквивалентного эллипса при этом должна быть взята равной площади этой действительной кривой, равной суммарным потерям в сердечнике.

Уравнение, векторная диаграмма и эквивалентная схема катушки и ферро магнитным сердечником.

Рассмотрим процессы в катушке с замкнутым ферро магнитным сердечником, обмотка которой имеет ω витков.

Уравнение, описывающее процесс в катушке, имеет вид

$$U = ri + \frac{d\psi}{dt}$$

где r - сопротивление обмотки. Полное потокосцепление представим в виде суммы $\Psi = \Psi_{\sigma} + \Psi_0$. Величина Ψ_0 есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися целиком вдоль сердечника. Следовательно, $\Psi_0 = \omega \Phi_0$ где Φ_0 - поток сквозь сечение сердечника, определяемый этими линиями.

Ψ_{σ} - есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися частично или полностью в воздухе.

$\Psi_{\sigma} = L_{\sigma} i$, т.к. магнитное сопротивление пути, по которому замыкаются линии этого потока, практически не зависит от тока и, следовательно, индуктивность L_{σ} постоянна.

Потокосцепление Ψ_0 нелинейно связано с i , так как магнитная проницаемость U , следовательно, магнитное сопротивление сердечника зависят от напряженности магнитного поля. Уравнение катушки можно записать:

Заменяя несинусоидальные кривые тока и потока эквивалентными

$$U = ri + L_{\sigma} \frac{di}{dt} + \omega \frac{d\Phi_0}{dt} = ri + L_{\sigma} \frac{di}{dt} + U_0$$

синусоидами, можем записать это уравнение в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = r\dot{I}_m + j\omega L_{\sigma} \dot{I}_m + j\omega \Phi_{0m} = r\dot{I}_m + j\omega L_{\sigma} \dot{I}_m + \dot{U}_{0m}$$

Эквивалентная синусоида тока i отстает от эквивалентной синусоиды напряжения на угол

$$U_0 = \frac{d\psi_0}{dt} \quad \varphi < \frac{\pi}{2}$$

вследствие наличия потерь в сердечнике $P_{\text{ФЕР}} = P_r + P_b = I_{U0} \cos \varphi_0 > 0$. Эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды тока i на угол

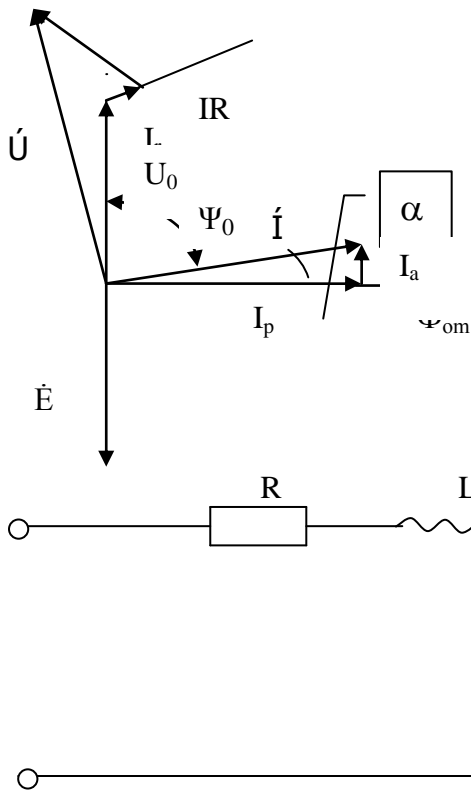
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$$

т.к. эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды напряжения U_0 на угол $\pi/2$. Векторная диаграмма катушки показана на рис. На

$$j\omega L_{\sigma} \dot{I} = U_L \quad e_0 = -w \frac{d\Phi_0}{dt}$$

диаграмме отключен вектор Э.Д.С. индуцируемый в обмотке потоком Φ_0 равной

Ток I можно разложить на две составляющие: I_r , находящуюся в фазе с потоком, и I_a , находящуюся в квадратуре с потоком. Величина I_r представляет собой реактивную составляющую тока, а величина I_a -



активную составляющую. Соответственно можно изобразить катушку с помощью эквивалентной схемы приведённой на рисунке; причём

$$b_0 = \frac{I_p}{U_0}$$

$$g_0 = \frac{I_a}{U_0} = \frac{I_a U_0}{U_0^2} = \frac{P_{\Phi EP}}{U_0^2}$$

Комплексное магнитное сопротивление магнитной цепи

Т.к. поток Φ_0 в ферромагнитном сердечнике отстает по фазе на угол \mathcal{L} от намагничивающего тока i в обмотке катушки и, следовательно, от МДС $i\omega$, можно записать, что

Комплексное магнитное сопротивление

$$\dot{\Phi}_{om} = \frac{\dot{I}_m w}{\underline{Z}_M}$$

$$Z_M = Z_M e^{j\alpha} = R_M + jX_M$$

Выразим комплексное магнитное сопротивление через длину l сердечника, сечение S сердечника и магнитную проницаемость вещества сердечника. Сечение S будем считать

$$\underline{Z}_M = \frac{I_m w}{\dot{\Phi}_{om}} = \frac{\dot{H}_m l}{\dot{B}_m S} = \frac{l}{\dot{\mu} S}$$

одинаковым по всей длине сердечника. Получаем:

где

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{H}_m l}{\dot{B}_m S}$$

комплексная магнитная проницаемость, учитывающая и потери в веществе сердечника. Существует связь между комплексным магнитным сопротивлением Z_M сердечника и комплексным электрическим сопротивлением обмотки, определяемыми

$$\underline{Z}_{OЭ} = \frac{1}{g_0 - jb_0}$$

напряжением $\dot{U}_{om} = j\omega \dot{\Phi}_{om} w$

Появление мнимой составляющей jx_m в комплексном магнитном сопротивлении

$$\underline{Z}_{o\varepsilon} = \frac{\dot{U}_{om}}{\dot{I}_m} = \frac{j\omega w^2 \dot{\Phi}_{om}}{\dot{I}_m w} = \frac{j\omega w^2}{\underline{Z}_M}$$

является результатом наличия потерь в сердечнике. Используя эквивалентную схему катушки и выражение для ее параметров

Получаем

Откуда

Используя понятие о комплексном магнитном сопротивлении и комплексной магнитной проницаемости, мы получаем возможность описывать периодические процессы также и в магнитных цепях с помощью комплексного метода. R_M и X_M

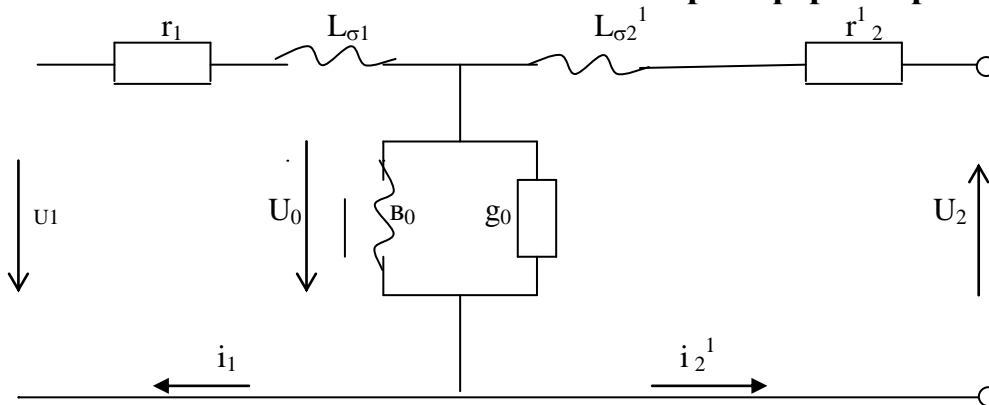
$$g_0 = \frac{P_{фер}}{U_{om}^2} = \frac{2P_{фер}}{U_{om}^2} \frac{2P_{фер}}{\omega^2 w^2 \Phi_{om}^2}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{o\varepsilon}} = \underline{y}_{o\varepsilon} = g_0 - jb_0 = \frac{Z_M}{j\omega w^2} = \frac{R_M + jx_M}{j\omega w^2} = \frac{x_M}{\omega w^2} - j \frac{R_M}{\omega w^2}$$

$$x_M = \omega w^2 g_0 = \frac{2P_{ФЕР}}{\omega \Phi_{om}^2}$$

являются нелинейными функциями от амплитуды М.ДС $I_m w$ или от амплитуды потока Φ_{om} .

Эквивалентная схема трансформатора



Трансформатор с ферромагнитным сердечником представляет собой нелинейный четырехполюсник. Поэтому, определяя его параметры из опытов ХХ и КЗ необходимо в опыте ХХ вследствие зависимости ν_0 от U_0 брать напряжение U_1 равным напряжению U_0 при нормальной нагрузке. Падение напряжения на участке $r_1 L_{\sigma 1}$ при токе ХХ весьма мало. Из опыта ХХ определяют ν_0 и g_0 . Опыт КЗ проводят при номинальном токе. Из опыта КЗ определяют $r_1 + r_2 L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2}$. Величины r_1 и r_2 , также как и величины $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}$ одного порядка. Поэтому можно полагать, что $L_{\sigma 1} = L_{\sigma 2}$ и $r_2 = r_1$.

Контрольные вопросы?

- 1.** Как изменяется кривая тока, если поток и Э.Д.С., а также напряжение на катушке индуктивности из ферро магнитного материала изменяется по синусоидальному закону?
- 2.** Как изменяется магнитный поток, в катушке индуктивности с ферро магнитным сердечником, если ток изменяется по синусоидальному закону?
- 3.** Что из себя представляют потери на вихревые токи в катушке из ферромагнитного сердечника?
- 4.** От чего зависят потери на гистерезис?
- 5.** Какова суммарная мощность потерь в сердечнике?
- 6.** Как осуществляется замена несинусоидального тока в катушке с ферро магнитным сердечником и напряжение на её зажимах эквивалентными синусоидами?
- 7.** Написать уравнение для мгновенных и комплексных значений, описывающие процессы в катушке с замкнутым ферро магнитным сердечником.
- 8.** Нарисовать векторную диаграмму катушки с ферро магнитным сердечником, исходя из метода эквивалентах синусоид.
- 9.** Какова схема замещения катушки с ферро магнитным сердечником.
- 10.** Почему вводится понятие комплексной магнитной проницаемости и комплексного магнитного сопротивления?
- 11.** Уравнение трансформатора с ферро магнитным сердечником.
- 12.** Векторная диаграмма и схема замещения трансформатора с ферро магнитным сердечником.
- 13.** Почему используется приведенные уравнения трансформатора?

43 - Тема . Применение нелинейных сопротивлений.

План:

1. Назначение и типы магнитных цепей.
2. Основные законы магнитной цепи.
3. Разветвленная магнитная цепь.
4. Примеры расчета разветвленной магнитной цепи.
5. Примеры расчета разветвленной магнитной цепи.

Назначение и типы магнитных цепей.

Магнитной цепью называется совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела, служащие для сосредоточения магнитного потока в определённой части пространства.

Магнитные цепи включают в себя участки из ферромагнитных материалов с высокой магнитной проницаемостью μ . В силу непостоянства μ , магнитные цепи нелинейные.

Различают цепи с постоянными магнитами и цепи, в которых магнитный поток создаётся током в обмотке, насаженной на ферромагнитный сердечник.

Если вся магнитная цепь выполнена из какого-либо одного ферромагнитного материала, её называют однородной. При включении в магнитную цепь материалов с различными магнитными свойствами её называют неоднородной.

Магнитная цепь, во всех сечениях которой магнитный поток одинаков, называется неразветвленной. В разветвленной магнитной цепи потоки на различных участках неодинаковы. Для магнитных цепей характерна соизмеримость продольных и поперечных размеров. Поэтому при расчёте магнитных цепей приходится в большей мере привлекать понятия теории поля, учитывая измерения магнитных величин в пространстве от точки к точке.

Также как и электрические цепи, магнитные цепи в частных случаях могут приниматься за линейные; при этом расчёты носят приближённый характер и справедливы лишь для определённых режимов работы.

Основные законы магнитной цепи

Одним из основных законов, используемых при расчёте магнитной цепи, является закон полного тока:

$$\oint \bar{H}d\bar{L} = \sum I$$

Циркуляция вектора напряжённости магнитного поля \bar{H} по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов $\sum I$, охватываемых этим контуром; знак тока определяется по правилу буравчика.

l - длина контура [м]

I - ток [А]

H - напряжённость магнитного поля [А/М].

В случае, когда контур интегрирования охватывает витки катушки, через которую проходит ток I , закон полного тока принимает вид:

$$\oint \bar{H}d\bar{L} = I\omega = F$$

F - намагничивающая сила (МДС) [А]. С вектором напряжённости магнитного поля \bar{H} связан вектор магнитной индукции \bar{B} , модуль которого измеряется [Тл]=[Вб/м²];

$$\bar{B} = \mu\mu_0\bar{H} = \mu_0\bar{H}$$

μ - относительная магнитная проницаемость.

μ_0 - магнитная постоянная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

μ_a - абсолютная магнитная проницаемость [Гн/м].

Векторы B и H необязательно совпадают друг с другом по направлению. В цепях с постоянными магнитами направления B и H взаимно противоположны.

Контур интегрирования обычно выбирают таким образом, чтобы он совпадал с линией вектора напряжённости H , что позволяет заменить подынтегральное выражение произведением Hdl .

Для практических расчётов интеграл заменяют суммой произведений $H_k l_k$ где k указывает участок, вдоль которого H и μ принимаются неизменными.

Формула закона полного тока запишется в виде закона магнитной цепи.

$$\sum_{k=1}^n H_k L_k = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{\mu_{ak}} L_k = F \quad \text{II Закон Кирхгофа для магнитной цепи}$$

где n - число участков.

Произведение $H_k l_k$ при отсутствии обмотки с током на k -ом участке носит название разности скалярных магнитных потенциалов и обозначается U_{mn} , где m и n - начало и конец участка.

Разность скалярных магнитных потенциалов двух точек - скалярная величина, равная линейной напряжённости магнитного поля вдоль выбранного участка цепи между двумя точками, при условии, что путь интегрирования расположен в области, где плотность электрического тока равна нулю.

В системе СИ магнитное напряжение U_{hmn} измеряется в [А].

Для воздушных зазоров магнитная проницаемость может быть принята равной магнитной постоянной μ_0 и связь B и H имеет вид:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{4\pi * 10^{-7}} \approx 0,8 * 10^6 B$$

Т.к. линии магнитной индукции непрерывны и замкнуты, то поток вектора магнитной индукции сквозь замкнутую поверхность равен 0.

$$\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{Из этого уравнения вытекает важное положение.}$$

В неразветвлённой магнитной цепи поток на всех её участках одинаков, а в разветвлённой цепи поток на участке, подходящем к месту разветвления, равен сумме магнитных потоков на участках, отходящих от места разветвления.

$$\sum \Phi_k = \hat{\quad} \quad \text{(I закон Кирхгофа для магнитной цепи)}$$

Если принят

нения S , то

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} \quad \text{можно записать } \Phi = B_k S_k, \text{ откуда}$$

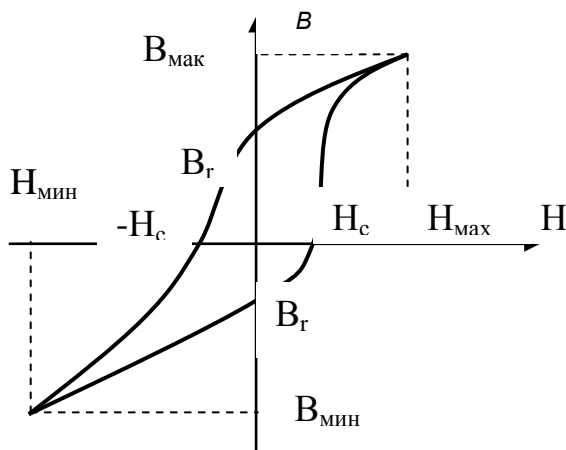
$$B_k = \frac{F}{S} \text{ или } \Phi = \frac{F}{\frac{S}{l_k}} = \frac{F}{r_m} \quad \text{Закон Ома для магнитной цепи}$$

Где r_m - магнитное сопротивление [1/Гн]

$$r_m = \frac{l_{cp}}{S \mu} \quad l_{cp} - \text{длина средней линии магнитной}$$

Закон Ома для индукции Φ может быть применён для расчёта, вследствие того что $\Phi = f(H)$

Примерная зависимость $B = f(H)$ показана на рисунке, такая двузначная зависимость называется петлёй гистерезиса.



При возрастании H индукция B изменяется (возрастает) по нижней петле гистерезиса, а при убывании H индукция B уменьшается по верхней петле гистерезиса. При $B_{\max} = -B_{\min}$ получается симметричная петля гистерезиса. Индукция B_r при $H=0$ называется остаточной.

Ширина петли в основном зависит от свойств материала, от максимальной H и от скорости dh/dt снимают статическую петлю гистерезиса при достаточно медленном перемагничивании образца.

Основная кривая намагничивания – кривая, представляющая собой геометрическое место вершин симметричных петель гистерезиса, получающихся при различных максимальных значениях напряжённости магнитного поля.

Неразветвлённая магнитная цепь

Простейшей неразветвлённой магнитной цепью является замкнутый магнитопровод с одинаковым поперечным сечением и одинаковой магнитной проницаемостью по всей длине. Магнитная индукция B во всех точках такой цепи одинакова, H тоже одинакова и для такой цепи справедливо:

$$Hl_{\text{ср}} = F$$

Часто в состав неразветвлённой магнитной цепи входят участки из различных материалов с неодинаковыми поперечными сечениями.

Пусть задана конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания и магнитный поток или индукция в каком-либо сечении. Требуется найти МДС, ток или число витков намагничивающей обмотки. Расчёт проводим в следующей последовательности.

1. Разбиваем магнитную цепь на участки постоянного сечения и определяем длины l_k (в м) и площади поперечного сечения S_k (в м^2) участков. Длины участков берём по средней силовой линии.
2. Исходя из постоянства потока вдоль всей цепи, по заданному потоку и сечениям S_k находим магнитные индукции на каждом участке $B_k = \frac{\Phi}{S_k}$.
3. По кривой намагничивания определяем напряжённости поля H_k для ферромагнитных участков магнитной цепи. Напряжённость поля в воздушном зазоре $H_{a/m} = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Втл}$.
4. Подсчитываем сумму падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k$ и на основании закона полного тока

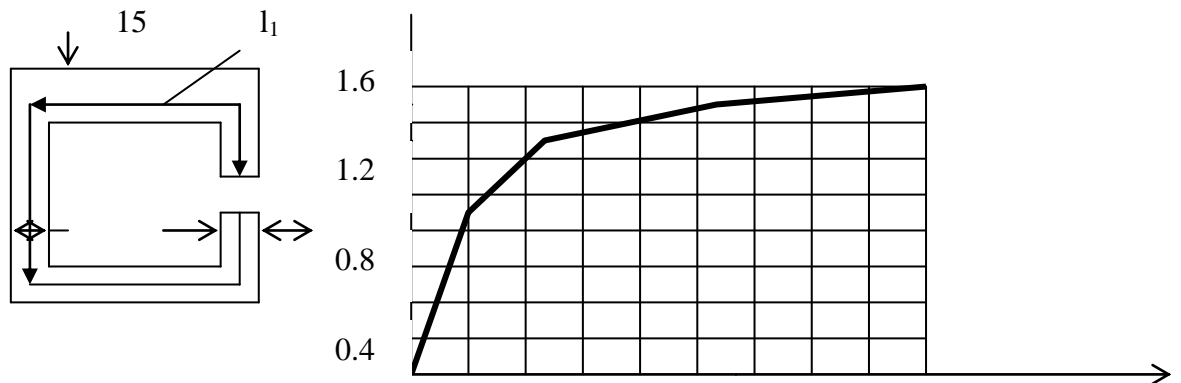
$$\sum H_k l_k = I \omega$$

Основным допущением при расчете является то, что магнитный поток вдоль всей магнитной цепи полагаем неизменным. В действительности небольшая часть потока всегда замыкается, минуя основной путь.

Поток, который замыкается, минуя основной путь, называют потоком рассеяния. При малом воздушном зазоре поток рассеяния относительно мал; с увеличением воздушного зазора поток рассеяния может стать соизмеримым с основным потоком.

Примеры расчета неразветвленных магнитных цепей.

а) прямая задача.
Пусть задана магнитная цепь и кривая намагничивания



Найти, какой ток должен протекать в обмотке, чтобы индукция в воздушном зазоре $B_{\delta} = 1$ тл.

Магнитную цепь разбиваем на три участка:

$$e_1 = e'_1 + e''_1 = 30 \text{ см} \quad s_1 = 4,5 \text{ см}^2 \quad l_2 = 13,5 \text{ см} \quad s_2 = 6 \text{ см}^2$$

Воздушный зазор $\delta = 0,01 \text{ см}$, $s_{\delta} = 4,5 \text{ см}^2$ индукция $B_1 = B_{\delta} = 1$ тл индукцию на участке 1 найдем, разделив поток $\Phi = B\delta S_{\delta}$ на сечение S_2 второго участка:

$$B = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{B\delta S_{\delta}}{S_2} = \frac{1 \cdot 4,5}{6} = 0,75 \text{ тл}$$

Напряженности поля на участках l_1 и l_2 определяем согласно кривой намагничивания по $B_1 = 1$ тл $H_1 = 300$ А/м по $B_2 = 0,75$ тл $H_2 = 115$ А/м

$$\text{Напряженность поля в воздушном зазоре } H_{\delta} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ Вб} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 8 \cdot 10^5 \text{ А/м}$$

Подсчитываем падение магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи:

$$\sum H_k L_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_{\delta} \delta = 300 \cdot 0,3 + 115 \cdot 0,135 + 8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} = 185,6 \text{ А}$$

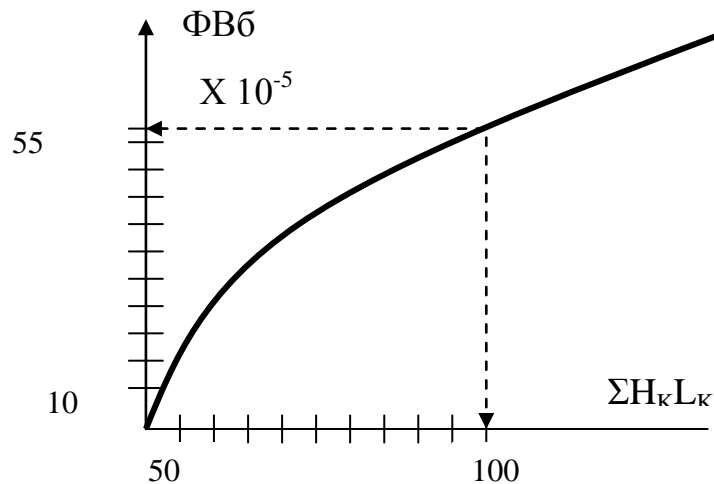
$$\text{Ток в обмотке } I = \frac{\sum H_k L_k}{W} = \frac{185,6}{500} = 0,37 \text{ А}$$

б) Обратная задача

Найти магнитную индукцию в воздушном зазоре магнитной цепи примера а, если $I = 350$ А.

Задаемся значениями $B_{\delta} = 0,5; 1,1; 1,2; \text{ и } 1,3$ тл и для каждого из них подсчитываем сумму $\sum H_k L_k$. Подсчеты сводим в таблицу.

B_{δ} тл	0,5	1,1	1,2	1,3
B_1 тл	0,5	1,1	1,2	1,3
B_2 тл	0,375	0,825	0,9	0,975
H_1 А/м	50	460	700	1020
H_2 А/м	25	150	200	300
H_{δ} А/м	$4 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^5$	$9,6 \cdot 10^5$	$10,4 \cdot 10^5$
$\sum H_k L_k$ А	58,3	246,3	333	4595
Φ Вб	$22,5 \cdot 10^{-5}$	$49,5 \cdot 10^{-5}$	$54 \cdot 10^{-5}$	$58,5 \cdot 10^{-5}$



По данным таблицы строим зависимость $\Phi = f(\Sigma H_k L_k)$ и по ней находим, что при $I_w = 350 \text{ A}$ $\Phi = 55 \times 10^{-5}$ следовательно $B_b = \Phi / S_b = \frac{5,5 \cdot 10^{-5}}{4,5 \cdot 10^{-4}} = 1,21 \text{ Тл}$.

Пример расчета разветвленной магнитной цепи методом двух узлов

В разветвленной магнитной цепи действует первый и второй Закон Кирхгофа.

Первый Закон Кирхгофа:

алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю:

$$\sum \Phi_k = 0$$

Второй Закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма намагничивающих сил в любом контуре равна алгебраической сумме произведений потоков на соответствующие магнитные сопротивления данного контура:

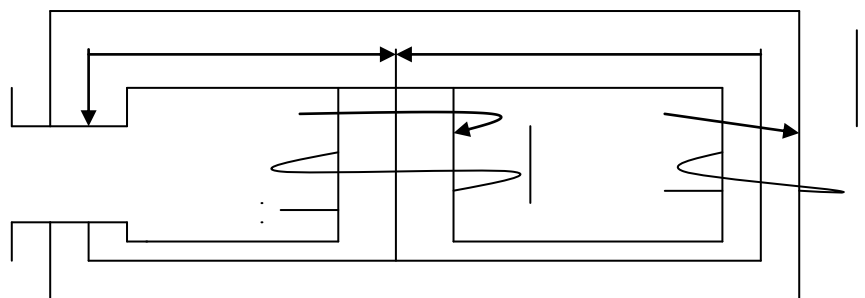
$$\sum H_k L_k = I_k W_k$$

Пусть задана разветвленная магнитная цепь.

Φ_1

$L_1 = 20 \text{ см}$
 $L_b = 0,1 \text{ см}$
 $S_1 = 8 \text{ см}^2$
 $L_2 = 7 \text{ см}$
 $S_2 = 2 \text{ см}^2$
 $W_2 = 500$
 $I_2 = 0,2 \text{ A}$
 $L_3 = 20 \text{ см}$
 $S_3 = 1,78 \text{ см}^2$
 $W_3 = 500$

Данные:



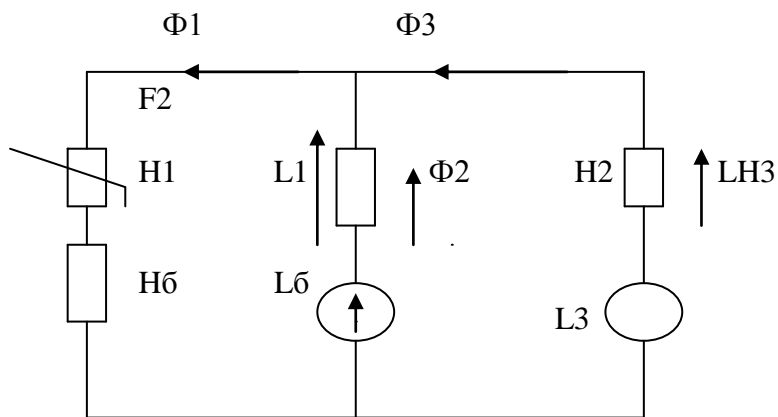
Кривая намагничивания задана $I_3 = 0,3 \text{ A}$ в виде таблицы. Требуется определить Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 .

Представим магнитную цепь в виде электрической схемы, направления МДС определяются по правилу буравчика. Направления магнитных потоков заданы:

$$F_2 = I_2 W_2 = 100 \text{ A}$$

$$F_3 = I_3 W_3 = 150 \text{ A}$$

$$H_b L_b = 80 \times 10 = 80 \times 10 \text{ Вл}$$



Составим для данной схемы уравнения по первому и второму Законам Кирхгофа:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

$$N_2 L_2 + N_1 L_1 + N_6 L_6 = F_2$$

$$N_2 L_2 + N_3 L_3 = F_2 - F_3$$

По методу двух узлов выразим зависимости $N_1 L_1 + N_6 L_6$; $N_2 L_2$; $N_3 L_3$ от одной величины магнитного напряжения $U_{мав}$ между узлами a и b по второму Закону Кирхгофа:

$$U_{мав(1)} = N_1 L_1 + N_6 L_6$$

$$U_{мав(2)} = -N_2 L_2 + F_2$$

$$U_{мав(3)} = F_3 - N_3 L_3$$

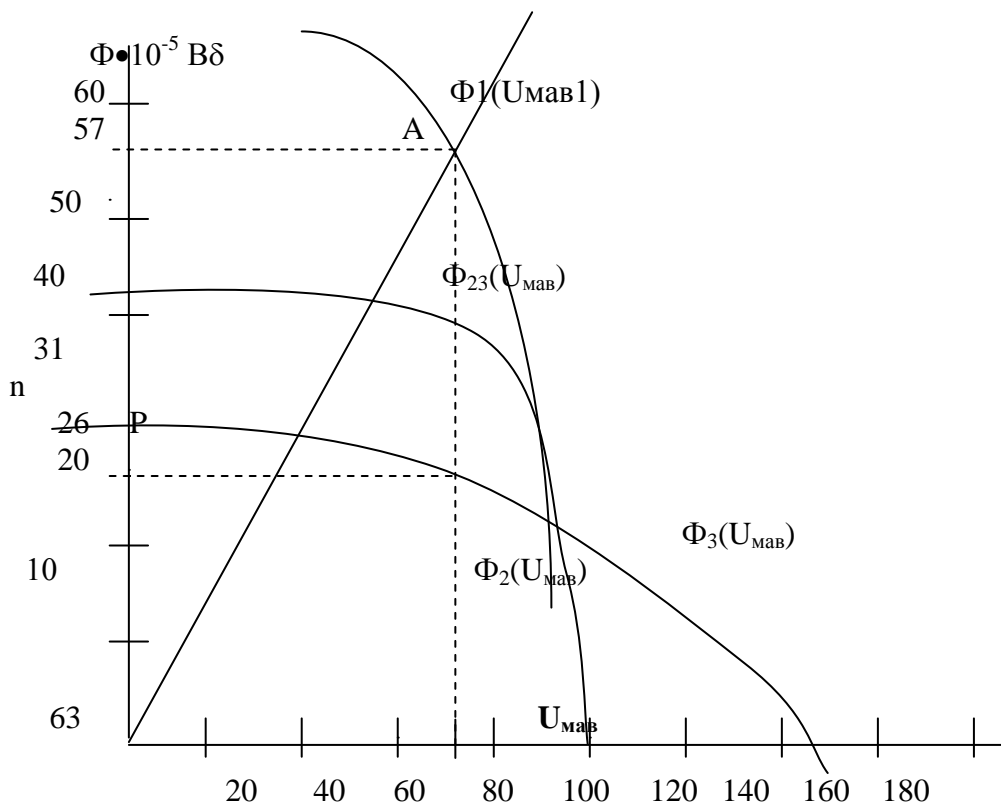
$$\Phi_1 = B_1 S_1 = 8 \times 10^{-4} B_1$$

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 2 \times 10^{-4} B_2$$

$$\Phi_3 = B_3 S_3 = 1,78 \times 10^{-4} B_3$$

Результаты расчета введем в таблицу

Н А/М	0	20	40	60	80	120	200	400	600	800	1200
В Тл	2	0,22	0,75	0,93	1,02	1,14	1,28	1,47	1,53	1,57	1,6
$U_{мав1} = 0.2N_1 + 80B_1$	0	21,6	68	86,4	97,6	115,2	142,4	197,6	242,4	285,6	368
$\Phi_1 = 8 \times 10^{-4} B_1$	0	17,6	60	74,4	81,6	91,2	102,4	117,6	122,4	125,6	128
$U_{мав2} = 100 - 0,07N_2$	100	98,6	97,2	95,8	94,4	91,6	86	72	58	44	16
$\Phi_2 = 2 \times 10^{-4} B_2$	0	4,4	15	18,6	20,4	22,8	25,6	29,4	30,6	31,4	32
$U_{мав3} = 150 - 0,2N_3$	150	146	142	138	134	126	110	70	30	-10	-90
$\Phi_3 = 1,78 \times 10^{-4} B_3$	0	3,916	13,35	16,55	18,16	20,29	22,78	26,17	27,23	27,95	28,48



Характеристику $\Phi_{23}(U_{мав})$ строим сложение ординат характеристик $\Phi_3(U_{мав2})$ и $\Phi_3(U_{мав3})$. Например, ордината "mq". Характеристики $\Phi_{23}(U_{мав})$ равна сумме ординат m_p и m_n характеристик $\Phi_2(U_{мав2})$ и $\Phi_3(U_{мав3})$ ($m_q = m_p + m_n$). На пересечении вспомогательной характеристики $\Phi_{23}(U_{мав})$ и характеристики $\Phi_1(U_{мав1})$ находится рабочая точка А. По графику следует, что

$$U_{мав} = 63 \text{ A} \quad \Phi_1 = 57 \times 10^{-5} \text{ Вб} \quad \Phi_2 = 31 \times 10^{-5} \text{ Вб} \quad \Phi_3 = 26 \times 10^{-5} \text{ Вб}$$

Контрольные вопросы?

1. Как изменяется кривая тока, если поток и Э.Д.С., а также напряжение на катушке индуктивности из ферро магнитного материала изменяется по синусоидальному закону?
2. Как изменяется магнитный поток, в катушке индуктивности с ферро магнитным сердечником, если ток изменяется по синусоидальному закону?
3. Что из себя представляют потери на вихревые токи в катушке из ферро магнитного сердечника?
4. Отчего зависят потери на гистерезис?
5. Какова суммарная мощность потерь в сердечнике?
6. Как осуществляется замена несинусоидального тока в катушке с ферро магнитным сердечником и напряжение на её зажимах эквивалентными синусоидами?

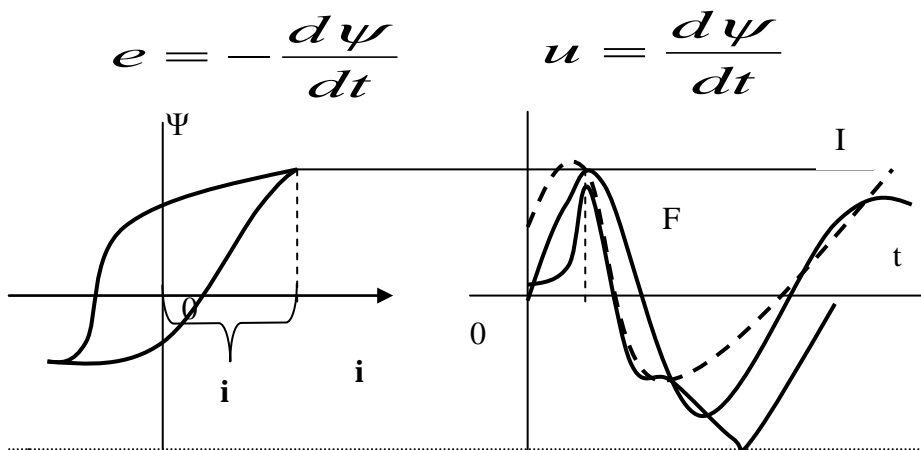
44 - Тема . Применение полупроводниковых триодов как управляемые сопротивления.

План:

1. Формы кривых тока, магнитного потока и ЭДС в катушке с ферромагнитным сердечником. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала.
2. Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокосцеплением и током.
3. Уравнение, векторная диаграмма и эквивалентная схема катушки с ферромагнитным сердечником.
4. Комплексное магнитное сопротивление.

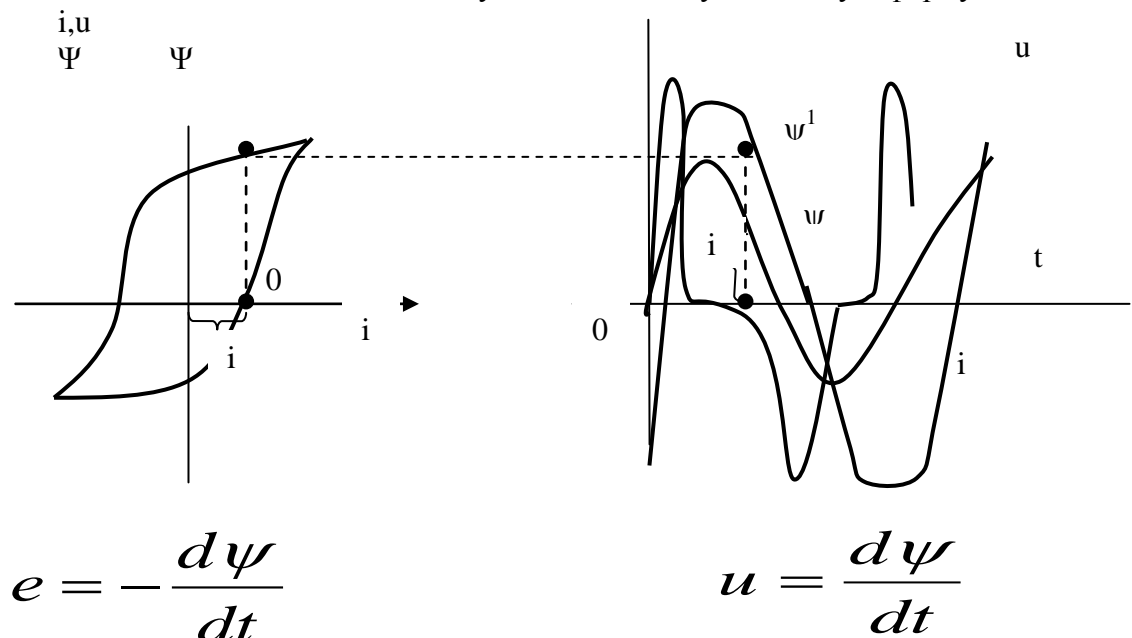
Формы кривых тока, магнитного потока и ЭДС в катушке с ферромагнитным сердечником

Так как катушки с ферромагнитным сердечником находят широкое применение в цепях переменного тока, рассмотрим вопрос о влиянии нелинейной зависимости магнитного тока в таких катушках от тока в них на форму кривых тока, потока и ЭДС. Связь $\Psi=f(i)$ определяется петлей гистерезиса. Пусть поток Ψ , а, следовательно, и ЭДС в обмотке катушки, а также напряжение ее уравновешивающее, изменяются по синусоидальному закону



В таком случае кривая тока в обмотке катушки содержит высшие гармоники, преимущественную третью, пятую и седьмую. Максимумы тока и потока совпадают, но через нуль кривая тока происходит раньше кривой магнитного потока. Кривая тока имеет заостренную форму.

В другом предельном случае, когда ток изменяется по синусоидальному закону, кривая магнитного потока отлична от синусоиды и имеет уплощенную форму



Кривые же Э.Д.С. е, равной:

При этом имеют весьма заостренную форму. Построение потока по заданной кривой тока и петле гистерезиса нетрудно осуществить по точкам графически. Кривую же напряжения получаем дифференцированием кривой потока.

В общем случае кривая тока, напряжения могут оказаться несинусоидальными. Кривые тока, потока, напряжения симметричны относительно оси абсцисс, и, следовательно, не содержат четных гармоник.

Потери в сердечниках из ферромагнитного материала

Для правильного выбора эквивалентных синусоид, заменяющих действительные несинусоидальные кривые тока и напряжения в катушках с ферромагнитными сердечниками, необходимо рассмотреть потери энергии в сердечниках при периодическом изменении магнитного потока. Эти потери складываются из потерь на вихревые токи и на гистерезис. Сердечники по большей части набирают из тонких листов из ферромагнитного материала, изолированных друг от друга тонким слоем изоляции с целью уменьшить потери на вихревые токи.

Вихревые токи, согласно правилу Ленца, направлены таким образом, что созданное ими магнитное поле ослабляет результирующее поле. Это ослабление наиболее резко выражено в середине листа. Поэтому результирующее магнитное поле распределяется неравномерно по сечению листа. Толщину листа для уменьшения потерь выбирают малой; при этом можно пренебречь неравномерностью поля внутри листа, т.е. пренебречь размагничивающим действием вихревых потоков. На рисунке показана трубка вихревого тока, имеющая сечение ldx и длину приблизительно равную $2h$. Активная проводимость вдоль этой трубки обратно ее активному сопротивлению

Действующее значение ЭДС индуктируемой вдоль трубки, равно:

Где K_Φ - коэффициент формы кривой Э.Д.С. Следовательно потери внутри трубки тока равны

Интегрируя от 0 до $d/2$ получаем потери на вихревые токи во всем листе

$$dg_x = \gamma \frac{ldx}{2h}$$

$$E_x = 4K_\Phi f \Phi_{mx} = 4K_\Phi f 2xhB_m$$

$$dP_e = E_x^2 dg_x = 32hl\gamma K_\Phi^2 f^2 B_m^2 x^2 dx$$

Где $V=hld$ - объем листа. Потери на вихревые потоки пропорциональны квадрату частоты, квадрату амплитуды индукции, квадрату толщины листа и первой степени удельной проводимости.

Для сердечника из проволок кругового сечения с диаметром d , оси которых направлены вдоль линии магнитной индукции, обобщая полученный результат:

$$P_e = \frac{4}{3} \gamma K_\Phi^2 d^2 f^2 B_m^2 V$$

$$P_e = \frac{1}{2} \gamma K_{\Phi}^2 d^2 f^2 B m^2 V$$

$P_e = \xi f^2 B^2 m V$, где ξ - коэффициент зависящий от формы сечения элементов, на которые разделен сердечник, геометрических размеров этого сечения, удельной проводимости материала и коэффициента формы $K_{\text{оп}}$.

Потери на гистерезис в единице объема вещества за один цикл перемагничивания может быть выражена в виде

$$W_{\Gamma}^I = \eta B_m^n$$

где η - коэффициент, зависящий от свойств ферромагнитного вещества. Следовательно мощность потерь на гистерезис в объеме V , равная потерям энергии в единицу времени, т.е. за f циклов может быть выражена в виде

В электротехнических устройствах $n=2$. Суммарная мощность потерь в сердечнике может быть представлена

$$P_{\Phi EP} = P_r + P_B = \eta f B^2 m V + \xi f^2 B_m^2 V$$

Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокосцеплением и током

Заменим несинусоидальный ток в катушке с ферромагнитным сердечником и напряжение на ее зажимах эквивалентными синусоидами. Надлежит выбрать амплитуды U_m ; I_m эквивалентных синусоид и угол сдвига фаз φ между ними. Мы рассматриваем напряжение, уравнивающее ЭДС, индуцируемую в обмотке катушки переменным магнитным потоком в сердечнике, не учитывая падения напряжения в активном сопротивлении обмотки, и индуктивного попадания напряжения, определяемого потоками рассеяния.

Связь между φ

$$U_m = \sqrt{2} U \quad I_m = \sqrt{2} I$$

для эквивалентных синусоид определяется из условия сохранения потерь в сердечнике:

$$UI \cos \varphi = P_{\Phi EP} = P_r + P_B$$

Необходимы еще два условия: это выбор U_m и I_m равными амплитудами первых гармоник напряжения и тока, или выбор величин I и U равными действующим значениям несинусоидальных напряжений и тока.

Замена действительных кривых тока эквивалентными синусоидами приводит к тому, что связь Ψ и i выражается уравнением эллипса, площадь которого в соответствующих масштабах равна потерям в сердечнике за один период. В зависимости от выбора амплитуд U_m и I_m эквивалентных синусоид мы получим тот или иной эллипс, но все эти эллипсы должны иметь одну и ту же площадь. При синусоидальном напряжении, соответственно, при синусоидальном потоке, в качестве амплитуд U_m и Ψ_m естественно взять действительные амплитуды этих величин. Амплитуду же I_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармоники тока i , либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Соответственно тому или другому выбору амплитуды

эквивалентной синусоиды тока. Получим то или иное значение φ или тот или иной вид эллипса.

При синусоидальном токе величину I_m выбрать равной действительной амплитуде тока i . Амплитуду же U_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармоники напряжения U , либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Амплитуда Ψ_m определится из равенства $U_m = \omega \Psi_m$. Соответственно получим то или иное значение φ и тот или иной вид эллипса. Все сказанное иллюстрируется на рисунках, в предположении, что учитываются только потери на гистерезис.

Рис. "а" относится к случаю синусоидальных U и Ψ , а рис. "б" к случаю синусоидального тока i .

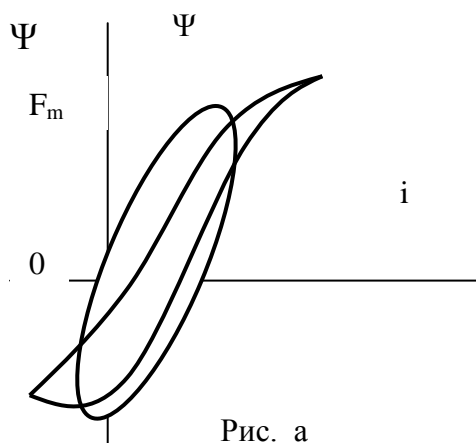


Рис. а

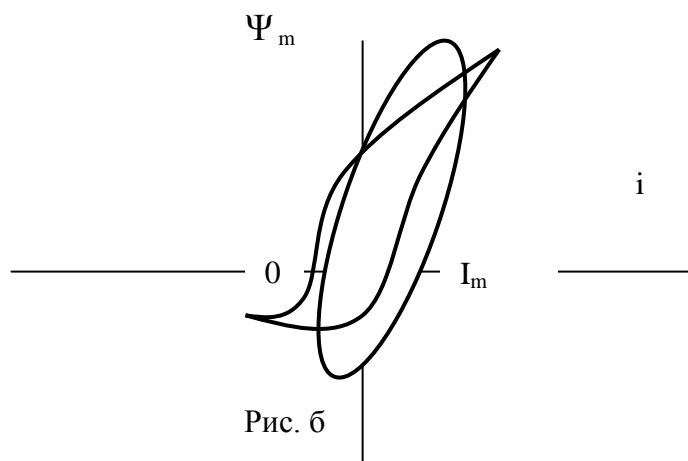


Рис. б

В этих случаях площадь эллипса равна площади петли гистерезиса. Наличие вихревых токов несколько приближает к эллипсу действительную кривую Ψ от i . Площадь эквивалентного эллипса при этом должна быть взята равной площади этой действительной кривой, равной суммарным потерям в сердечнике.

Уравнение, векторная диаграмма и эквивалентная схема катушки и ферромагнитным сердечником.

Рассмотрим процессы в катушке с замкнутым ферромагнитным сердечником, обмотка которой имеет ω витков.

Уравнение, описывающее процесс в катушке, имеет вид

$$U = ri + \frac{d\Psi}{dt}$$

где r - сопротивление обмотки. Полное потокосцепление представим в виде суммы $\Psi = \Psi_\sigma + \Psi_0$. Величина Ψ_0 есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися целиком вдоль сердечника. Следовательно, $\Psi_0 = \omega \Phi_0$ где Φ_0 - поток сквозь сечение сердечника, определяемый этими линиями.

Ψ_σ - есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися частично или полностью в воздухе.

$\Psi_\sigma = L_\sigma i$, т.к. магнитное сопротивление пути, по которому замыкаются линии этого потока, практически не зависит от тока i , следовательно, индуктивность L_σ постоянна.

Потокосцепление Ψ_0 нелинейно связано с i , так как магнитная проницаемость U , следовательно, магнитное сопротивление сердечника зависят от напряженности магнитного поля. Уравнение катушки можно записать:

Заменяя несинусоидальные кривые тока и потока эквивалентными

$$U = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} + \omega \frac{d\Phi_0}{dt} = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} + U_0$$

синусоидами, можем записать это уравнение в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = r\dot{I}_m + j\omega L_\sigma \dot{I}_m + j\omega w \Phi_{0m} = r\dot{I}_m + j\omega L_\sigma \dot{I}_m + \dot{U}_{0m}$$

Эквивалентная синусоида тока i отстает от эквивалентной синусоиды напряжения на угол

$$U_0 = \frac{d\psi_0}{dt}$$

$$\varphi < \frac{\pi}{2}$$

вследствие наличия потерь в сердечнике $P_{ФЕР} = P_r + P_w = I_{U0} \cos \varphi_0 > 0$. Эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды тока i на угол

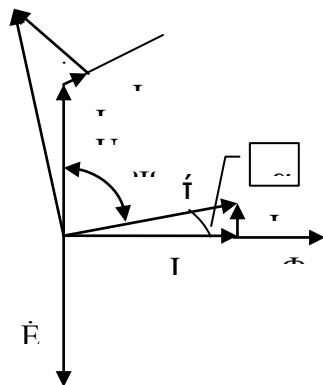
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$$

т.к. эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды напряжения U_0 на угол $\pi/2$. Векторная диаграмма катушки показана на рис. На

$$j\omega L_\sigma \dot{I} = U_L$$

$$e_0 = -w \frac{d\Phi_0}{dt}$$

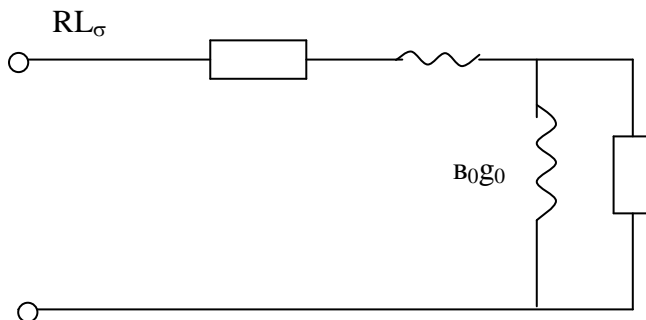
диаграмме отключен вектор Э.Д.С. индуцируемый в обмотке потоком Φ_0 равной



Ток I можно разложить на две составляющие: I_p , находящуюся в фазе с потоком, и I_a , находящуюся в квадратуре с потоком. Величина I_p представляет собой реактивную составляющую тока, а величина I_a - активную составляющую. Соответственно можно изобразить катушку с помощью эквивалентной схемы приведённой на рисунке; причём

$$b_0 = \frac{I_p}{U_0}$$

$$g_0 = \frac{I_a}{U_0} = \frac{I_a U_0}{U_0^2} = \frac{P_{ФЕР}}{U_0^2}$$



Комплексное магнитное сопротивление магнитной цепи

Т.к. поток Φ_0 в ферромагнитном сердечнике отстает по фазе на угол \mathcal{L} от намагничивающего тока i в обмотке катушки w , следовательно, от МДС $i\omega$, можно записать, что

$$\dot{\Phi}_{0m} = \frac{\dot{I}_m w}{Z_m}$$

Комплексное магнитное сопротивление

$$Z_M = Z_M e^{j\alpha} = R_M + jX_M$$

Выразим комплексное магнитное сопротивление через длину l сердечника, сечение S сердечника и магнитную проницаемость вещества сердечника. Сечение S будем считать одинаковым по всей длине сердечника. Получаем:

где

$$\underline{Z}_M = \frac{I_m \omega}{\dot{\Phi}_{om}} = \frac{H_m l}{B_m} = \frac{l}{\mu S} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

комплексная магнитная проницаемость, учитывающая и потери в веществе сердечника. Существует связь между комплексным магнитным сопротивлением Z_M сердечника и комплексным электрическим сопротивлением обмотки, определяемыми

$$\underline{Z}_{o\varepsilon} = \frac{1}{g_0 - jb_0}$$

напряжением $\dot{U}_{om} = j\omega \Phi_{om} W$

Появление мнимой составляющей jX_M в комплексном магнитном сопротивлении

$$\underline{Z}_{o\varepsilon} = \frac{\dot{U}_{om}}{\dot{I}_m} = \frac{j\omega W^2 \dot{\Phi}_{om}}{\dot{I}_m W} = \frac{j\omega W^2}{\underline{Z}_M}$$

является результатом наличия потерь в сердечнике. Используя эквивалентную схему катушки и выражение для ее параметров

Получаем

Откуда

Используя понятие о комплексном магнитном сопротивлении и комплексной магнитной проницаемости, мы получаем возможность описывать периодические процессы также и в магнитных цепях с помощью комплексного метода. R_M и X_M

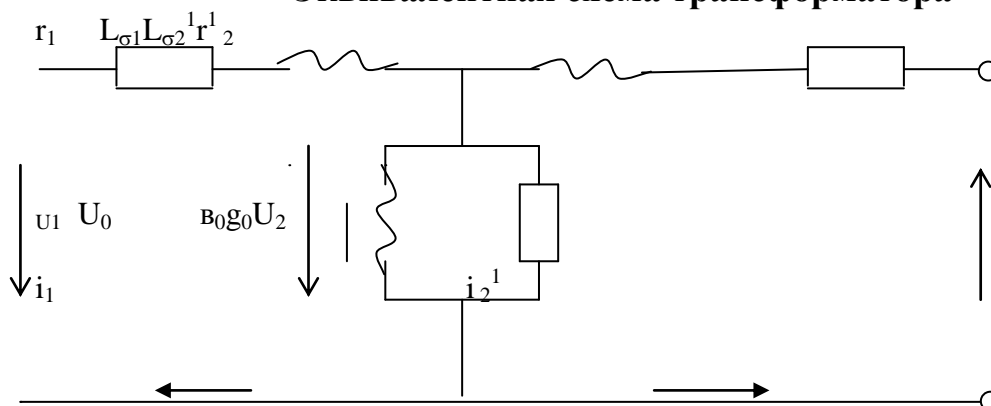
$$g_0 = \frac{P_{фер}}{U_{om}^2} = \frac{2P_{фер}}{U_{om}^2} = \frac{2P_{фер}}{\omega^2 W^2 \Phi_{om}^2}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{o\varepsilon}} = \underline{y}_{o\varepsilon} = g_0 - jb_0 = \frac{Z_M}{j\omega W^2} = \frac{R_M + jX_M}{j\omega W^2} = \frac{X_M}{\omega W^2} - j \frac{R_M}{\omega W^2}$$

$$X_M = \omega W^2 g_0 = \frac{2P_{ФЕР}}{\omega \Phi_{om}^2}$$

являются нелинейными функциями от амплитуды М.ДС $I_m W$ или от амплитуды потока Φ_{om} .

Эквивалентная схема трансформатора



Трансформатор с ферромагнитным сердечником представляет собой нелинейный четырехполюсник. Поэтому, определяя его параметры из опытов ХХ и КЗ необходимо в опыте ХХ вследствие зависимости v_0 от U_0 брать напряжение U_1 равным напряжению u_0 при нормальной нагрузке. Падение напряжения на участке $r_1 L_{\sigma 1}$ при токе ХХ весьма мало. Из опыта ХХ определяют v_0 и g_0 . Опыт КЗ проводят при номинальном токе. Из опыта КЗ определяют $r_1 + r_2 L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2}$. Величины r_1 и r_2 , также как и величины $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}$ одного порядка. Поэтому можно полагать, что $L_{\sigma 1} = L_{\sigma 2}$ и $r_2 = r_1$.

Контрольные вопросы?

1. Написать уравнение для мгновенных и комплексных значений, описывающие процессы в катушке с замкнутым ферромагнитным сердечником.
2. Нарисовать векторную диаграмму катушки с ферромагнитным сердечником, исходя из метода эквивалентных синусоид.
3. Какова схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником.
4. Почему вводится понятие комплексной магнитной проницаемости и комплексного магнитного сопротивления?
5. Уравнение трансформатора с ферромагнитным сердечником.
6. Векторная диаграмма и схема замещения трансформатора с ферромагнитным сердечником.
7. Почему используются приведенные уравнения трансформатора?

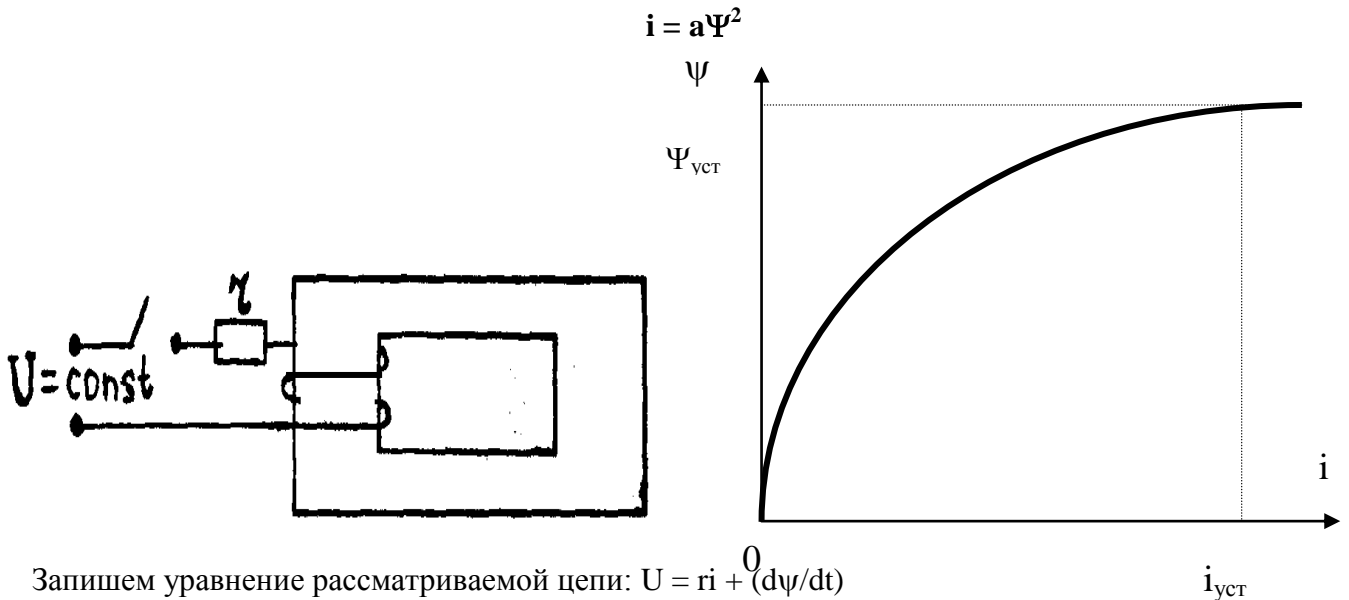
45-Тема.Переходные процессы в нелинейных электрических цепях.

План:

1. Аналитический метод.
2. Метод расчёта переходных процессов в нелинейной цепи, основанный на условной линеаризации уравнения цепи.
3. Метод касочной линеаризации.
4. Метод графического интегрирования.
5. Метод последовательных интервалов.
6. Метод медленно меняющихся амплитуд.

Аналитический метод.

Аналитическими методами расчёта переходных процессов в нелинейных цепях называют такие методы расчёта, в которых основной операцией при определении зависимостей искомых токов и напряжений от времени является точное или приближённое аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений цепи, в которые подставляются аналитически выражения характеристик нелинейных сопротивлений. Рассмотрим задачу о включении катушки с ферромагнитным сердечником на постоянное напряжение. Выразим приближённо кривую намагничивания в аналитическом виде:



Запишем уравнение рассматриваемой цепи: $U = ri + \int_0^t (d\Psi/dt)$

Подставим аппроксимирующую функцию тока: $U = ra\Psi^2 + (d\Psi/dt)$

Разделим переменные

$$u - ra\Psi^2 = d\Psi/dt$$

$$(u - ra\Psi^2)dt = d\Psi$$

Ψ

$$t = \int_0^{\Psi} (d\Psi / (u - ra\Psi^2)),$$

Разделим и числитель, и знаменатель на ra

$$t = \frac{1}{ra} \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{\frac{U}{ra} - \Psi^2}}$$

Установившееся значение тока $J_{\text{уст}} = U/r$, ему соответствует установившееся потокосцепление

$$\psi_{уст} = \sqrt{J_{уст} / a}$$

следовательно

$$t = (1/ra\psi_{уст}) \operatorname{Arcth} (\psi/\psi_{уст}), \text{ отсюда}$$

$\psi = \psi_{уст} \operatorname{th} ra\psi_{уст} t$ подставив в аппроксимирующую функцию, получим:

$$i = a \psi^2 = a \psi_{уст}^2 \operatorname{th}^2 ra\psi_{уст} t$$

Метод расчета переходных процессов в нелинейной цепи, основанной на условной линеаризации уравнения цепи.

Пусть в нелинейном дифференциальном уравнении, описывающем переходной процесс в цепи, член, содержащий коэффициент, зависящий от интенсивности процесса, имеет второстепенное значение по сравнению с другими членами уравнения, содержащими постоянные коэффициенты. В этом случае коэффициент при этом нелинейном члене приближенно может быть принят постоянным, равным некоторому среднему своему значению. Уравнение при этом становится линейным. Таким образом, этот метод основан на условной линеаризации уравнения цепи.

Пусть катушка с ферромагнитным сердечником включается под синусоидальное напряжение. Уравнение цепи:

$$(d\psi/dt) + ri = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

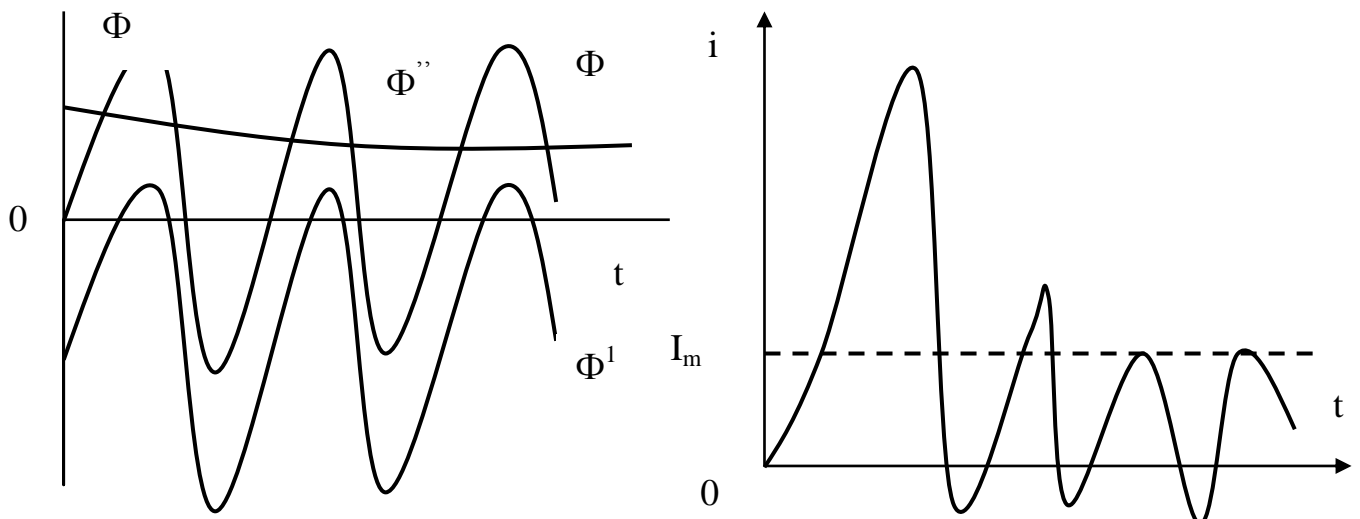
Пусть член ri имеет второстепенное значение, по сравнению с $d\psi/dt$. Зависимость $\psi = Li$ является нелинейной, так как L есть функция тока. Если в уравнении подставить вместо ψ его выражение через i , тогда:

$$(d\psi/dt) + (r/L) \psi = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

где $(r/L) \psi$ является второстепенным и в нем можно положить $L = \text{const}$. Уравнение становится линейным и имеет решение:

$$\psi(t) = \psi_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-(r/L)t}$$

Если $\psi(0) = 0$ $A = -\psi_m \sin(\psi - \varphi)$. Переходной процесс проявляется наиболее интенсивно при включении в такой момент, когда начальная фаза ψ равна $\varphi \pm \pi/2$. Пусть $\psi = \varphi - \pi/2$. При этом $A = \psi_m$ и $\psi(t) = -\psi_m \cos \omega t + \psi_m e^{-(r/L)t}$



Всплеск тока может вызвать механические разрушения обмотки, т.к. электродинамические усилия пропорциональны квадрату тока. Поэтому мощные ненагруженные трансформаторы включают через дополнительные сопротивления, которые затем замыкают накоротко.

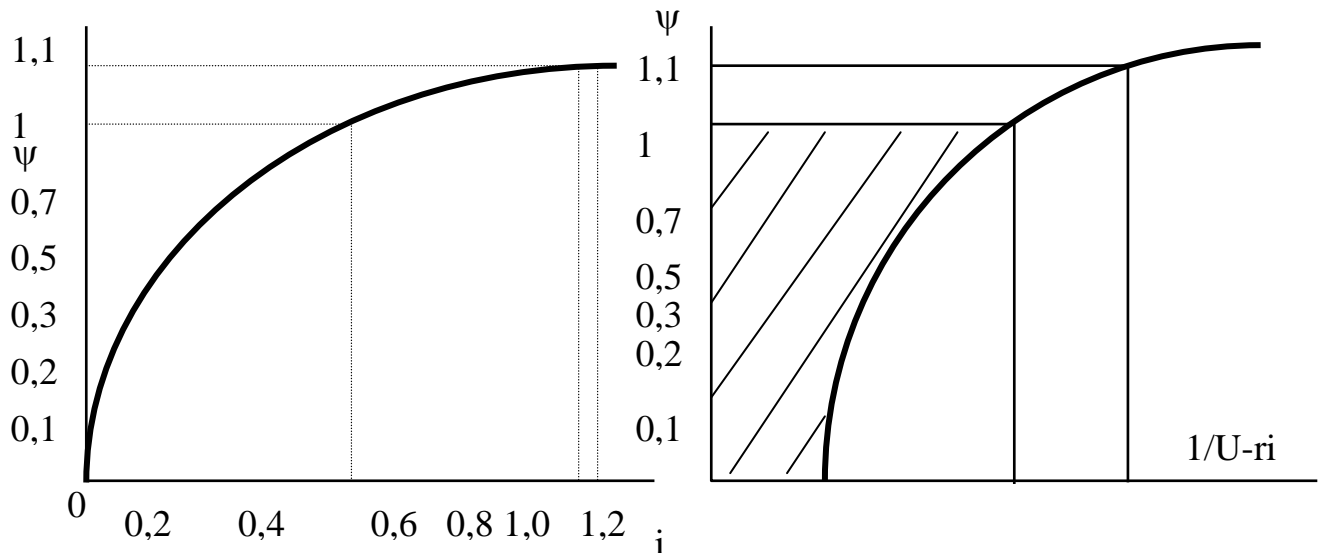
Метод графического интегрирования для расчета переходного процесса в нелинейной цепи.

При включении катушки с ферромагнитным сердечником на постоянное напряжение, уравнение примет вид:

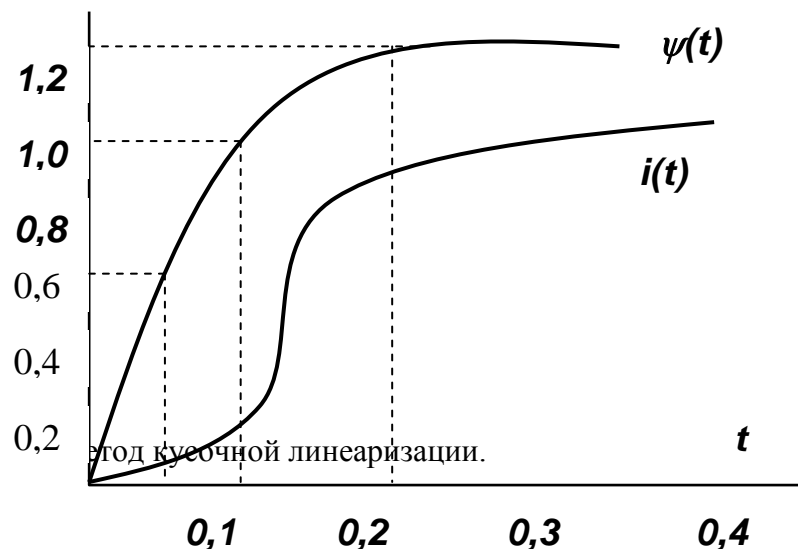
$$t = \int_0^t \frac{d\psi}{U - ri}$$

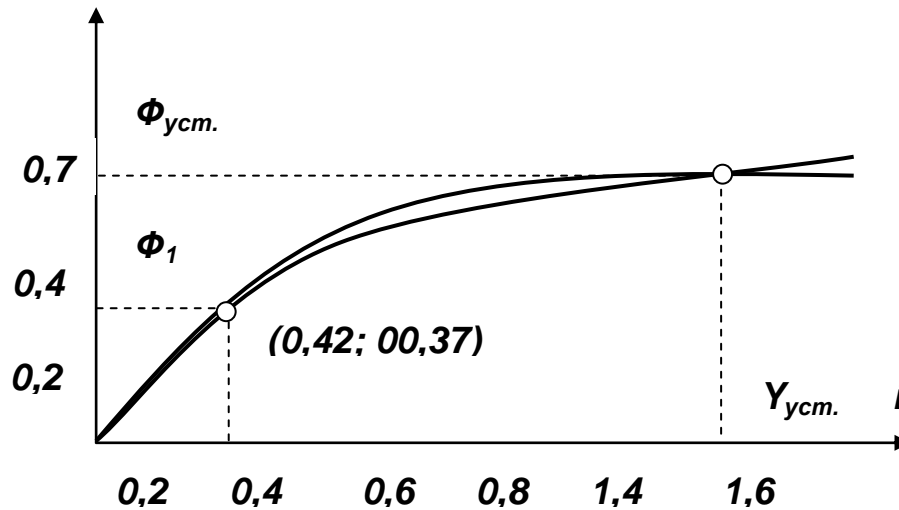
$(d\psi/dt) + ri = U$, откуда

Пользуясь известной зависимостью $\psi = F(i)$, строим кривую $\psi = \varphi(1/(U - ri))$



Заштрихованная площадь дает в соответствующем масштабе время в течении которого потокосцепление увеличивается от 0 до ψ , то есть позволяет найти зависимость $\psi(t)$. На рисунке изображена рассчитанная таким путем кривая $\psi(t)$, а также кривая $i(t)$. Значения i для каждого момента времени берутся из кривой $\psi(i)$, соответственно найденным значениям для этих моментов времени





Характеристика намагничивания разбивается на два участка.
Участок 1.

$$i = 0 \div i_1 ; \psi = 0 \div \psi_1 ; t = 0 \div t$$

Уравнение Кирхгофа

$$U = ri + L_1((di/dt))$$

Имеет решение:

$$i = I_{уст} + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

где при $t = 0, i = 0$

$$0 = i = I_{уст} + A_1, \text{ откуда } -I_{уст} = A_1$$

$$\tau = L_1 / r, \text{ где } L_1 = \Delta\psi_1 / \Delta i_1 = \psi_1 / I_1$$

$$i = I_{уст} (1 - e^{-t(L_1)})$$

Из последнего уравнения находим при $i=I_1, t=t_1$

Участок 2

$$i = I_1 / I_{уст} ; \psi = \psi_1 / \psi_{уст} ; t = t_{уст} / \infty ; L_2 = \Delta\psi / \Delta t = (\psi_{уст} - \psi_1) / (I_{уст} - I_1) ; \tau_2 = L_2 / r$$

$$i = I_{уст} + A_2 e^{-(t/\tau_2)} \text{ при } t = 0 \quad i = I_1 \quad I_1 = I_{уст} + A_2 \quad A_2 = I_1 - I_{уст}$$

Метод последовательных интервалов.

Разобьем промежуток времени, в течении которого рассматривается процесс, на достаточно большое число малых и равных друг другу интервалов Δt . Для оценки выбора величины Δt можно подсчитать по известным конечным значениям ψ_0 и I_0 постоянную времени $\tau_0' = L_0' / r = \psi_0 / (I_0 r)$, которая характеризовала бы процесс при $L=L_0=const$.

Пусть k -порядковый номер интервала. Будем приписывать всем величинам индекс k соответственно их значению в конце k -го интервала. Тогда их значения в конце k -го интервала, равные их значениям в конце предыдущего интервала, будут иметь индексы $k-1$. Дифференциальное уравнение цепи

$$\Delta\psi / \Delta t = U - ri$$

Приближенно запишем в виде

$$(\Delta\psi_k) = \psi_k - \psi_{k-1} \approx (U - ri) \Delta t$$

В начале первого интервала $k=1$ при $t=0$ имеем $\psi_{k-1} = \psi_0 = 0 \quad i_{k-1} = i_0 = 0$

Следовательно, следовательно для первого интервала $(\Delta\psi)_1 = \psi_1 = U \Delta t$

Ток i , получаем из кривой намагничивания. Приращение потокосцепления во втором интервале равно: $(\Delta\psi_2) = \psi_2 - \psi_1 = (U - ri_1) \Delta t$

Отсюда находим $\psi_2 = \psi_1 + (\Delta\psi_2)$ и по нему из графика ток i_2 и т.д. Момент времени t_k к концу интервала равен $k\Delta t$. Результаты расчетов сводятся в таблицу

k	t_k	$U - ri_{k-1}$	$(\Delta\psi)_k$	ψ_k	i_k

Метод последовательных интервалов в принципиальном отношении должен обеспечить тем большую точность, чем меньше выбрать интервалы Δt . Однако при этом увеличивается количество вычислений, каждое из которых производится с определенной точностью. Может оказаться, что ошибки будут наращиваться, т.к. ошибка допущенная при вычислении величины в каком-нибудь интервале, отражается на значениях этих величин во всех последующих интервалах.

Метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля).

Для расчета переходных процессов применяется метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля)

Пусть уравнение цепи:

$$d^2x/dt^2 + f(x)(dx/dt) + \omega_0^2 x = A \sin \omega t \quad (1)$$

Пусть известно, что под действием термодинамической силы с частотой ω в ней устанавливаются вынужденные колебания с частотой ω_1 , а высшие гармоники выражены слабо.

Примем, что $X = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ (2), где a и b – медленно меняющиеся во времени амплитуды искомого колебания.

Медленность изменения a и b во времени определяется тем, времени определяется тем, что произведения от них по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с произведениями ωa и ωb , т.е.

$$da/dt \ll \omega a \text{ и } db/dt \ll \omega b \quad (3)$$

Если это учесть, то вместо того чтобы взять $dx/dt = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t + \sin \omega t (da/dt) + \cos \omega t (db/dt)$ (4) можно в первом приближении принять

$$dx/dt \cong a\omega \cos \omega t + b\omega \sin \omega t \quad (5)$$

Аналогично, вместо того чтобы вторую производную брать в таком виде:

$$d^2x/dt^2 \approx -\omega^2 a \sin \omega t - \omega^2 b \cos \omega t + \omega \cos \omega t (da/dt) - \omega \sin \omega t (db/dt) + (d^2a/dt^2) \sin \omega t + (d^2b/dt^2) \cos \omega t + \omega \cos \omega t (da/dt) - \omega \sin \omega t (db/dt)$$

пренебрежем в ней слагаемые второго порядка малости и оставим слагаемые первого порядка малости. Получим

$$d^2x/dt^2 \approx -(\omega^2 a + 2\omega (db/dt)) \sin \omega t + (-\omega^2 b + 2\omega (da/dt)) \cos \omega t$$

Далее в функцию $f(x)$ вместо x подставим (2) и разложим $f(x)$ в ряды Фурье. Затем умножим ряд Фурье, которым выразилась $f(x)$, на dx/dt

При этом учтем, что уравнение (1) составлено для цепи с относительно малыми потерями, поэтому амплитуда второго слагаемого левой части этого уравнения мала по сравнению с амплитудой первого третьего слагаемых этого уравнения. Если это учесть, то слагаемыми первого порядка малости, содержащими da/dt и db/dt от члена $f(x)(dx/dt)$ можно пренебречь. Получим

$$f(x)(dx/dt) = F_0(a,b) + F_1(a,b) \sin \omega t + F_2(a,b) \cos \omega t + F_3(a,b) \sin 2\omega t + F_4(a,b) \cos 2\omega t + \dots \quad (7)$$

Так как расчет ведется по первой гармонике, то постоянной составляющей $F_0(a,b)$ и высшими гармониками ряда Фурье (т.е. $F_3(a,b)$, $F_4(a,b)$..) в дальнейшем пренебрежем. В уравнение (1) подставим вместо dx^2/dt^2 правую часть, вместо $f(x)(dx/dt)$ подставим $F_1(a,b) \sin \omega t + F_2(a,b) \cos \omega t$

и вместо $\omega_0^2 x$ подставим $\omega_0^2 (a \sin \omega t + b \cos \omega t)$

Тогда уравнение (1) разобьётся на 2 уравнения. Одно из них – уравнение (8) будет выражать равенство коэффициентов при $\sin\omega t$ в левой и правой частях уравнения(1), другое –уравнение (9) равенство коэффициентов при $\cos\omega t$ в левой и правой частях уравнения (1) :

$$- 2\omega(db/dt) + F_1(a,b) + a (\omega^2_0 - \omega^2) = A \quad (8)$$

$$2\omega(da/dt) + F_2(a,b) + b (\omega^2_0 - \omega^2) = 0 \quad (9)$$

Система уравнений (8) и(9) представляет собой два совместных дифференциальных уравнения, составленных относительно мгновенных значений медленно меняющихся амплитуд a и b .

Огибающий колебаний определяется уравнением

$$f(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$$

В общем случае систему (8) и (9) можно решить методами численного интегрирования.

В частном случае $A = 0$, $\omega = \omega_0$. В этом случае $b=0$ $F_1(a,b)=0$ и система сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка

$$da/dt = - (F_2(a)/2\omega \quad (b = 0)) \quad (10)$$

Метод применим к более сложным уравнениям, например, к уравнениям третьего, четвертого и более высоких порядков.

Идея, положенная в основу метода медленно меняющихся амплитуд, с успехом может быть использована и в том случае, если расчет проводится с учетом не только первой, но и одной или нескольких высших, или низших гармоник. Например, если расчет проводится с учетом гармоник частот ω и ω_1 , то решение берут в такой форме:

$$X=a(t)\sin \omega t + b(t) \cos\omega t +c(t) \sin\omega t +g(t) \cos\omega_1 t$$

После подстановки этого решения в исходное уравнение будет получена система четырех уравнений, относительно

$$da(t) / dt, db(t) / dt, dc(t) / dt, dg(t) / dt.$$

Значащие слова:

1. Метод основанный на графическом подсчёте определённого интеграла – применим к нелинейным электрическим цепям описываемых дифференциальными уравнениями 1 порядка, допускающими разделение переменных.
2. Метод интегрируемой нелинейной аппроксимации – метод, основанный на аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления и даёт возможность проинтегрировать уравнение в известных функциях.
3. Метод кусочно-линейной аппроксимации - метод, основанный на замене характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых.
4. Метод расчёта, основанный на замене определённого интеграла приближенной суммой – графоаналитический метод (метод Волюнкина) расчёта переходных процессов в нелинейных цепях.
5. Метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля) – метод основанный на расчёте по медленно меняющимся составляющим токов, напряжений, индукции, зарядов.

Вопросы для самопроверки:

1. Как определяется ток и потокосцепление в зависимости от времени при включении катушки с ферромагнитным сердечником? Дать точное аналитическое выражение.
2. Рассказать о методе расчёта переходных процессов в нелинейной цепи, основанный на условной линеаризации уравнения.
3. В чём заключается метод графического интегрирования для расчёта переходных процессов в нелинейной цепи?

4. Как рассчитывается переходной процесс в нелинейной цепи методом кусочной линеаризации?
5. В чём заключается метод последовательных интервалов для расчёта переходных процессов в нелинейной цепи?
6. Расчёт переходных процессов в нелинейной цепи по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений и расчёт по медленно меняющимся составляющим токов, напряжений, индукций.