Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей

Павлодар

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова

Энергетический факультет

Кафедра автоматизации и управления

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей

Павлодар
Кереку
2009

УДК 681.5(07)
ББК 32.965я7
Б83

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом энергетического факультета Павлодарского государственного университета им. С. Торайгырова

Рецензент
В.Ф. Хацевский – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматизации и управления ПГУ.

Составитель В.А. Бороденко

Б83 Сборник задач по теории автоматического управления : учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей / сост. В.А. Бороденко. – Павлодар : Кереку, 2009. – 112 с.

В учебно-методическом пособии на большом количестве примеров рассматриваются методы решения задач по теории автоматического управления, даны задания для самостоятельной проработки.

Учебно-методическое пособие рекомендуется студентам всех форм обучения технических специальностей вузов.

УДК 681.5(07)
ББК 32.965я7

© Бороденко В.А., 2009
© ПГУ им. С. Торайгырова, 2009

За достоверность материалов, грамматические и орфографические ошибки ответственность несут авторы и составители

Введение

При изучении теории автоматического управления (ТАУ) важно уже в начальной части курса сформировать умения математического описания линейных объектов и систем управления, преобразования математических моделей. Этому в значительной степени должны содействовать практические и лабораторные занятия.

В ходе дальнейшего изучения дисциплины специалист должен получить глубокую подготовку по общетеоретическим основам автоматического регулирования и управления и прочные практические навыки выполнения расчетных работ по созданию автоматических систем, уметь:

- применять математические методы для анализа общих свойств линейных систем, на этой основе владеть методами анализа и синтеза линейных систем автоматического управления;
- выполнять расчетные работы по анализу устойчивости и качества систем, синтезу параметров и корректирующих звеньев по заданным требованиям к качеству функционирования систем.

Последовательность заданий и теоретическая база пособия в основном соответствуют книге Бороденко В.А. «Практический курс теории линейных систем автоматического регулирования» [1]. Учитывая, что обучающийся обязательно должен ознакомиться с этим пособием, теоретические выкладки, формулы и определения приводятся в задачнике в минимальном объеме, лишь как краткое указание области, к которой относится решаемая задача. Будет полезным знакомство и с другими сборниками задач по теории автоматического регулирования [2-7]. Типовые полиномы в приложении Г рассмотрены по [8].

Рекомендуемая точность расчетов – три знака после запятой. Поскольку предполагается использование задачника и при заочной форме обучения, для некоторых задач даны ответы.

1 Одномерные линейные непрерывные системы

1.1 Передаточная функция

1.1.1 Структурные преобразования

Как правило, по структурной схеме при известных функциях передачи отдельных звеньев требуется найти эквивалентную передаточную функцию (ПФ) некоторого объединения звеньев (объекта, регулятора), либо всей системы в целом. Для этого используют правила преобразования последовательного, параллельного и встречно-параллельного (с обратной связью) соединений.

Эквивалентная передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев. Считают, что перестановка последовательно включенных по пути сигнала звеньев не влияет на результат, т. е. $W_1 W_2 = W_2 W_1$.

Эквивалентная передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций этих звеньев (с учетом знака входа сумматора на пути сигнала).

Путь от входа к выходу системы называется прямой связью, от выхода ко входу – обратной связью. Если сигнал на пути меняет знак (обычно на инвертирующем входе сумматора), обратная связь называется отрицательной (ООС), если не меняет знак – положительной (ПОС). Замкнутый путь называется контуром, например, замкнутый контур обратной связи (ЗКОС). Эквивалентная передаточная функция соединения с обратной связью равна дроби, в числителе которой записана ПФ звена на прямом пути, а в знаменателе – единица минус произведение ПФ звеньев по замкнутому контуру обратной связи. Величина $\Delta_{1n} = 1 \mp \prod_{i=1}^{n} W_i$ называется определителем ЗКОС.

Особенности этого вида соединения звеньев:

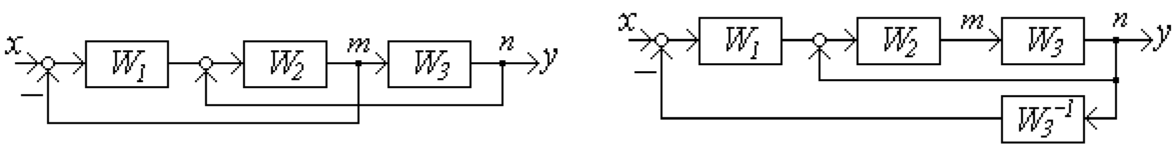
- если в системе есть хоть одна обратная связь, передаточная функция системы будет всегда представлять собой дробь;
- знак перед произведением ПФ звеньев в знаменателе (в определителе ЗКОС) обычно противоположен знаку обратной связи.

Для систем с перекрещивающимися (мостиковыми) связями применяют правило переноса: в переносимую ветвь вводят фиктивное звено с передаточной функцией, равной ПФ потерянного, либо обратной ПФ появившегося при переносе элемента.

По Мейсону структурная схема может быть описана целиком, без деления на звенья. Передаточная функция многоконтурной системы образует дробь, числитель которой равен сумме произведений передаточных функций прямых путей на совокупные определители

ЗКОС, не касающихся этих путей, а знаменатель – единица минус сумма произведений определителей несоприкасающихся ЗКОС и передаточных функций общих ЗКОС. Следует внимательно относиться к ветвям, которые заходят извне в контур ОС, т.к. они могут образовывать неявные прямые пути по цепям обратных связей.

Пример 1. Определить передаточную функцию схемы (рисунок 1.1, а).



а б

Рисунок 1.1

Видно, что без преобразований нельзя начинать сворачивать схему, в частности, нельзя объединить звенья W_2 и W_3, как последовательно включенные, из-за связи в точке m. Перенесем ветвь из узла m в узел n (рисунок 1.1, б).

В исходной схеме на пути от точки m к входному сумматору не было звеньев, преобразующих сигнал, а в новой схеме на пути между теми же точками появляется звено с передаточной функцией W_3. Следовательно, в цепь переносимого воздействия нужно ввести фиктивное звено с обратной передаточной функцией, т. е. $1/W_3$ или W_3^{-1}.

После переноса начнем свертывание схемы, заменяя каждый раз несколько звеньев одним эквивалентным на основе правил 1-3 и увеличивая границы преобразуемого участка. Промежуточные (вспомогательные) ПФ обычно индексируют римскими цифрами, их используют временно и обязательно заменяют в итоге на ПФ с реально существующими индексами.

$$W^{I} = W_2 W_3; \qquad W^{II} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3};$$

$$W = \frac{\dfrac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3}}{1 + \dfrac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3} \cdot \dfrac{1}{W_3}} = \frac{\dfrac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3}}{\dfrac{1 - W_2 W_3 + W_1 W_2}{1 - W_2 W_3}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3 + W_1 W_2}.$$

Конечный результат всегда представляется в виде простой рациональной дроби и выражается только через исходные передаточные функции. Сигнал не может пройти через одну и ту же точку дважды, поэтому появление в выражении кратных величин вида $2W_i$ или W_i^2 и т. п. является признаком допущенной при преобразованиях ошибки.

Пример 2. Определить передаточную функцию схемы (рисунок 1.2).

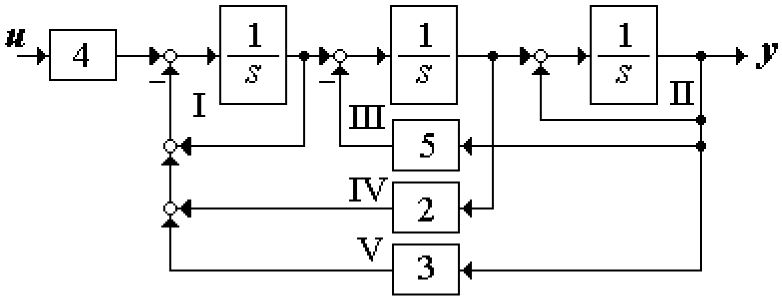


Рисунок 1.2

Применим правило Мейсона. В системе имеются обратные связи, поэтому ПФ представляет собой дробь. Прямой путь от входа u к выходу y только один, его касаются все пять ЗКОС, поэтому в числителе ПФ пишем просто произведение $4/s^3$. Знаменатель начинаем описывать с несоприкасающихся контуров – контур I не имеет общих точек с контуром III и вложенным в него контуром II, поэтому записываем сначала произведение их определителей. Контур IV соприкасается с контурами I и III, поэтому просто добавляем произведение звеньев по нему $2/s^2$, но умножаем его на определитель контура II, так как этот ЗКОС не имеет общих точек с IV. И в конце просто добавляем произведение звеньев $3/s^3$ контура V, поскольку он соприкасается со всеми остальными ЗКОС

$$W_{yu}(s) = \frac{\frac{4}{s^3}}{\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}\right)+\frac{2\left(1-\frac{1}{s}\right)}{s^2}+\frac{3}{s^3}} = \frac{4}{(s+1)(s^2-s+5)+2s-2+3} = \frac{4}{s^3+6s+6}$$

Задания для самостоятельного решения.

1.1.1.1 Найти эквивалентные передаточные функции схем (рисунок 1.3).

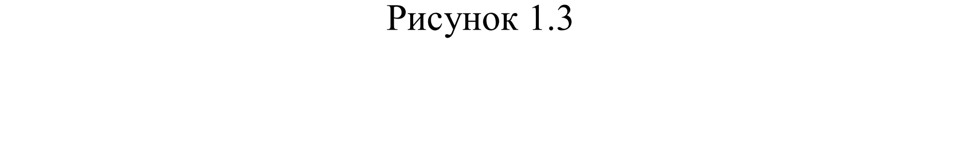


Рисунок 1.3

1.1.1.2 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 1.4).

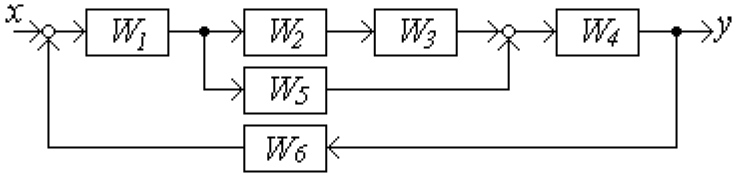


Рисунок 1.4

1.1.1.3 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 1.5).

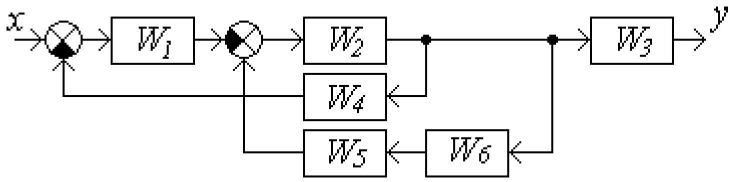


Рисунок 1.5

1.1.1.4 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 1.6).

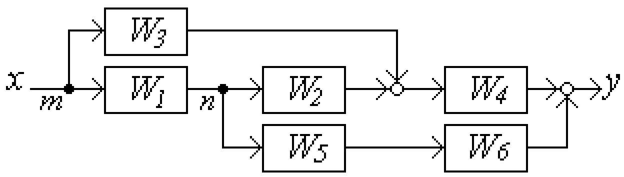


Рисунок 1.6

1.1.1.5 Записать в общем виде главную передаточную функцию системы (рисунок 1.7)

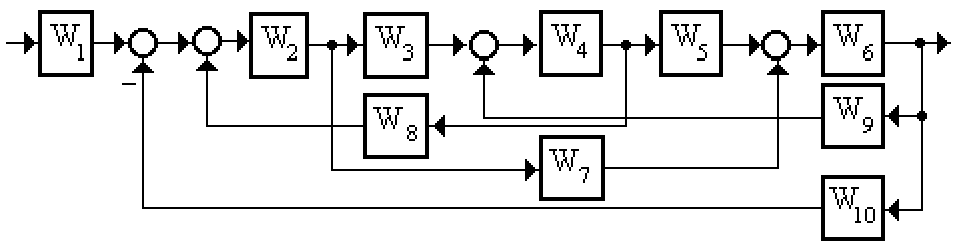


Рисунок 1.7

1.1.1.6 Найти $W_{uf}(s)$ для системы со структурной схемой (рисунок 1.8)

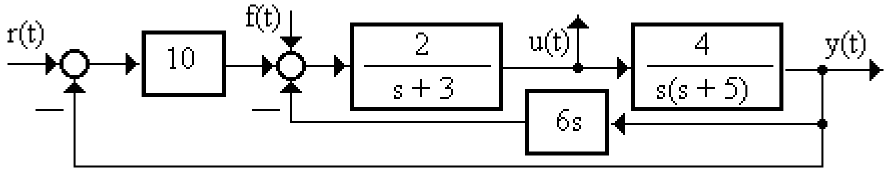


Рисунок 1.8

1.1.1.7 Определить передаточную функцию схемы (рисунок 1.9)

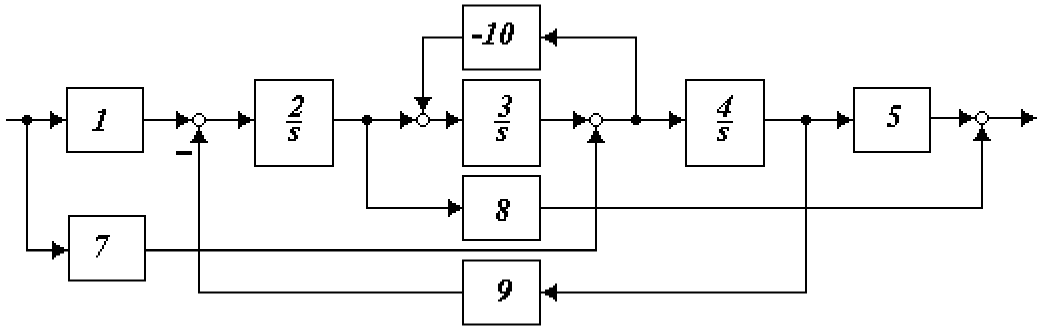


Рисунок 1.9

1.1.2 Дифференциальное уравнение

Поведение линейных, непрерывных, стационарных систем с сосредоточенными параметрами описывается во времени обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) с постоянными коэффициентами a_i, b_j

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m x(t),$$

где слева – выходная функция $y(t)$ и ее производные (результат), справа – входная функция $x(t)$ и ее производные.

Для записи передаточной функции используется комплексная переменная Лапласа $s = \sigma + j\omega = \alpha + j\beta$ (иногда обозначаемая символом p). Чтобы получить ПФ, достаточно в ОДУ заменить производные d/dt на s в соответствующей степени, отбросить символы функций $x(t)$ и $y(t)$ и разделить многочлен правой части дифференциального уравнения на многочлен левой части.

При нулевых начальных условиях передаточная функция может быть получена и как отношение реакции (выходного сигнала) системы к входному сигналу, записанных в виде изображений по Лапласу.

Она может быть записана триадой: корни многочлена числителя (нули), корни многочлена знаменателя (полюса) и общий коэффициент усиления. На комплексной плоскости нули обозначают кружком, полюса – крестиком; общий коэффициент усиления отобразить невозможно и он должен указываться отдельно.

При переходе от разомкнутой системы к замкнутой, охваченной общей единичной отрицательной обратной связью (ООС), достаточно к знаменателю ПФ разомкнутой системы добавить ее числитель, чтобы получить ПФ замкнутой системы.

Пример 1. Определить передаточную функцию объекта регулирования, модель которого задана дифференциальным уравнением

$$1.1\dddot{y} + 2.2\ddot{y} + 3.1\dot{y} + 4.2y = 1.34\ddot{x} - x\,.$$

Сопоставляя производным соответствующую степень s, отбрасывая символы функций x и y и деля многочлен правой части дифференциального уравнения на многочлен левой части, получаем ПФ

$$W_{yx}(s) = \frac{1.34s^2 - 1}{1.1s^3 + 2.2s^2 + 3.1s + 4.2}\,.$$

Пример 2. При единичном скачке $1(t)$ на входе реакция звена описывается функцией $2(1 - e^{-3t})\times1(t)$. Найти передаточную функцию звена.

Преобразуем по Лапласу входной и выходной сигналы, пользуясь таблицей соответствия оригиналов и изображений (приложение А). Изображение входного воздействия равно $X(s) = 1/s$, изображение реакции звена после приведения к общему знаменателю

$$Y(s) = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right) = \frac{2\left(s+3-s\right)}{s(s+3)} = \frac{6}{s(s+3)}\,.$$

Здесь единичный скачок не учитываем, хотя он и имеется в исходной функции, так как это просто указание на то, что сигнал на выходе появился скачком. Такое указание может и отсутствовать.

Делим изображение реакции на изображение входного воздействия и получаем передаточную функцию звена

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{6}{s(s+3)}}{\dfrac{1}{s}} = \frac{6}{s+3}\,.$$

Пример 3. Система имеет нуль -3, комплексные сопряженные полюса -2 ± j и коэффициент усиления k = 5. Определить ПФ системы после её замыкания единичной ООС.

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = 5\frac{s+3}{(s+2)^2+1^2} = \frac{5s+15}{s^2+4s+5}.$$

Добавляя к знаменателю числитель, получаем ПФ замкнутой системы

$$W(s) = \frac{5s+15}{s^2+4s+5+5s+15} = \frac{5s+15}{s^2+9s+20}.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.1.2.1 Записать передаточную функцию, если объект регулирования описывается дифференциальным уравнением

$$3\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y = \frac{du}{dt}-4u.$$

1.1.2.2 Записать передаточную функцию системы с картой нулей-полюсов (рисунок 1.10) и общим коэффициентом передачи k = 1,2 (кратных корней нет).

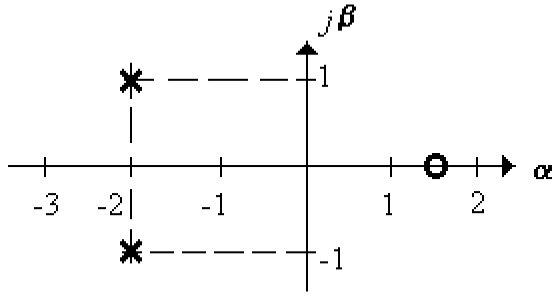


Рисунок 1.10

1.1.2.3 Представить нулями и полюсами систему с ПФ

$$W(s) = \frac{4s-2}{3s^2+6s+6}.$$

1.1.2.4 Представить систему (рисунок 1.11) нулями-полюсами

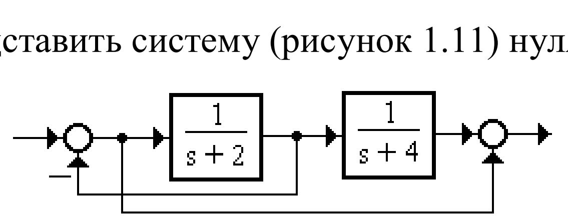


Рисунок 1.11

1.1.2.5 Входному воздействию $r(t)$ = $2te^{-t}$ соответствует отклик системы регулирования $y(t)$ = 6e^{-t}t − 6e^{-t}sin$t$. Определить передаточную функцию системы.

1.1.3 Принципиальная схема

Если анализируется принципиальная электрическая схема, передаточная функция составляется с учетом известных закономерностей работы таких схем. Для индуктивных элементов (катушек, дросселей) операторное реактивное сопротивление равно $X_L = L \times s$, для емкостных элементов $X_C = 1/(C \times s)$, где L – индуктивность (Генри), C – емкость (Фарад), s – комплексная переменная Лапласа.

В схемах с операционными усилителями (ОУ) учитывают, что инвертирующий вход изменяет знак (полярность) проходящего сигнала. Коэффициент усиления каскада на ОУ равен отношению эквивалентного сопротивления в цепи обратной связи к эквивалентному сопротивлению на входе усилителя.

По передаточной функции объекта можно записать дифференциальное уравнение, предполагая, что сокращение одинаковых нулей и полюсов не производилось. По изображению некоторого сигнала можно записать его оригинал.

Пример 1. Определить передаточную функцию схемы (рисунок 1.12).

Схема представляет собой делитель напряжения с коэффициентом $(R + X_C)/(X_L + R + X_C)$, поэтому передаточная функция равна

$$W(s) = \frac{R + X_C}{X_L + R + X_C} = \frac{R + \frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{RCs + 1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

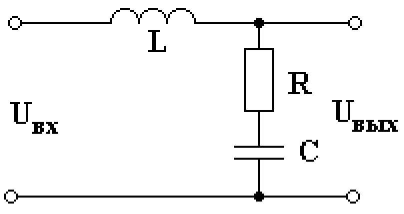


Рисунок 1.12

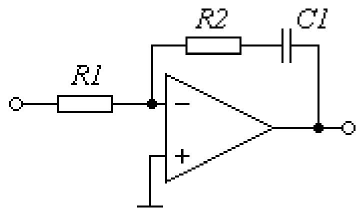


Рисунок 1.13

Пример 2. Определить передаточную функцию схемы (рисунок 1.13). Эквивалентное операторное сопротивление в цепи отрицательной обратной связи равно сумме

$$X_{OC} = R_2 + \frac{1}{X_C} = R_2 + \frac{1}{Cs} = \frac{R_2 Cs + 1}{Cs},$$

в итоге передаточная функция схемы на инвертирующем операционном усилителе будет равна

$$W(s) = -\frac{X_{OC}}{X_{BX}} = -\frac{\dfrac{R_2Cs+1}{Cs}}{R_1} = -\frac{R_2Cs+1}{R_1Cs} = -\frac{T_2s+1}{T_1s}.$$

Пример 3. Составить структурную схему по дифференциальному уравнению объекта $2y^{(3)} - 4y^{(2)} + 3y^{(1)} + 5y = 2u^{(2)} - 3u^{(1)} + u$. Прежде всего уравнение нормируют (делят все коэффициенты на коэффициент a_0 при старшей производной левой части), получим

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 1{,}5y^{(1)} + 2{,}5y = u^{(2)} - 1{,}5u^{(1)} + 0{,}5u.$$

Затем составляют структурную схему, используя блоки интегрирования (т.е. деления на переменную Лапласа s), их число равно порядку системы n (в данном случае трём). С выхода каждого интегратора организуют обратные связи к общему (входному) сумматору с инвертирующим входом, начиная с коэффициента a_1 при n-1 производной. С выхода интеграторов организуют связи с коэффициентами из правой части ОДУ к выходному сумматору объекта (если производные здесь отсутствуют, то выходной сумматор не нужен, а блок с коэффициентом b можно поместить и на выходе, и на входе системы, до главного сумматора). Полученная схема показана на рисунке 1.14.

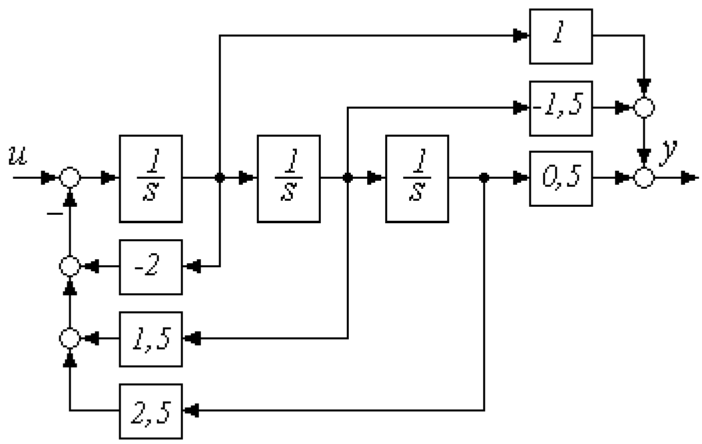


Рисунок 1.14

Пример 4 Определить порядок объекта, записать его дифференциальное уравнение по передаточной функции

$$W_{yu}(s) = \frac{2s^2+3s+1}{2s^3+4s^2+3s+5}.$$

Порядок объекта равен трем. Обозначив в соответствии с индексами передаточной функции выходную величину *y(t)*, входную величину *u(t)*, заменяем комплексную переменную Лапласа производной по времени соответствующего порядка

$$2y^{(3)} + 4y^{(2)} + 3y^{(1)} + 5y = 2u^{(2)} + 3u^{(1)} + u\ .$$

Задания для самостоятельного решения.

1.1.3.1 Найти $k_{\text{уст}}$ схемы (рисунок 1.15), если сопротивления резисторов равны 1 кОм, а емкость конденсатора 0,1 мкФ.

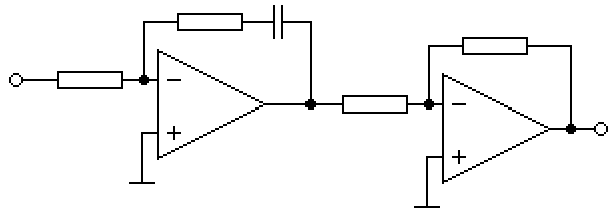


Рисунок 1.15

1.1.3.2 Составить структурную схему системы с ПФ

$$W_{yr}(s) = \left(\frac{1}{s} + 3\right)\frac{2}{s+2} - \frac{4}{s+1}\ .$$

1.1.3.3 Определить передаточную функцию (рисунок 1.16)

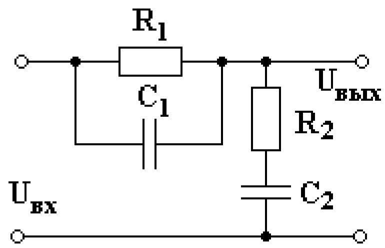


Рисунок 1.16

1.1.3.4 Записать дифференциальное уравнение (рисунок 1.17).

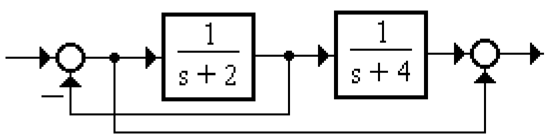


Рисунок 1.17

1.1.3.5 Система имеет коэффициент усиления k = 1,25, нуль -5, комплексные сопряженные полюса -1 ± j2, действительный полюс -1. Записать дифференциальное уравнение.

1.1.3.6 Составить структурную схему для системы с ОДУ

$$y'' + 2y' + 2,4y = 1,11r .$$

1.2 Временные характеристики

1.2.1 Реакция на произвольное воздействие

Для решения дифференциального уравнения (нахождения реакции системы) с помощью преобразования Лапласа необходимо:
- найти корни характеристического уравнения $D(s) = a_0 s^n + ... + a_n = 0$;
- найти изображение реакции умножением ПФ на изображение входа по Лапласу $Y(s) = W(s) \times X(s)$ и записать его в виде суммы простых дробей по теореме разложения в соответствии с корнями характеристического уравнения;
- найти коэффициенты числителей дробей (вычеты в полюсах);
- найти оригинал для каждой дроби по таблице соответствия и записать конечное решение в виде суммы отдельных оригиналов.

Рекомендуется:

а) перед вычислением корней обязательно нормировать ПФ по старшему коэффициенту при s^n знаменателя;

б) не сокращать существующие нули и полюса с положительной действительной частью, ведущие к неустойчивости системы, если их части не являются целыми числами; остальные нули и полюса могут быть сокращены перед переходом во временную область;

в) для кратных полюсов записывать дробями все степени корня от наибольшей до первой в порядке их убывания;

г) комплексные сопряженные корни представлять одним общим квадратным трехчленом.

После разложения на простые дроби и вычисления вычетов полезно проверить правильность результата. Первое правило проверки – сумма дробей правой части должна быть равна изображению в левой части равенства. Второе правило проверки – сумма всех составляющих оригинала при $t = 0$ (начальное значение оригинала) в соответствии со свойствами преобразования Лапласа должна быть равна $\lim\limits_{s \to \infty} Y(s) \cdot s$.

Пример 1. Используя преобразование Лапласа, найти оригинал реакции на воздействие e^{-2t} системы с ПФ $W(s) = 4e^{-s}/(s + 2)$. Находим изображение по Лапласу входного воздействия $X(s) = 1/(s + 2)$, умножаем его на передаточную функцию системы, получаем изображение реакции

$$Y(s) = \frac{4e^{-s}}{(s+2)^2}.$$

При переходе от изображения к оригиналу коэффициент 4 сохраняется, полюс -2 образует составляющую e^{-2t}, а поскольку он кратный (два одинаковых корня), то появляется составляющая t, и, наконец, оператор сдвига $e^{-s\tau}$ при $\tau = 1$ с создаёт запаздывание во времени, которое отображается скачком со сдвигом вида $1(t - \tau)$ или, в данном случае, $1(t - 1)$. Окончательно оригинал равен $y(t) = 4te^{-2t} \times 1(t - 1)$.

Пример 2. Найти начальное, конечное значения и аналитическую запись для оригинала, если изображение по Лапласу отклика системы равно $F(s) = 3/s/(s + 1)$.

Начальное значение оригинала (при $t = 0_+$) вычисляется как предел $\lim\limits_{t \to 0_+} x(t) = \lim\limits_{s \to \infty} s \cdot X(s)$, для производной по времени n-го порядка от функции $x(t)$ производится умножение изображения на s^{n+1}, т.е. $\lim\limits_{t \to 0_+} x^{(n)}(t) = \lim\limits_{s \to \infty} s^{n+1} \cdot X(s)$. Поэтому

$$F(s) = \frac{3}{s(s+1)}; \quad f(0_+) = \left.\frac{3 \cdot s}{s(s+1)}\right|_{s=\infty} = \left.\frac{3}{s+1}\right|_{s=\infty} = 0.$$

Конечное значение оригинала (при $t = \infty$) для устойчивых систем также вычисляется как предел $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \lim\limits_{s \to 0} s \cdot X(S)$

$$F(s) = \frac{3}{s(s+1)}; \quad f(\infty) = \left.\frac{3 \cdot s}{s(s+1)}\right|_{s=0} = \left.\frac{3}{s+1}\right|_{s=0} = 3.$$

Для полной записи оригинала разлагаем изображение на простые дроби в соответствии с полюсами, находим вычеты a и b в полюсах методом подстановки полюсов (приложение Б)

$$\frac{3}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} = \frac{3}{s} + \frac{-3}{s+1}.$$

По таблице соответствия оригиналов и изображений (приложение А) записываем оригинал в виде формулы $f(t) = 3 - 3e^{-t}$. Проверка: при $t = 0$ значение оригинала равно нулю, при $t = \infty$ соответственно 3.

Задания для самостоятельного решения.

1.2.1.1 Определить реакцию на воздействие $1(t)$ объекта с передаточной функцией

$$W(s)=\frac{20}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}.$$

1.2.1.2 Записать изображение реакции на воздействие $x(t) = t^2$, определить коэффициент передачи в установившемся режиме для объекта

$$100\frac{d^3y}{dt^3}+10\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+0{,}1y=50\frac{dx}{dt}+5x.$$

1.2.1.3 Система имеет коэффициент усиления $k = 5$, нуль –2 и полюса –1, –5 и –10. Определить реакцию на воздействие $r(t) = \delta(t)$.

1.2.1.4 Найти реакцию системы (рисунок 1.18) на единичный скачок при нулевых начальных условиях

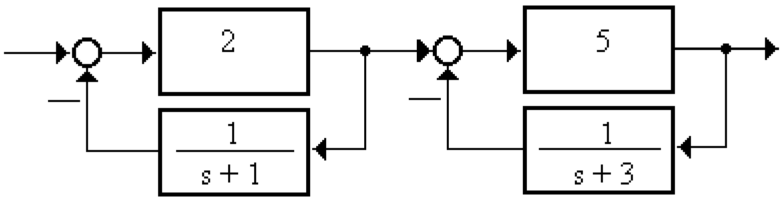


Рисунок 1.18

1.2.1.5 Найти с помощью преобразования Лапласа вынужденную составляющую переходного процесса от воздействия $x(t) = t$.

$$0{,}2y''+1{,}2y'+y=2x$$

1.2.2 Переходная и импульсная функции

К типовым функциям времени (реакциям системы) относятся переходная и импульсная переходная (весовая) функции.

Переходной функцией $h(t)$ называется реакция системы на единичный скачок при нулевых начальных условиях. Реакция на скачок произвольной величины называется кривой разгона.

Импульсной (весовой) функцией $g(t)$ или $w(t)$ называется реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях. Она является оригиналом передаточной функции.

Поскольку всегда $Y(s)=X(s)\cdot W(s)$, то

$$h(t)\div H(s)=L\{1(t)\}\cdot W(s)=\frac{1}{s}\cdot W(s)=W(s)/s,$$

$$g(t)\div G(s)=L\{\delta(t)\}\cdot W(s)=1\cdot W(s)=W(s).$$

Для оценки начального и конечного (установившегося) значений переходной характеристики объекта нужно найти отношение коэффициентов при s в степени n числителя и знаменателя ПФ в первом случае, и отношение свободных членов передаточной функции во втором (если объект устойчив).

Начальное значение: $h(0) = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{W(s)\cdot s}{s} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m < n \\ \dfrac{b_0}{a_0} & \text{при} \quad m = n \end{cases}$

Конечное значение: $h(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{W(s)\cdot s}{s} = \dfrac{b_m}{a_m} = k_{уст}$.

Связь между импульсной и переходной функциями определяется соотношением $G(s)=H(s)\cdot s$, откуда $g(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}$ и $h(t) = \int\limits_0^\infty g(t)dt$.

Иначе говоря, импульсная функция является производной по времени от переходной функции.

Пример 1. Для системы $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3 = 3\ddot{u} + 2\dot{u} + u$ найти $h(0)$ и $k_{уст}$.

Поскольку порядок многочлена числителя ПФ $m = 2$ равен порядку многочлена знаменателя $n = 2$, начальное значение переходной функции равно $h(0) = b_0/a_0 = 3/1 = 3$. Коэффициент усиления в установившемся режиме равен $k_{уст} = b_m/a_n = 1/3 = 0.333$.

Пример 2. Определить передаточную функцию объекта регулирования, если его весовая функция равна $g(t) = 3 + 2e^{-t} - e^{-4t}$.

По таблице соответствия А.1 находим изображение весовой функции (а это уже и есть передаточная функция объекта)

$$G(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+4}.$$

Приведя все дроби к общему знаменателю, получим ПФ в стандартном виде

$$W(s) = G(s) = \frac{4s^2 + 22s + 12}{s(s+1)(s+4)} = \frac{4s^2 + 22s + 12}{s^3 + 5s^2 + 4s}.$$

Пример 3. Найти весовую функцию системы, если переходная функция равна $h(t) = 4(1 - e^{-0,3t})$.

Весовая функция равна производной по времени от переходной

$$g(t) = 1{,}2e^{-0,3t}.$$

Другой путь решения – через преобразование Лапласа

$$H(s) = L\left\{4(1-e^{-0,3t})\right\} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+0,3} = \frac{4s+1,2-4s}{s(s+0,3)} = \frac{1,2}{s(s+0,3)},$$

убираем нулевой корень s в знаменателе, принадлежащий входному воздействию – скачку, получаем ПФ или изображение весовой функции $1,2/(s + 0,3)$, откуда весовая функция

$$g(t) = \mathrm{L}^{-1}\{1,2/(s + 0,3)\} = 1,2\mathrm{e}^{-0,3t}.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.2.2.1 Записать изображение весовой функции системы с $h(t) = 0,16 - 0,16e^{-5t} + 0,2t$.

1.2.2.2 Вычислить $h(t)$ системы (рисунок 1.19), если $k = 9$

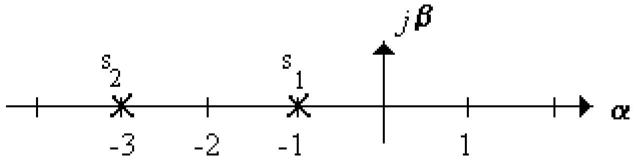


Рисунок 1.19

1.2.2.3 Весовая функция системы равна

$$g(t) = 0,02(e^{-0,5t} - e^{-0,2t}).$$

Записать изображение переходной функции.

1.2.2.4 Найти изображение весовой функции (рисунок 1.20)

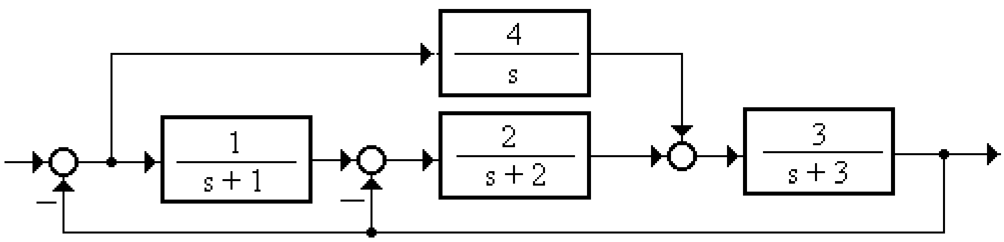


Рисунок 1.20

1.2.2.5 Записать $h(t)$ фильтра по выходу a (рисунок 1.21)

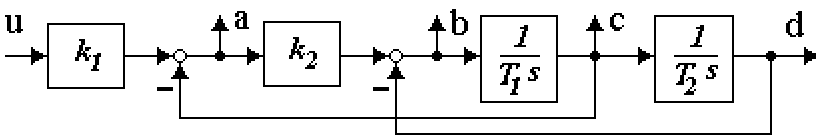


Рисунок 1.21

при значениях параметров $k_1 = 1$, $k_2 = 12$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0,1$.

1.2.2.6 Записать $g(t)$ фильтра (рисунок 1.21) по выходу c при тех же значениях параметров схемы.

1.2.2.7 Найти оригинал передаточной функции объекта (рисунок 1.22)

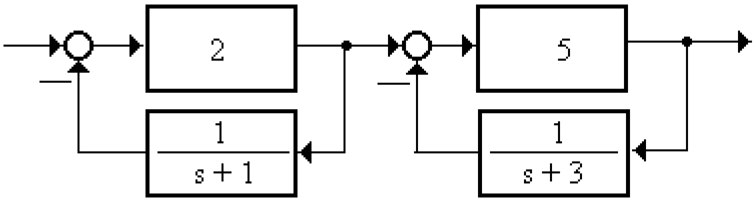


Рисунок 1.22

1.2.3 Свободное движение системы

В общем случае реакция системы состоит из вынужденной и свободной составляющих $y(t)=y_{вын}(t)+y_{св}(t)$, изображения которых имеют одинаковый знаменатель (характеристический полином системы)

$$Y(s)=Y_{вын}(s)+Y_{св}(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot U(s)+\frac{N_0(s)}{D(s)}.$$

Вынужденная составляющая $y_{вын}(t)$ является реакцией системы на входное воздействие при нулевых начальных условиях $y(0\_) = 0$. Свободная составляющая $y_{св}(t)$ или переходный процесс автономной системы является решением однородного дифференциального уравнения (без правой части) и определяется начальными условиями.

Используют два способа вычисления совокупного переходного процесса. В первом случае система обычно задается ОДУ, производят в соответствии со свойством дифференцирования преобразования Лапласа индивидуальное преобразование каждого члена дифференциального уравнения, вычисляются одновременно вынужденная и свободная составляющие.

По второму способу выполняют независимое вычисление вынужденной и/или свободной составляющих, при этом система обычно задана ПФ или структурной схемой. Для вычисления $N_0(s)$ по $D(s)$ используется формула (схожая, но не равная вычислению производной)

$$\begin{aligned}N_0(s)&=y(0)\cdot[a_0s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\ldots+a_{n-2}s+a_{n-1}]+\\&+y'(0)\cdot[a_0s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\ldots+a_{n-2}]+\ldots\\&+y^{(n-1)}(0)\cdot[a_0]\end{aligned}$$

Если рассчитывается полное движение системы с учетом ненулевых начальных условий, запрещается производить сокращения в левой части ОДУ (в характеристическом полиноме $D(s)$ системы). Вид характеристического полинома определяет свободную составляющую переходного процесса, т.е. реакцию на начальные условия.

Если начальные условия не заданы, то по умолчанию они считаются нулевыми. После получения результата стоит проверить, соответствует ли величина реакции на выходе при $t = 0$ заданным начальным условиям.

Пример 1. Для системы, заданной ОДУ $y'' + 3y' + 2y = 0$, найти реакцию на начальные условия $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$.

Преобразуем индивидуально каждый член ОДУ по Лапласу с учетом свойств дифференцирования оригинала при ненулевых начальных условиях

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 0.$$

Группируем и переносим подобные члены, подставляем значения $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = sy(0) + 3y(0) + y'(0),$$

$$Y_{св}(s) = \frac{sy(0) + 3y(0) + y'(0)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2}.$$

Находим корни характеристического уравнения $s_1 = -1$, $s_2 = -2$ по известной формуле

$$D(s) = s^2 + 3s + 2 = 0; \quad s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2};$$

записываем разложение на простые дроби, вычисляем вычеты в полюсах (смотри приложение Б), переходим к оригиналу по таблице А.1

$$\frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2},$$

$$y_{св}(t) = e^{-t} + e^{-2t}.$$

При $t = 0$ начальное значение $y(0) = 1 + 1 = 2$, как и было задано.

Пример 2. Система задана ОДУ $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 4u(t)$. Найти реакцию системы, если $u(t) = \delta(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Прежде всего находим изображение входного воздействия по

Лапласу $U(s) = L\{\delta(t)\} = 1$ из таблицы А.1. Вычисляем передаточную функцию и вынужденную составляющую переходного процесса

$$W(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 1} = \frac{4}{(s+1)^2},$$

$$Y_{вын}(s) = 1 \cdot \frac{4}{(s+1)^2} \Rightarrow y_{вын}(t) = 4te^{-t}.$$

Определяем по характеристическому полиному числитель $N_0(s)$ и свободную составляющую переходного процесса

$$N_0(s) = y(0)[1s + 2] + y'(0)[1] = s + 2 - 1 = s + 1,$$

$$Y_{св}(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow y_{св}(t) = e^{-t}.$$

Полное описание переходного процесса

$$y(t) = y_{вын}(t) + y_{св}(t) = 4te^{-t} + e^{-t} = (1 + 4t)e^{-t}.$$

Задания для самостоятельного решения.

1.2.3.1 Описать свободное движение системы (рисунок 1.23) при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

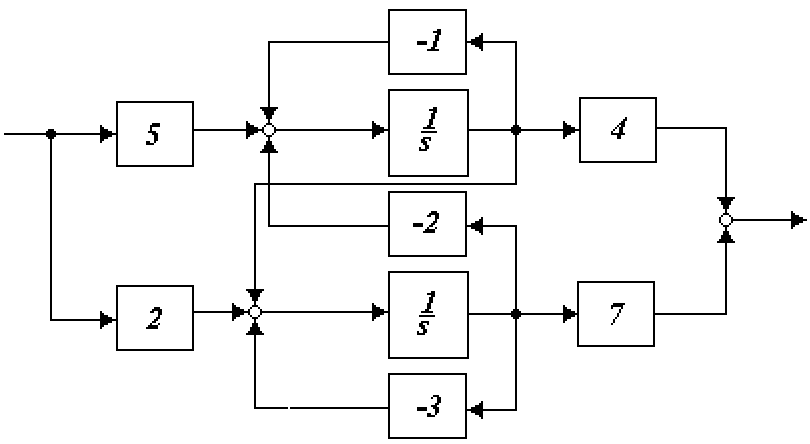


Рисунок 1.23

1.2.3.2 Решить с помощью преобразования Лапласа уравнение движения

$$0{,}1y'' + 0{,}7y' + y = x,$$

если $x(t) = 2 * 1(t); y(0) = 1; y'(0) = -2$.

1.2.3.3 Найти реакцию системы (полюса равны –1, –2 и –3) на начальные условия $y(0) = -1;\ \ y'(0) = 2;\ \ \ y''(0) = 0$.

$$W(s) = \frac{10s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6},$$

1.2.3.4 Найти реакцию по выходу y (рисунок 1.24) на начальные условия $y(0) = 0{,}5$, $y'(0) = 0{,}1$ при значениях параметров $k_1 = 1$, $k_2 = 1{,}2$, $T_1 = 3$, $T_2 = 0{,}3$.

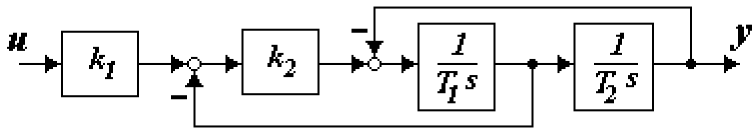


Рисунок 1.24

1.2.3.5 Исследовать движение автономной системы при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, если дано описание системы

$$2y'' + 10y' + 12y = 0.$$

1.2.3.6 Каковы начальные условия, если изображение свободной составляющей переходного процесса равно

$$Y_{св}(s) = \frac{3(s+1)}{s^2 + 3s + 2}.$$

1.3 Частотные характеристики

1.3.1 Основные частотные характеристики

Аналитическое выражение для комплексного коэффициента передачи *W(jω)* можно получить по операторной передаточной функции *W(s)*, приравняв в переменной Лапласа $s = \sigma + j\omega$ действительную часть σ нулю. Из комплексной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{Y(\omega,t)}{X(\omega,t)} = \frac{A_{вых}(\omega)\cdot\sin(\omega t + \varphi_{вых}(\omega))}{A_{вх}\cdot\sin(\omega t + \varphi_{вх})} = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega)$$

получают амплитудную (АЧХ) $A(\omega) = A_{вых}(\omega)/A_{вх}$, фазовую (ФЧХ) $\varphi(\omega) = \varphi_{вых}(\omega) - \varphi_{вх}$, действительную (ВЧХ) $P(\omega) = \mathrm{Re}W(j\omega)$ и мнимую (МЧХ) $Q(\omega) = \mathrm{Im}W(j\omega)$ частотные характеристики, связанные соотношениями

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)},\ \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)};$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = A(\omega)\cdot\cos\varphi(\omega),\qquad \mathrm{Im}(\omega) = A(\omega)\cdot\sin\varphi(\omega).$$

Если представить комплексный коэффициент передачи в виде дроби

$$W(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}=\frac{P_1(\omega)+jQ_1(\omega)}{P_1(\omega)+jQ_1(\omega)},$$

то амплитудная характеристика будет равна

$$A(\omega)=\frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}=\frac{\sqrt{P_1^2(\omega)+Q_1^2(\omega)}}{\sqrt{P_2^2(\omega)+Q_2^2(\omega)}},$$

а фазовая характеристика

$$\varphi(\omega)=\arg N(j\omega)-\arg D(j\omega)=arctg\frac{Q_1(\omega)}{P_1(\omega)}-arctg\frac{Q_2(\omega)}{P_2(\omega)}.$$

Обобщающей является амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ или просто АФХ) – кривая (годограф), которую чертит на комплексной плоскости конец вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$.

В ходе расчетов следует отбросить отрицательные, мнимые и комплексные частоты и по возможности сократить получающиеся выражения для действительной и мнимой частей на ω.

При построении частотных характеристик учитывают гладкость кривой (при разрывах годограф изменяется асимптотически), указывают на графике стрелкой направление увеличения частоты и/или крайние частоты. В каком бы порядке не были расположены частоты в таблице, построение кривой следует всегда производить по возрастанию значений частоты.

Быстрая проверка правильности расчетов:
- АФЧХ и АЧХ начинаются при значении $b_m/a_n = k_{уст}$;
- АФЧХ и АЧХ заканчиваются в нуле ($m<n$) или при b_0/a_0 (для $m= n$);
- АФЧХ устойчивой системы, не имеющей нулей, проходит по часовой стрелке столько квадрантов, каков порядок характеристического полинома.

Реакцию системы на гармоническое воздействие любой частоты ω в показательной форме получают путем умножения на A(ω) амплитуды входного сигнала и добавления φ(ω) к его фазе.

Пример 1. Построить частотные характеристики системы с ПФ $W(s) = 2/(s^2+5s+6)$.

Подставляем $s=j\omega$, учитывая, что $j=\sqrt{-1}$, снижаем порядок j ($j^2 = -1;\ j^3 = -j$ и т.п.), избавляемся от мнимости в знаменателе, умножая числитель и знаменатель дроби на комплексное выражение, сопряженное стоявшему в знаменателе, отделяем действительную и мнимую части, приводим в знаменателе подобные члены

$$W(j\omega)=\frac{2}{(j\omega)^2+j5\omega+6}=\frac{2}{6-\omega^2+j5\omega}=$$

$$=\frac{2\cdot(6-\omega^2-j5\omega)}{(6-\omega^2+j5\omega)\cdot(6-\omega^2-j5\omega)}=\frac{12-2\omega^2-j10\omega}{36-6\omega^2-6\omega^2+\omega^4+25\omega^2}=$$

$$=\frac{12-2\omega^2}{36+13\omega^2+\omega^4}+j\frac{-10\omega}{36+13\omega^2+\omega^4}=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega)\,.$$

В данном случае числители и знаменатели дробей (действительной и мнимой частей) на ω сократить нельзя. Составляем таблицу (таблица 1), используя обязательные значения частот (можно взять больше точек, но не меньше), и подставляем эти значения:

- крайние частоты 0 и +∞;
- частоты пересечения характеристик с осями (определяются путем приравнивания числителей дробей мнимой и действительной части к нулю и решения полученного уравнения);
- частоты разрыва характеристики (находят, приравнивая знаменатель нулю и решая уравнение) и близкие к ним (чуть больше-чуть меньше) частоты;
- прочие частоты для повышения точности расчета.

Таблица 1

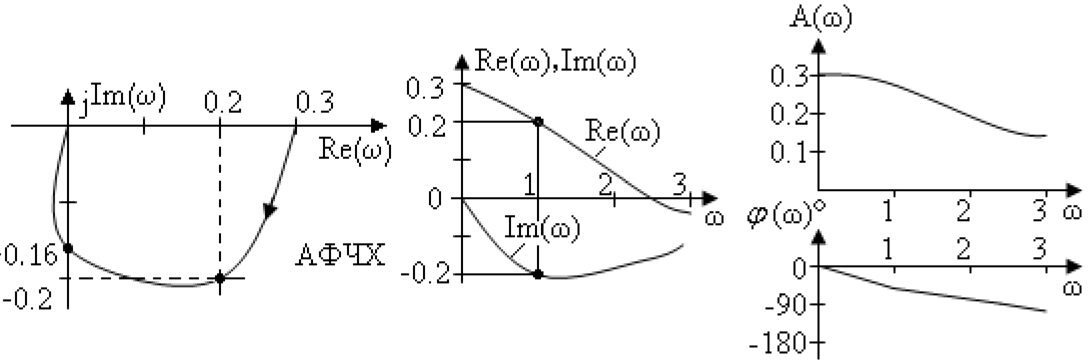
ω	Re(ω)	Im(ω)	A(ω)	φ(ω)
0	0,33	0	0,3	0
∞	0	0	0	~
2,45	0	-0,16	0,16	-90°
1,00	0,20	-0,20	0,28	-45°
3,00	-0,03	-0,14	0,14	-120°

Приравнивая Re(ω) = 0, получаем $6 - \omega^2 = 0$, откуда ω = 2,45.

Приравнивая Im(ω) = 0, получаем 10ω = 0, откуда ω = 0.

По виду биквадратного уравнения $36+13\omega^2+\omega^4=0$ определяем, что частот разрыва (действительных корней) нет. Частоты 1 и 3 рад/с добавлены произвольно для более точного построения графика.

По одной таблице можно построить АФЧХ на комплексной плоскости (рисунок 1.25, а), индивидуально ВЧХ и МЧХ (рисунок 1.25, б), и после дополнительных расчетов АЧХ и ФЧХ (рисунок 1.25, в).



а б в

Рисунок 1.25

Пример 2. Записать аналитически реакцию системы с известными АЧХ и ФЧХ (рисунок 1.26) на воздействие $x(t) = 3{,}5\sin(t)$.

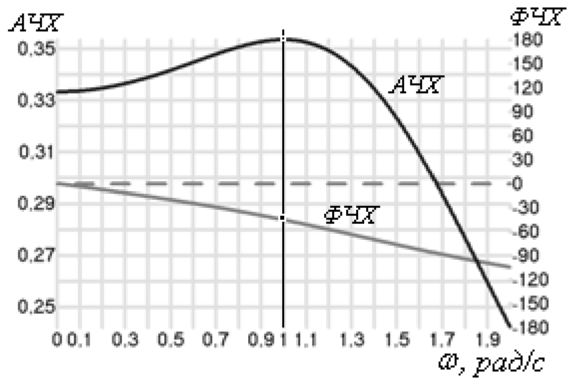


Рисунок 1.26

Общий вид гармонического сигнала $A\sin(\omega t + \varphi)$. Следовательно, входное воздействие характеризуется параметрами: амплитуда 3,5, фаза 0 рад, частота $\omega = 1$ рад/с. Находим для этой частоты по графику $A(\omega) = 0{,}36$; $\varphi(\omega) = -45° = -0{,}785$ рад.

Отсюда амплитуда выходной величины равна $3{,}5 \cdot 0{,}36 = 1{,}26$; фаза выходной величины $0 - 0.785$ рад и окончательный вид реакции $y(t) = 1{,}26\sin(t - 0{,}785)$.

Пример 3. При воздействии $x(t) = 2\sin 10t$ найти сигнал на выходе системы с передаточной функцией $W(s) = 4/(0{,}1s + 1)$.

Получаем по ПФ аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{0{,}01\omega^2 + 1}}; \qquad \varphi(\omega) = -arctg(0{,}1\omega).$$

Для известной частоты 10 рад/с значения АЧХ и ФЧХ равны $A(\omega = 10) = 4/\sqrt{2} = 2{,}828$; $\varphi(\omega = 10) = -\pi/4 = -0{,}785$. Выражение для выходного гармонического сигнала $y(t) = 5{,}656(\sin 10t - 0{,}785)$.

Задания для самостоятельного решения.

1.3.1.1 Построить АФЧХ звена (рисунок 1.27), если $k = 10$

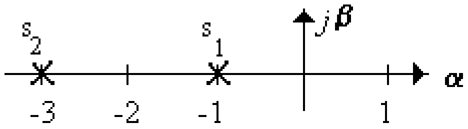


Рисунок 1.27

1.3.1.2 Записать формулы для вычисления АЧХ и ФЧХ системы (рисунок 1.28)

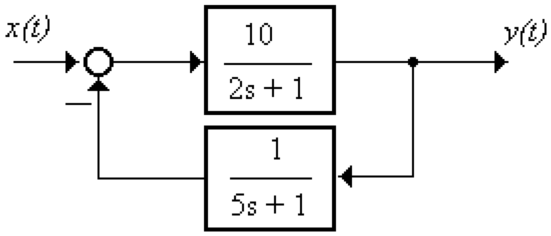


Рисунок 1.28

1.3.1.3 Записать формулы для вычисления АЧХ и ФЧХ системы (рисунок 1.29), если $W_1(s) = 10/(1 + 10s)$, $W_2(s) = 100/s$, $W_3(s) = 1$.

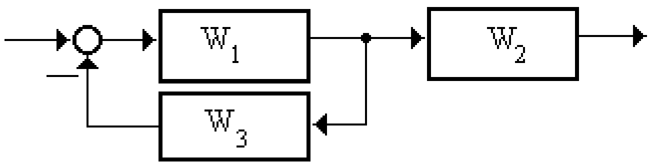


Рисунок 1.29

1.3.1.4 Записать дифференциальное уравнение движения для системы с комплексным коэффициентом передачи

$$W(s) = \frac{k(1 + jT_1\omega)}{j\omega(1 + jT_2\omega)(1 + jT_3\omega)}.$$

1.3.1.5 Построить АЧХ фильтра (рисунок 1.30) по выходу d

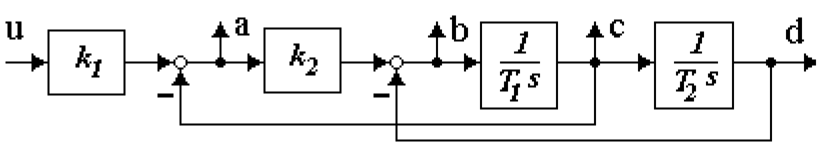


Рисунок 1.30

при значениях параметров $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $T_1 = 2$, $T_2 = 0{,}1$.

1.3.1.6 Описать формулой частотную реакцию *y(t)* на входное гармоническое воздействие *x(t)=3sint*, если передаточная функция фильтра равна

$$W(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 3}.$$

1.3.2 Логарифмические частотные характеристики

Зависимость L(ω)=20lg*A*(ω) от lg(ω) называется логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ) или ЛАХ. Зависимость φ(ω) от lg(ω) называется логарифмической фазной частотной характеристикой (ЛФЧХ) или просто ЛФХ. Частоту откладывают либо в логарифмах (в декадах), либо в радианах, но с учетом логарифмического масштаба. Декада соответствует изменению частоты в 10 раз, L(ω) откладывают в децибелах (дБ), φ(ω) в градусах.

Для упрощения при построении вручную действительную ЛАЧХ заменяют асимптотической, т.е. ломаной линией из прямых отрезков, имеющих стандартный наклон, кратный ±20дБ/дек.

Частоты пересечения отрезков ω_{ci} называются частотами сопряжения, они соответствуют корням ПФ. Частоты пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс ω_{cp} называются частотой среза, они соответствуют значению lg*A*(ω)=0 или *A*(ω)=1 (усиление или ослабление сигнала на частоте среза отсутствует). Для удобства построения через значения сопрягающих частот проводят на графике вертикальные линии, а на свободном поле графика – вспомогательные линии со стандартными наклонами *k*(-20) дБ/дек.

Частоты сопряжения находят по корням (постоянным времени *T*) простых дробей, на которые разбивают ПФ, или типовых звеньев, из которых состоит структурная схема системы регулирования.

Звено первого порядка (один действительный корень)

$$\frac{1}{Ts+1} \to \omega_c = \left|\frac{1}{T}\right| \text{ или } \frac{1}{s+\alpha} \to \omega_c = |\alpha|.$$

Звено второго порядка (комплексные сопряженные корни)

$$\frac{1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \to \omega_c = \left|\frac{1}{T}\right|,\ \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$$

или

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \to \omega_c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \xi = |\alpha| \cdot T = \frac{|\alpha|}{\omega_c},$$

где ξ – показатель затухания (коэффициент демпфирования), характеризует величину резонанса в звене. При ξ = 1 резонанс отсутствует, при ξ → 0 резонансный выброс h стремится к бесконечности. При значениях ξ < 0,6 асимптотическую ЛАЧХ корректируют на величину выброса h, определяемого по формуле $h = 20\lg\left(\frac{1}{2\xi}\right)\cdot\frac{l}{2}$, где l – число одинаковых корней (кратность корня), либо по типовым характеристикам (таблица 2) и графикам.

Таблица 2

ξ	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	1,00
h, дБ	20,00	14,00	10,30	8,00	6,50	5,00	3,00	1,50	-6,00

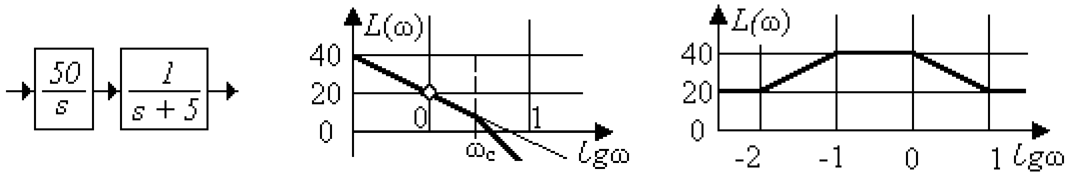
Левую (начальную) часть ЛАЧХ (низкочастотную или НЧ-асимптоту) или ее продолжение проводят через точку с координатами lgω=0 (ω = 1) и L(ω)=20lg$K$ слева направо с наклоном ν·(-20 дБ/дек) до первой (наименьшей) частоты сопряжения. Здесь $\nu = r - l$ это степень астатизма, r – число нулевых корней знаменателя, l – числителя; добротность K – отношение свободных членов полиномов числителя и знаменателя ПФ после удаления нулевых корней.

Двигаясь вправо, на каждой частоте сопряжения продолжают ЛАЧХ с отклонением от предыдущего направления: для корня числителя вверх (+20 дб/дек); для корня знаменателя вниз (–20 дБ/дек). Если кратность корня $l \neq 1$, наклон асимптоты изменяется в l раз. Общий наклон ЛАЧХ в конце равен $(n–m)$·(–20 дБ/дек). Выбросы при комплексных корнях откладывают вверх для корней знаменателя, вниз для корней числителя, близкие выбросы суммируются графически.

ЛФЧХ устойчивых систем строят по шаблону, неустойчивых – по вычисляемым точкам. Приближенно считают, что участку ЛАЧХ с наклоном ±20 дБ/дек соответствует фазовый сдвиг около ±90°, а участку с наклоном ±40 дБ/дек сдвиг на ±180°; действительному корню знаменателя соответствует угол наклона ЛФЧХ на сопрягающей частоте $\varphi = -\mathrm{arctg}(\omega T) = -45°$, комплексной паре $\varphi = -\mathrm{arctg}(\xi \cdot 2\omega T/(1-\omega^2 T^2))$.

У статических систем (степень астатизма ν = 0) НЧ-асимптота представляет собой прямую, параллельную оси частот, и значение K в децибелах равно расстоянию этой прямой от оси частот ω. У астатических систем находят частоту ω_k пересечения НЧ-асимптоты или её продолжения с осью частот, откуда $K = \omega_k^{\nu}$. Степень астатизма определяется по наклону НЧ-асимптоты относительно оси частот, частоты сопряжения находят по точкам пересечения асимптот – касательных, проведенных к линейным участкам реальной ЛАЧХ.

Пример 1. Построить ЛАЧХ системы, заданной структурной схемой (рисунок 1.31, а). Передаточная функция системы равна $W(s) = 50/[s(s + 5)]$.



а б в

Рисунок 1.31

Определяем параметры НЧ-асимптоты:
- порядок астатизма $\nu = 1 - 0 = 1$ (имеется один нулевой корень в знаменателе);
- добротность $K = 50/5 = 10$; $20\lg K = 20$.

Нули в системе отсутствуют, полюс -5 имеется, отсюда частота сопряжения $\omega_c = 5$ рад/с; lg5 = 0,7. Строим график ЛАЧХ толстой сплошной линией, проводя слева вниз прямую линию с наклоном 1×(-20 дБ/дек) через точку с координатами (20 дБ, 0) до первой частоты сопряжения (рисунок 1.31, б). Поскольку частота сопряжения соответствует полюсу, отклоняемся от текущего направления вниз на угол -20 дБ/дек, общий наклон ЛАЧХ в конце равен -40 дБ/дек. Корень действительный, поэтому резонанса нет, выбросы не учитываем.

Пример 2. Составить ПФ системы с заданной ЛАЧХ (рисунок 1.31, в), предполагая, что все корни имеют отрицательную действительную часть.

На частотах сопряжения $\omega_{c1} = 10^{-2} = 0.01$ и $\omega_{c4} = 10^{1} = 10$ наблюдается отклонение характеристики от предыдущего направления вверх на +20 дБ/дек, на частотах сопряжения $\omega_{c2} = 10^{-1} = 0.1$ и $\omega_{c3} = 10^{0} = 1$ – вниз на -20 дБ/дек, поэтому передаточная функция будет иметь вид

$$W(s) = \frac{(\frac{1}{\omega_{c1}}s+1)(\frac{1}{\omega_{c4}}s+1)}{(\frac{1}{\omega_{c2}}s+1)(\frac{1}{\omega_{c3}}s+1)} \cdot K = \frac{(\frac{1}{0,01}s+1)(\frac{1}{10}s+1)}{(\frac{1}{0,1}s+1)(\frac{1}{1}s+1)} \cdot K\ .$$

Поскольку $20\lg K = 20$ дБ, то $\lg K = 1$, $K = 10$ и окончательно

$$W(s) = \frac{(100s+1)(0,1s+1)}{(10s+1)(s+1)} \cdot 10 = \frac{10s^2+100,1s+1}{10s^2+11s+1} \cdot 10\ .$$

Задания для самостоятельного решения.

1.3.2.1 Найти частоты среза системы $\dfrac{100s}{(10s+1)(0{,}1s+1)}$.

1.3.2.2 Определить конечное значение ЛФЧХ (рисунок 1.32)

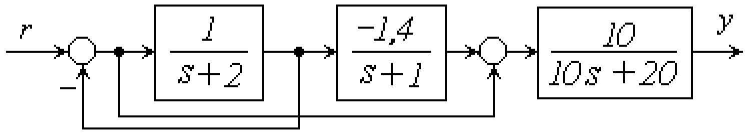


Рисунок 1.32

1.3.2.3 Построить ЛАЧХ системы

$$W(s)=\frac{2s^2}{(1+0{,}5s)^2(1+0{,}1s)}$$

1.3.2.4 Вычислить уклон высокочастотной части ЛАЧХ системы (рисунок 1.33)

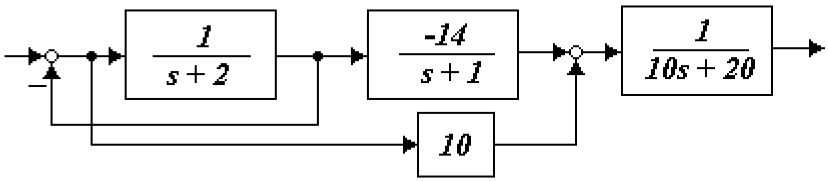


Рисунок 1.33

1.3.2.5 На каком уровне и под каким углом пройдёт низкочастотная асимптота при частоте 0,1 рад/с, если ПФ системы равна

$$W(s)=\frac{s(s+1)}{(0{,}1s+1)(s+10)}.$$

1.4 Устойчивость непрерывных стационарных систем

1.4.1 Математический и физический признаки устойчивости

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходное состояние равновесия после снятия воздействия, выведшего систему из этого состояния.

Математический (прямой) признак устойчивости: система устойчива, если все корни её характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть. Другими словами – если все полюса системы левые (лежат слева от мнимой оси комплексной плоскости). Корни полинома числителя передаточной функции (нули) на устойчивость системы не влияют.

Если хотя бы один полюс располагается справа от мнимой оси, система неустойчива. Она находится на апериодической границе устойчивости, если при остальных левых корнях имеет один нулевой корень, и на колебательной (периодической) границе устойчивости, если при остальных левых корнях характеристического уравнения имеет пару чисто мнимых корней (значение ω мнимой части таких корней равно частоте незатухающих колебаний системы на границе устойчивости).

Физический признак устойчивости: система устойчива, если свободная составляющая $y_{св}(t)$ переходного процесса (импульсная функция $g(t)$) с увеличением времени стремится к нулю, неустойчива, если она стремится к бесконечности, и нейтральна (находится на границе устойчивости), если она стремится к некоторой постоянной величине (амплитуде). Для анализа подходит любая реакция системы, если из нее исключить составляющую, обусловленную вынуждающим сигналом. Нельзя применять для анализа формулу $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{s\to 0} s \cdot G(s)$, т.к. она может давать нулевой результат и для неустойчивых систем.

Пример 1. Оценить прямым методом устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + 3y^{(1)} = 4u^{(1)} + 5u .$$

Характеристическое уравнение системы

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s = s(s^2 + 2s + 3) = 0$$

имеет нулевой корень $s_1 = 0$ и комплексно-сопряженную пару корней, определяемую из квадратного трехчлена

$$s_{2,\,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm j1,414 .$$

Система находится на апериодической границе устойчивости, т.к. нулевой корень находится на мнимой оси комплексной плоскости корней, а остальные корни лежат слева от мнимой оси.

Пример 2. Оценить устойчивость системы со свободной составляющей переходного процесса $y_{св}(t) = -1.23e^{-t} + 0.14\sin t + 1,23\cos t$.

Выражение содержит гармонические составляющие с постоянной амплитудой (не затухающие и не расходящиеся с течением времени), отсюда вывод: система находится на колебательной границе устойчивости. Частота незатухающих колебаний, соответствующая колебательной границе устойчивости, равна 1 рад/с или 1/6,28 с$^{-1}$.

Задания для самостоятельного решения.

1.4.1.1 Оценить устойчивость системы, если

$$G(s)=\frac{A}{(s+0{,}1)^3}+\frac{B}{(s+0{,}1)^2}+\frac{C}{s+0{,}1}+\frac{D}{s+0{,}5}+\frac{Es+F}{s^2+2s+2}.$$

1.4.1.2 Система имеет нуль 10 и полюса -1 ± 3j, 0, -3,14. Оценить устойчивость системы.

1.4.1.3 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.34)

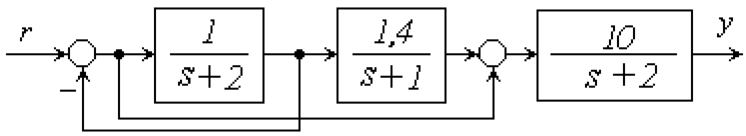


Рисунок 1.34

1.4.1.4 Систему образуют последовательно включенные звенья с передаточными функциями 1/(s + 1), 3/(s + 2,5), 1/(s^2 + 2). Определить частоту незатухающих колебаний.

1.4.1.5 При каком значении α система (рисунок 1.35) окажется на апериодической границе устойчивости.

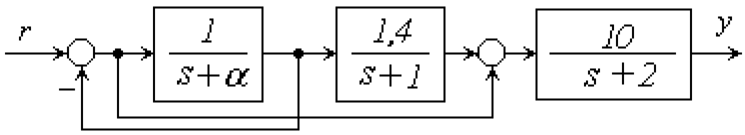
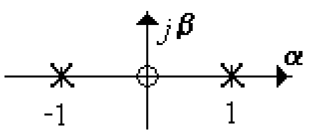
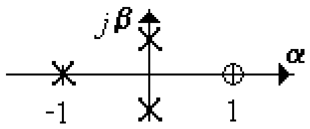


Рисунок 1.35

1.4.1.6 По переходной функции системы $h(t)$ = 5 – 10e^{-t} + 5e^{-2t} оценить её устойчивость, используя физический признак.

1.4.1.7 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.36)





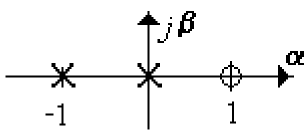


Рисунок 1.36 Рисунок 1.37 Рисунок 1.38

1.4.1.8 Оценить устойчивость системы с $g(t)$ = 1,5e^{-t} – 1,5e^{-3t}.

1.4.1.9 Какова устойчивость системы с $D(s) = s(s^2 + s + 1)$.

1.4.1.10 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.37)

1.4.1.11 Оценить устойчивость системы с $y_{св}(t)$ = 3sin$t$ – 2cos3t.

1.4.1.12 Оценить устойчивость системы с $D(s) = (s - 1)(s^2 + 1)$.

1.4.1.13 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.38)

1.4.2 Алгебраические критерии устойчивости. Критический коэффициент усиления

Критерий Гурвица: система устойчива, если все коэффициенты ее характеристического уравнения $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = 0$ и все диагональные миноры $\Delta_1 ... \Delta_{n-1}$ матрицы Гурвица положительны.

Для устойчивости систем первого и второго порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительны (были одного знака). Достаточные условия для системы третьего порядка $\Delta_2 = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$, для системы четвертого порядка $\Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 = a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) - a_1^2 a_4 > 0$. Критерий Гурвица удобно использовать при устном счете для систем не выше четвертого порядка.

Критерий Рауса: система устойчива, если все коэффициенты ее характеристического уравнения и все элементы первого столбца таблицы Рауса положительны. Необходимое условие (положительность всех коэффициентов) совпадает с критерием Гурвица.

Для проверки достаточного условия составляют таблицу, первую и вторую строки которой заполняют попарно коэффициентами характеристического уравнения, начиная со старшего, недостающие коэффициенты заменяют нулем. Элементы последующих строк вычисляют по формулам $c_{i,j} = c_{i-2,j+1} - c_{i-1,j+1} \times r_i$, где i – номер строки, j – номер столбца, $r_i = c_{i-2,1} / c_{i-1,1}$ – вспомогательное число для i-той строки. Таблица содержит $n + 1$ строку и $(n + 1)/2$ с округлением столбец.

Число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака элементов первого столбца таблицы Рауса. При положительности остальных элементов первого столбца система находится на апериодической границе устойчивости, если равен нулю последний элемент столбца (a_n), и на периодической границе устойчивости, если равен нулю какой-либо иной элемент первого столбца.

Критическим или предельным (граничным) называется значение параметра (коэффициента), входящего в характеристическое уравнение, при котором система находится на границе устойчивости. Для его определения формулируют условия нахождения системы на границе устойчивости по какому-нибудь критерию.

Пример 1. Оценить по критерию Гурвица устойчивость системы

$$W(s) = \frac{s-2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

Характеристическое уравнение $D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0.$

Проверяем необходимое условие – все коэффициенты характеристического уравнения положительны, что можно кратко записать как «условие $a_i > 0$ выполняется».

Проверяем достаточное условие по определителю Гурвица

$$\begin{array}{c|ccc|} \Delta 1 & 2 & 4 & 0 \\ \Delta 2 & 1 & 3 & 0 \\ & 0 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 6 - 4 = 2 > 0. \end{array}$$

Оба диагональных минора положительны. Так как необходимое и достаточное условия выполняются, система устойчива.

Пример 2. Оценить по Раусу устойчивость системы с характеристическим уравнением $D(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6 = 0.$

Необходимое условие $a_i > 0$ выполняется.

	1	3	5
	2	4	6
$r_3 = 0{,}5$	1	2	0
$r_4 = 2{,}0$	0	6	0
$r_5 = +\infty$	$-\infty$	0	0
	6	0	0

Проверяем достаточное условие – составляем таблицу Рауса: число строк равно числу коэффициентов (шесть), число столбцов 6/2 = 3. Заполняем две первые строки попарно коэффициентами с четными a_0, a_2, a_4 и нечетными a_1, a_3, a_5 индексами. Последний коэффициент $a_n = a_5 = 6$ смещается вниз и влево ходом шахматного коня (три клетки вниз и одна влево), ниже него записываем нули. Вычисляем вспомогательное число и элементы третьей строки: $r_3 = c_{1,1}/c_{2,1} = a_0/a_1 = 1/2 = 0{,}5$; откуда $c_{31} = 3 - 4\cdot 0{,}5 = 1$; $c_{32} = = 5 - 6\cdot 0{,}5 = 2$, затем элементы остальных строк.

В первом столбце имеется отрицательное число, следовательно, система неустойчива. Число перемен знака в первом столбце равно двум (от 1 к $-\infty$ и от $-\infty$ к 6), значит система имеет два правых корня характеристического уравнения, остальные три корня левые.

Пример 3. Найти критическое значение коэффициента усиления $k_{кр}$ системы с характеристическим уравнением

$$D(s) = 15{,}3s^3 + 10{,}7s^2 + s + k - 1{,}2 = 0.$$

Формулируем условия нахождения системы на границе устойчивости по критерию Гурвица (он наиболее удобен и нагляден для систем первого-третьего порядка):

- на апериодической границе $a_n = 0$, откуда $a_n = k - 1{,}2 = 0;\ k_{кр1} = 1{,}2;$
- на периодической границе $\Delta_{n-1} = 10{,}7\cdot 1 - 15{,}3(k - 1{,}2) = 0$, откуда следует $k_{кр2} = (10{,}7 + 15{,}3\cdot 1{,}2)/15{,}3 = 29{,}06/15{,}3 = 1{,}899$. Учитывая опущенные знаки неравенств, делаем вывод, что система устойчива при значениях коэффициента усиления $1{,}2 < k < 1{,}899$.

Задания для самостоятельного решения.

1.4.2.1 При каких значениях коэффициента k система (рисунок 1.39) устойчива, если $W_1 = 1/(1+0{,}1s)$, $W_2 = 2/(1 + 0{,}01s)$, $W_3 = k/(1 + s)$, $W_4 = 10$?

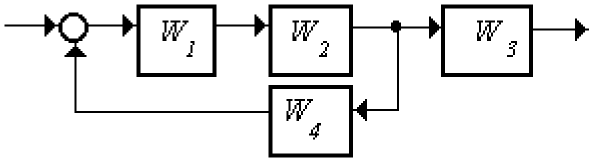


Рисунок 1.39

1.4.2.2 Оценить устойчивость системы $y''' + 4y'' + y' + 4y = 3u$.

1.4.2.3 С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость системы (рисунок 1.40), если $W_1 = 5/(1 + 10s)$, $W_2 = -1/s$, $W_3 = 100$.

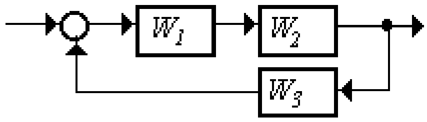


Рисунок 1.40

1.4.2.4 Система задана нулями $0\pm3j$ и полюсами $-1\pm5j$; -1; -10. Оценить устойчивость системы до и после замыкания единичной ООС.

1.4.2.5 Устойчива ли система $D(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 2s + 2 = 0$?

1.4.2.6 Оценить устойчивость системы по критерию Рауса

$$D(s) = s^6 + 2s^5 + 3s^4 + s^2 + 2s + 3 = 0 .$$

1.4.2.7 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.41) по критерию Гурвица

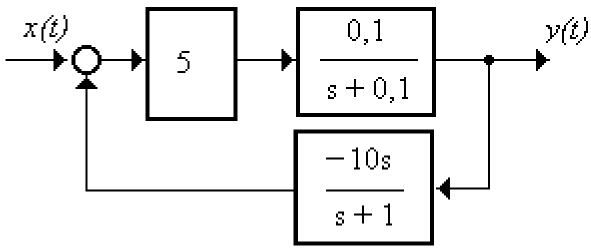


Рисунок 1.41

1.4.2.8 Оценить устойчивость системы по критерию Гурвица при $D(s) = s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 5s + 2 = 0$.

1.4.2.9 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.42), если $W_1(s) = 1$, $W_2(s) = 2$, $W_3(s) = 3$, $W_4(s) = 1$, $W_5(s) = 6$, $W_6(s) = 10$, $W_7(s) = 2$, $W_8(s) = 2s$, $W_9(s) = 10/(1 + 10s)$, $W_{10}(s) = 1/3$, $W_{11}(s) = 1/10s$.

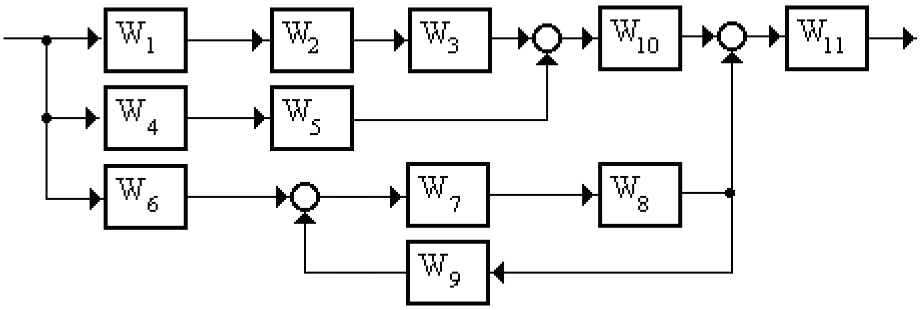


Рисунок 1.42

1.4.2.10 Оценить устойчивость по критерию Рауса системы с характеристическим уравнением $D(s)=s^4+2s^3+3s^2+4s+2=0$.

1.4.3 Частотные критерии устойчивости. Критерий Михайлова

Согласно принципу аргумента, известному в теории комплексной переменной, если среди n полюсов ПФ системы p расположены справа от мнимой оси, а остальные $(n-p)$ – слева, то полное изменение аргумента комплексной функции $D(j\omega)$ равно

$$\Delta \arg_{0\le\omega\le\infty} D(j\omega) = (n-p)\cdot\pi/2 - p\cdot\pi/2 = (n-2p)\cdot\pi/2.$$

Отсюда следует, что линейная система n-го порядка устойчива, если при изменении частоты ω от нуля до плюс бесконечности характеристический вектор системы $D(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол $n\cdot\pi/2$, не обращаясь нигде в ноль.

Конец вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты чертит годограф Михайлова или характеристическую кривую. На этом основана другая формулировка критерия, чаще используемая в инженерной практике.

Система n-го порядка устойчива, если кривая Михайлова, начинаясь при ω=0 на действительной положительной полуоси, проходит при изменении частоты ω от нуля до плюс бесконечности последовательно против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости.

Система находится на апериодической границе устойчивости, если кривая при ω = 0 начинается в начале координат, и на периодической границе устойчивости, если кривая при ω ≠ 0 проходит через начало координат. Частота незатухающих колебаний соответствует периодической границе устойчивости системы.

Кривая Михайлова представляет собой уходящую в бесконечность развертывающуюся спираль, у которой при высоком порядке уравнения практически не видно начальную часть, вследствие этого её допускается чертить не в точном масштабе, а лишь фиксируя последовательность и места пересечения с осями. На графике с кривой Михайлова обязательно должен указываться порядок системы n, так как при его отсутствии может быть сделан ошибочный вывод.

Действительная часть $U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots$ содержит только четные степени переменной ω и называется четной функцией, мнимая часть $V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \ldots$ содержит только нечетные степени переменной ω и называется нечетной функцией. На их использовании основано следствие или вторая форма критерия Михайлова.

Система устойчива, если четная U(ω) и нечетная V(ω) функции при изменении частоты ω от нуля до плюс бесконечности обращаются в нуль поочередно, начиная с нечетной функции, т.е. их корни чередуются. Это вытекает из условия последовательного прохождения квадрантов комплексной плоскости. Для построения графика используется та же таблица частот, что и в первой форме.

Пример 1. Система пятого порядка с кривой Михайлова (рисунок 1.43) неустойчива, т.к. сначала вектор D(jω) повернулся против часовой стрелки на три квадранта (три левых полюса), а затем по часовой стрелке на два квадранта (два правых полюса).

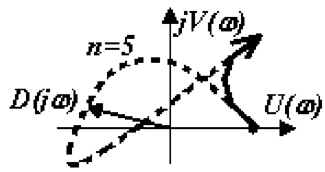


Рисунок 1.43

Иначе: итоговый поворот равен одному квадранту, т.е. n–2p = 1, n = 5,тогда правых корней характеристического полинома (5–1)/2 = 2.

Пример 2. Найти критическое значение коэффициента усиления системы с $D(s) = 0,03s^3 + 0,3s^2 + (1 + 0,01k)s + k$ по критерию Михайлова.

Заменяя $s = j\omega$, получим характеристическую функцию

$$D(j\omega) = j\omega(-0,03\omega^2 + 0,3j\omega + 1) + k(0,01j\omega + 1) =$$
$$= k - 0,3\omega^2 + j\omega(1 + 0,01k - 0,03\omega^2) = X(\omega) + jY(\omega).$$

Условия нахождения САУ на границе устойчивости

$$\left.\begin{aligned} X(\omega_o) &= \operatorname{Re} D(j\omega) = k_{кр} - 0,3\omega_o^2 = 0, \\ Y(\omega_o) &= \operatorname{Im} D(j\omega) = \omega_o(1 + 0,01k_{кр} - 0,03\omega_o^2) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Корень второго уравнения $\omega_o = 0$ отбрасываем, т.к. для нахождения системы на колебательной границе устойчивости годограф Михайлова должен пройти через начало координат при $\omega \neq 0$.

Тогда из второго уравнения определяем частоту $\omega_0^2 = \dfrac{1 + 0,01k_{кр}}{0,03}$

и подставляем ее значение в первое уравнение

$$k_{кр} = 0,3\omega_o^2 = \frac{1+0,01k_{кр}}{0,03} \cdot 0,3, \text{ откуда } k_{кр} = \frac{0,3}{0,027} = 11,111.$$

Частота, соответствующая колебательной границе устойчивости

$$\omega_o = \sqrt{(1+0,01 \times 11,111)/0,03} = \sqrt{37,037} = 6,0855 \text{ рад/с.}$$

Пример 3. Используя вторую форму (следствие) критерия Михайлова, оценить устойчивость системы

$$W(s) = \frac{s-2}{s^3+2s^2+3s+4}.$$

В характеристическом уравнении $D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0$ заменяем $s = j\omega$, снижаем порядок j и группируем

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + 4 = 4 - 2\omega^2 + j\omega(3 - \omega^2).$$

Здесь $4 - 2\omega^2$ – это четная (действительная) функция $U(\omega)$, а $\omega(3 - \omega^2)$ – это нечетная (мнимая) функция $V(\omega)$.

Таблица частот

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	4	0
∞	$-\infty$	$-\infty$
$\sqrt{2}=1,41$	0	1,41
$\sqrt{3}=1,73$	-2	0

Приравнивая поочередно четную и нечетную функции нулю, находим частоты 1,41 и 1,73, соответствующие пересечению кривой с осями координат, подставляем эти частоты в характеристическую функцию и заполняем таблицу. Строим графики четной и нечетной функций – они поочередно пересекают ось частот, т.е. их корни перемежаются, и общее число пересечений равно $n = 3$, следовательно, система устойчива (рисунок 1.44).

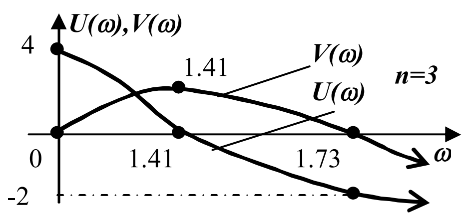


Рисунок 1.44

Задания для самостоятельного решения.

1.4.3.1 Найти частоту незатухающих колебаний для системы с характеристическим уравнением $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = 0$.

1.4.3.2 Найти предельный коэффициент усиления для системы (рисунок 1.45) при $T_1 = 0{,}5$ с; $T_2 = 1$ с; $T_3 = 0{,}2$ с.

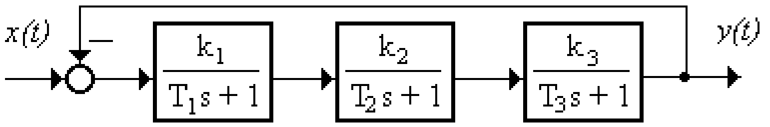


Рисунок 1.45

1.4.3.3 Оценить устойчивость системы с характеристическим уравнением $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 2 = 0$.

1.4.3.4 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.46) по второй форме критерия Михайлова при $W_1(s) = 1/(1 + s)$, $W_2(s) = 2$, $W_3(s) = 2s$, $W_4(s) = 4$, $W_5(s) = 3/(1 + 10s)$, $W_6(s) = 10$.

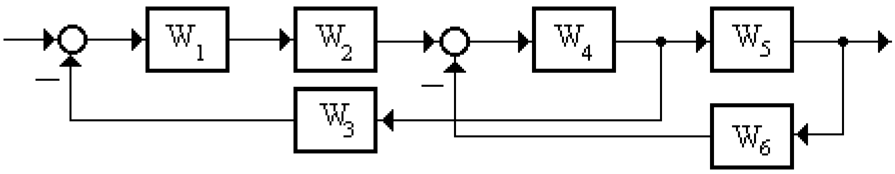


Рисунок 1.46

1.4.3.5 Оценить устойчивость по критерию Михайлова (форма 2) системы с характеристическим уравнением

$$D(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 15s + 15 = 0.$$

1.4.3.6 Оценить устойчивость замкнутой системы по Михайлову (форма 2), если известно дифференциальное уравнение разомкнутой системы

$$0{,}04\frac{d^4y}{dt^4} + 0{,}5\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 10y = 4\frac{dx}{dt}.$$

1.4.3.7 По критерию Михайлова оценить устойчивость системы

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^6 + 5s^5 + 6s^4 + 4s^2 + 20s + 24}$$

1.4.3.8 Найти по Михайлову частоту незатухающих колебаний после замыкания системы с дифференциальным уравнением

$$0{,}5\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + 1{,}5\frac{d^2y}{dt^2} + y = 2\frac{dx}{dt}.$$

1.4.4 D-разбиение по одному параметру

Областью устойчивости $D(0)$ называют область в пространстве изменяемых параметров, каждой точке которой соответствуют только левые корни характеристического уравнения. Остальные D-области отличаются числом правых корней характеристического уравнения и обозначаются соответственно $D(1)$ – область с одним правым полюсом, $D(2)$ – с двумя и т.д.

Подставив $s = j\omega$ в характеристическое уравнение системы, разрешают его относительно изменяемого параметра, находят четную (действительную) $U(\omega)$ и нечетную (мнимую) $V(\omega)$ функции. Изменяя частоту ω от 0 до плюс бесконечности, строят кривую D-разбиения и ее зеркальное отображение относительно действительной оси. Двигаясь по кривой от точки $\omega = -\infty$ до точки $\omega = +\infty$, наносят штриховку слева от кривой.

Направление штриховки указывает на область с наибольшим числом левых корней. При каждом переходе через кривую навстречу штриховке один корень характеристического уравнения становится правым, в обратном направлении – левым. Выбранную по штриховке область-претендент $D(0)$ проверяют на устойчивость с помощью любого критерия, подставив значение параметра из этой области в характеристическое уравнение. Поскольку изменяемый параметр является действительной величиной, его допустимые значения лежат на отрезке действительной оси, заключенном внутри области устойчивости $D(0)$.

Пример 1. Найти методом D-разбиения критические значения коэффициента усиления k системы, заданной передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{0{,}002s^3 + 0{,}12s^2 + s + k}.$$

Разрешаем характеристическое уравнение системы

$$D(s) = 0{,}002s^3 + 0{,}12s^2 + s + k = 0$$

относительно исследуемого параметра k

$$k = -0{,}002s^3 - 0{,}12s^2 - s,$$

производим замену $s = j\omega$

$$k(j\omega) = -(j\omega)^3 \cdot 0{,}002 - (j\omega)^2 \cdot 0{,}12 - j\omega,$$

снижаем порядок j и группируем

$$k(j\omega) = 0{,}12\omega^2 - j\omega(1 - 0{,}002\omega^2) = U(\omega) - jV(\omega).$$

Таблица частот

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	0	0
∞	∞	∞
$\sqrt{500}$	60,00	0
1	0,12	-1

Определяем частоты пересечения основной кривой с осями:

$U(\omega) = 0{,}12\omega^2 = 0$, отсюда $\omega = 0$,
$V(\omega) = 1 - 0{,}002\omega^2 = 0$ и $\omega = \sqrt{500} = 22{,}36$.

Строим основную и зеркальную кривые на комплексной плоскости, указывая направление возрастания частоты стрелкой на характеристике (рисунок 1.47). Наносим штриховку, обозначаем области с предполагаемым числом правых полюсов в скобках. Проверяем область-претендент $D(0)$ на устойчивость по критерию Гурвица при значении $k = 1$, выбранном на отрезке внутри области $D(0)$ между точками 0 и 60

$$D(s) = 0{,}002s^3 + 0{,}12s^2 + s + 1 = 0.$$

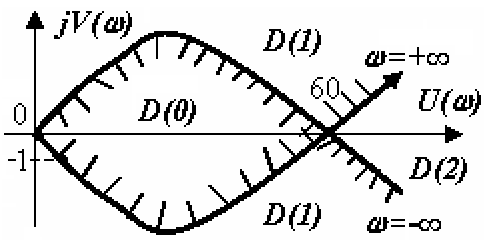


Рисунок 1.47

Так как и необходимое, и достаточное условия устойчивости по Гурвицу при $k = 1$ выполняются, то система будет устойчивой при любых значениях коэффициента усиления в интервале $0 < k < 60$. Критические значения коэффициента равны $k_{кр1} = 0$; $k_{кр2} = 60$.

Задания для самостоятельного решения.

1.4.4.1 Исследовать методом D-разбиения устойчивость системы по k после замыкания единичной ООС

$$\frac{-k}{s^2 + 5s + 2}.$$

1.4.4.2 При каких значениях коэффициента k система (рисунок 1.48) устойчива, если $W_1 = 0{,}01/(1 + 0.001s)$, $W_2 = 10$, $W_3 = 10/(1 + 10s)$, $W_4 = k/s$?

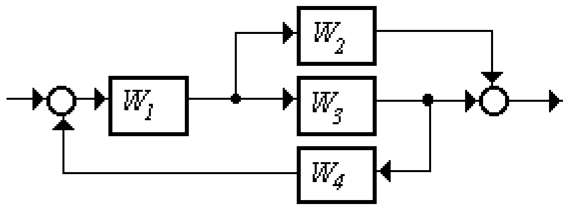


Рисунок 1.48

1.4.4.3 Определить критическое значение коэффициента усиления k методом D-разбиения

$$D(s) = 0{,}01s^3 + 0{,}1s^2 + s + (k + 10) = 0\,.$$

1.4.4.4 Выбрать значение k из условия устойчивости системы (рисунок 1.49)

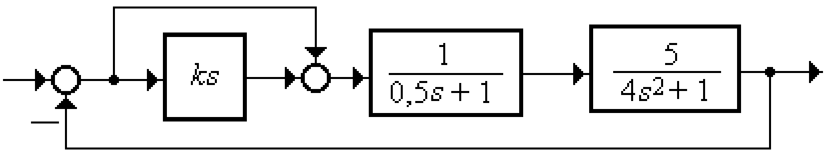


Рисунок 1.49

1.4.4.5 Исследовать на устойчивость по A после замыкания систему $W(s) = As^2/(s^3 + s + 1)$.

1.4.5 Критерий Найквиста. Запасы устойчивости

Упрощенная формулировка: система, устойчивая в разомкнутом состоянии или нейтральная, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты ω от нуля до плюс бесконечности не охватывает точку с координатами (-1, j0). Всегда подразумевается замыкание системы единичной ООС.

Общая формулировка: система после замыкания будет устойчивой, если АФЧХ разомкнутой системы охватывает в положительном направлении (против часовой стрелки) $p/2$ раз точку с координатами (-1, j0), где p – число правых полюсов разомкнутой системы.

Оценка запасов устойчивости по АФЧХ. Запасы устойчивости по амплитуде A_m в относительных единицах равны расстоянию от критической точки (-1, j0) до ближайших точек пересечения АФЧХ с отрицательной действительной полуосью. В децибелах запас устойчивости по амплитуде находят как величину, обратную амплитуде A вектора $W(j\omega)$ при угле -180° или $A_m = 20\lg(1/A)$, где A – расстояние от точки пересечения АФЧХ с отрицательной действительной полуосью до начала координат. Норма $A_m = 1 - A(\omega_{-\pi}) \geq$ 0,5.. 0,6 или 6-12 дБ.

Запас устойчивости по фазе φ_m равен углу между отрицательной действительной полуосью и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения АФЧХ с дугой единичного радиуса. Запас по фазе $\varphi_m = \pi - |\varphi(\omega_{cp})|$ находится в пределах от 0 до 180°, при проектировании обычно нормой является $\varphi_m \geq 30..60°$.

Система устойчива в замкнутом состоянии, если обратная АФЧХ $1/W(j\omega)$ разомкнутой системы охватывает точку (-1, j0).

Логарифмический критерий Найквиста (диаграмма Боде). Обычная формулировка: замкнутая система устойчива, если в момент пересечения ЛФЧХ разомкнутой системы линии -180° её ЛАЧХ отрицательна. Общая формулировка пригодна и для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии: замкнутая система устойчива, если на интервале положительности ЛАЧХ разомкнутой системы сумма переходов ее ЛФЧХ линии -180° равна $p/2$, где p – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Оценка запасов устойчивости по ЛЧХ. Запас устойчивости по амплитуде A_m равен отклонению ЛАЧХ от нуля на ближайших к частоте среза $\omega_{ср}$ частотах пересечения ЛФЧХ с линией минус 180°. Запас устойчивости по фазе φ_m равен отклонению ЛФЧХ на частоте среза $\omega_{ср}$ от линии минус 180° к нулю.

Пример 1. Оценить устойчивость системы (рисунок 1.50) по Найквисту.

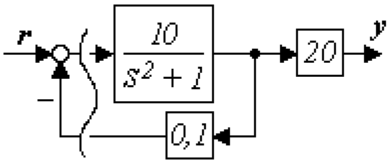


Рисунок 1.50

Решение. Поскольку необходимо оценить устойчивость имеющейся системы, ее предварительно следует сделать разомкнутой – разорвать контур обратной связи по сумматору. Передаточная функция разомкнутой системы $W(s) = 1/(s^2 + 1)$.

Блок с коэффициентом усиления 20 стоит вне контура обратной связи и на устойчивость системы не влияет. В разомкнутом состоянии система находится на колебательной границе устойчивости, так как имеет корни $s_{1,2} = \pm j1$. Находим комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы $W(j\omega) = 1/(1 - \omega^2)$.

Определяем частоты пересечения годографа с осями координат: мнимая часть отсутствует, из уравнения $Re(\omega) = 0$ видно, что корни, т.е. частоты пересечения с мнимой осью, отсутствуют. Зато уравнение $1 - \omega^2 = 0$ дает частоту разрыва характеристики $\omega_p = 1$. В подобном случае обычно берут еще две частоты (произвольно) – немного меньше частоты разрыва и немного больше, например, возьмём 0,1 и 10.

Таблица частот

ω	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
0	1,00	0
∞	0	0
1,0	∞	0
0,1	1,01	0
10,0	-0,01	0

Замкнутая система также находится на колебательной границе устойчивости (рисунок 1.51), т.к. АФЧХ проходит через точку (-1, j0).

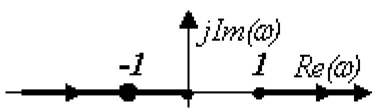


Рисунок 1.51

Пример 2. Оценить запасы устойчивости по АФЧХ после замыкания единичной ООС системы с $W(s) = 1/(s^2 + 3s + 2)$.

Задача не требует построения АФЧХ. По критерию Гурвица следует, что в разомкнутом состоянии система устойчива, нулей нет, поэтому годограф Найквиста проходит два квадранта по часовой стрелке и не пересекает отрицательную действительную полуось. Таким образом, запас по амплитуде максимален $A_m = 1$. Полюса системы действительные -1 и -2, следовательно, резонанс в системе отсутствует и амплитуда вектора $|W(j\omega)|$ нигде не превышает величины $k_{уст} = 1/2$, запас устойчивости по фазе равен $\varphi_m = 180°$.

Задания для самостоятельного решения.

1.4.5.1 Найти запасы устойчивости системы $\dfrac{2s}{5s^2 - 4s + 1}$ после замыкания.

1.4.5.2 Найти запасы устойчивости для системы $W(s) = \dfrac{4s + 2}{5s + 3}$.

1.4.5.3 Оценить устойчивость замкнутой системы по критерию Найквиста, если передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(s) = \frac{10s + 1}{s^2(5s + 1)}$$

1.4.5.4 Оценить по критерию Найквиста устойчивость системы после замыкания при $T_1 = 5$ с, $T_2 = 4$ с.

$$W(s) = \frac{20s}{T_1 s^2 - T_2 s + 1},$$

1.4.5.5 Оценить устойчивость замкнутой системы по критерию Найквиста, если передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(s) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)T_3 s},$$

где $T_1 = 1$ с, $T_2 = 0{,}5$ с, $T_3 = 0{,}1$ с, $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, $k_3 = 0{,}4$.

1.4.5.6 Оценить устойчивость системы (рисунок 1.52) по критерию Найквиста

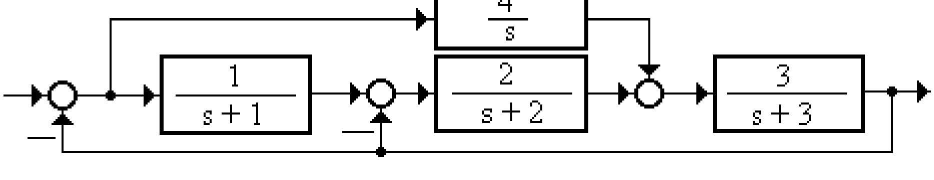


Рисунок 1.52

1.4.5.7 Найти запасы устойчивости по амплитуде и фазе замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(s) = \frac{1 + 0{,}1s}{(1 + 0{,}2s)(1 + 0{,}25s^2)}.$$

1.4.5.8 Оценить устойчивость системы в разомкнутом состоянии и запасы устойчивости в замкнутом состоянии (рисунок 1.53)

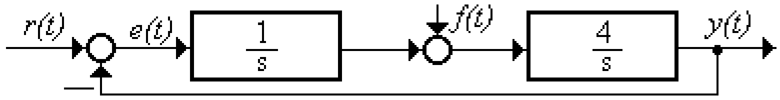


Рисунок 1.53

1.4.5.9 Найти запас устойчивости A_m после замыкания системы

$$\frac{2s}{4s^2 + 6s + 1}.$$

1.4.5.10 Нарисовать ЛФЧХ устойчивой после замыкания системы, имеющей ЛАЧХ (рисунок 1.54)

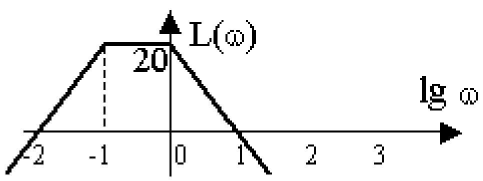


Рисунок 1.54

1.4.5.11 Оценить устойчивость методом обратной АФЧХ после замыкания единичной ООС системы с $W(s) = 1/(s^2 + 3s + 2)$.

1.5 Качество непрерывных стационарных систем

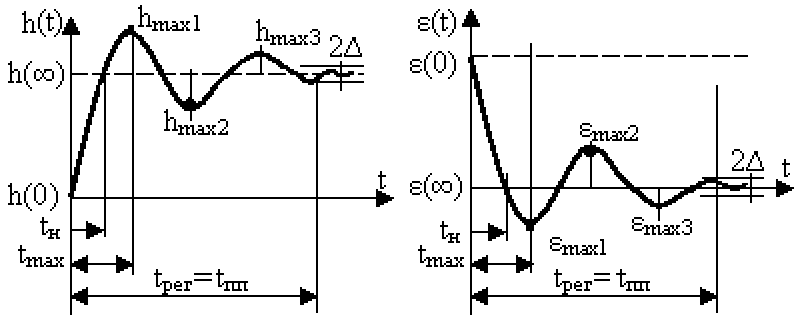
1.5.1 Прямые оценки качества регулирования

Прямые оценки качества определяются по переходной характеристике, т.е. реакции системы на единичный скачок при нулевых начальных условиях (рисунок 1.55).

Время регулирования $t_{рег}$ измеряется от начала переходного процесса до момента, после которого характеристика не отклоняется от установившегося значения более, чем на величину допустимой ошибки Δ (обычно 5 %, реже 2 % от установившегося значения). Следует указывать, при какой зоне Δ получено время регулирования.

Перерегулирование σ – величина максимального относительного заброса переходной характеристики от начальной величины за линию установившегося значения (в относительных единицах или %)

$$\sigma = \frac{|h_{\max 1} - h(\infty)|}{|h(\infty) - h(0)|} \text{ или } \sigma = \frac{|\varepsilon_{\max 1}|}{|\varepsilon(0)|}.$$



а) – выходная величина $y(t)$ или $h(t)$ б) – ошибка регулирования $\varepsilon(t)$ или отклонение $\delta(t)$

Рисунок 1.55

Если начальное и конечное значения характеристики равны нулю или одинаковы (и приняты условно за 0), возможны два способа оценки. При наличии разнополярных значений перерегулирование равно отношению величины второго экстремума к величине первого (рисунок 1.56, а), а если колебание одно (рисунок 1.56, б), то перерегулирование равно отношению величины максимального отклонения к величине входного воздействия (обычно это единица). Зону Δ для оценки времени регулирования в первом случае определяют от значения первого максимума, во втором случае – от величины входного воздействия.

а б

Рисунок 1.56

Время нарастания $t_н$ определяется: для процессов с перерегулированием как время от начала процесса до момента пересечения кривой линии установившегося значения; для любых процессов как время между моментами достижения заданных уровней установившегося значения (например, 10 и 90 %). Поэтому при оценке времени нарастания следует указывать, каким способом оно получено.

Время достижения первого максимума t_{max} (подразумевается, что первый максимум кривой является и наибольшим из всех).

Коэффициент колебательности N – число забросов переходной характеристики через линию установившегося значения за время регулирования, рекомендуется не более одного-двух забросов.

Степень затухания (демпфирования) – величина относительного уменьшения $\psi = (h_{max1} - h_{max3})/(h_{max1} - h(\infty))$ амплитуды максимальных забросов выходной величины за один период $T_к$, удовлетворительной считают систему с ψ = 0,75...0,95.

Установившаяся ошибка $\varepsilon(\infty)$ равна разнице между предписанным и действительным значениями выходной величины после окончания переходного процесса.

Пример 1. Оценить время регулирования и перерегулирование для системы с передаточной функцией $k/(s + 2)$.

Поскольку полюс α = -2 действительный, без мнимой части, колебаний не будет и перерегулирование σ = 0. Переходный процесс описывается зависимостью $k(1 - e^{\alpha t})$ и заканчивается при достижении величины $0{,}95k$, т.е. когда выполняется условие $e^{\alpha t} = \Delta = 0{,}05$. Отсюда $t_{рег} = \ln(\Delta)/\alpha = \ln(0{,}05)/(-2) = 1{,}498$ с.

Пример 2. Определить величину перерегулирования и времени регулирования (рисунок 1.57)

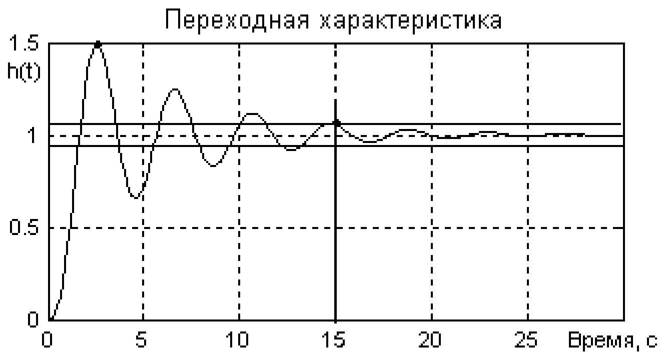


Рисунок 1.57

Перерегулирование σ = (1,5 – 1,0)/1,0 = 0,5 или 50 %. Для определения времени регулирования проводим параллельно линии установившегося значения две прямые на уровне $h_{уст} \pm\Delta = 1\pm0{,}05\times1 = 1\pm0{,}05$. По точке последнего вхождения кривой в зону 2Δ получаем $t_{рег}$ = 15 с.

Задания для самостоятельного решения.

1.5.1.1 Оценить качество регулирования для звена с передаточной функцией $W(s) = \dfrac{1}{s-1}$.

1.5.1.2 Сформулировать условия отсутствия перерегулирования в системе с дифференциальным уравнением $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u' + b_1 u$.

1.5.1.3 Определить величину перерегулирования системы (рисунок 1.58) от скачка задания

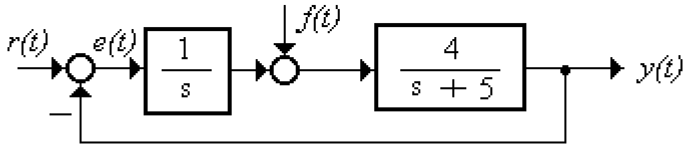


Рисунок 1.58

1.5.1.4 Найти все показатели качества регулирования (рисунок 1.59)

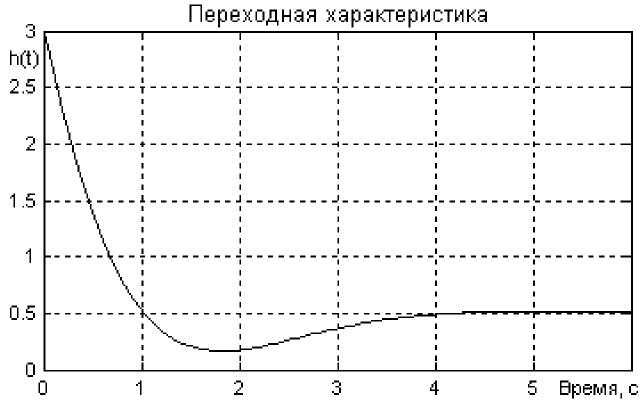


Рисунок 1.59

1.5.1.5 Оценить основные показатели качества регулирования (рисунок 1.60) относительно возмущения

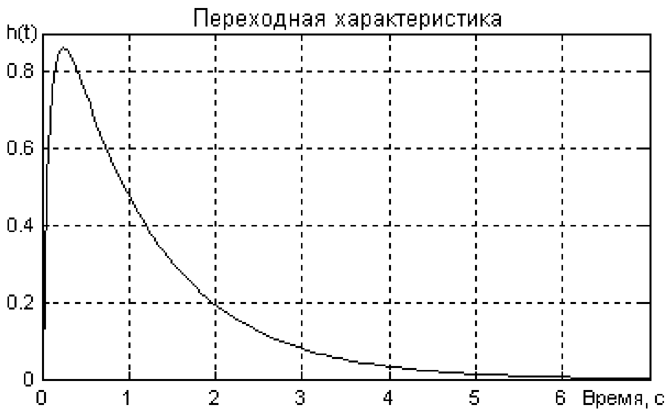


Рисунок 1.60

1.5.1.6 Найти время регулирования $t_{рег}$, степень демпфирования и величину перерегулирования σ по переходной характеристике выхода системы относительно возмущения (рисунок 1.61)

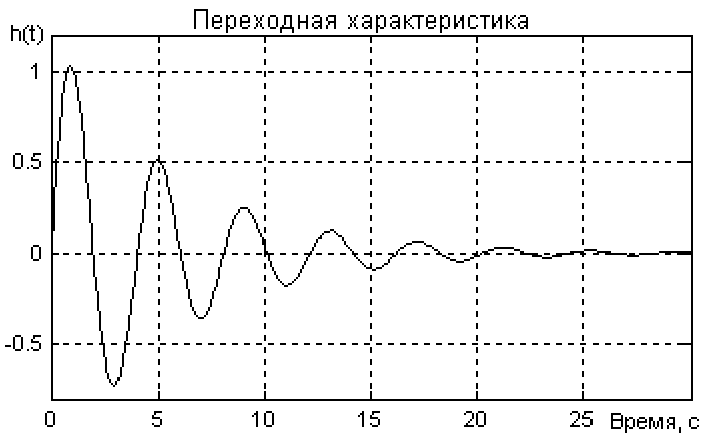


Рисунок 1.61

1.5.2 Корневые методы оценки качества регулирования

Доминирующими называются левые полюса системы, ближайшие к мнимой оси. Степень устойчивости α_{min} (или η) равна модулю их действительной части (рисунок 1.62). Для оценки времени регулирования $t_{рег}$ находят сначала степень устойчивости системы, откуда при ошибке Δ=5 % $t_{рег} \approx 3/|\alpha_{min}|$. При заданной зоне ошибки 2 % вместо коэффициента 3 берут приблизительно 4.

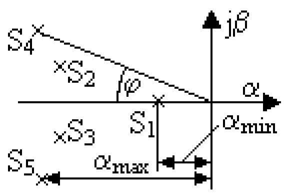


Рисунок 1.62

Найдя степень колебательности системы $\mu = |\beta/\alpha|_{\max} = tg\varphi_{\max}$, определяют значение перерегулирования $\sigma \approx e^{-\pi/\mu}$. Для расчета μ выбирают комплексный корень (полюс), у которого отношение мнимой части к действительной максимально. При единственной паре комплексных корней необходимость выбора отпадает. При нескольких парах комплексных корней максимальное значение μ у того корня, который первым встречается лучу, проведенному из начала координат по положительной мнимой полуоси и поворачиваемому против часовой стрелки.

Показатели качества определяют только для устойчивых систем. Если система имеет нуль, равный полюсу, то они взаимно компенсируются и данная составляющая не учитывается (выпадает из переходного процесса).

Пример 1. Оценить показатели качества регулирования системы, имеющей нуль -0,125, полюса -1,5 ± 6*j*; -0,125 и коэффициент передачи 1,2.

Коэффициент передачи на относительные показатели не влияет. Нуль -0,125, равный полюсу, взаимно с ним компенсируется. Следовательно, доминирующими являются комплексно-сопряженные полюса -1,5 ± 6*j*, откуда $t_{рег} \approx 3/|\alpha_{min}| = 3/1{,}5 = 2$ с, степень колебательности системы $\mu = |\beta/\alpha|_{max}$ = 6/1,5 = 4 и перерегулирование $\sigma \approx e^{-\pi/\mu}$ = 0,456 или 45,6 %.

Пример 2. Оценить перерегулирование и время регулирования системы $5y'' + 6y' + 2y = 0{,}8u$ с законом управления $u = 2(r - y)$.

Подставляя значение u в соответствии с законом регулирования, получим дифференциальное уравнение $5y'' + 6y' + 3{,}6y = 1{,}6r$. Нули отсутствуют, из характеристического уравнения $5s^2 + 6s + 3{,}6 = 0$ находим полюса -0,6 ± *j*0,6. Отсюда $t_{рег} \approx 3/|\alpha_{min}| = 3/0{,}6 = 5$ с, а перерегулирование $\sigma \approx e^{-\pi/\mu} = e^{-\pi} =$ 0,043 или 4,3 %.

Задания для самостоятельного решения.

1.5.2.1 Оценить степень устойчивости и степень колебательности системы с $D(s) = (s + 1)(s^2 + 2s + 2)$.

1.5.2.2 Найти показатели качества системы с характеристическим уравнением $D(s) = s^3 + s^2 + 2s + 3 = 0$.

1.5.2.3 Оценить степень устойчивости и степень колебательности системы (рисунок 1.63)

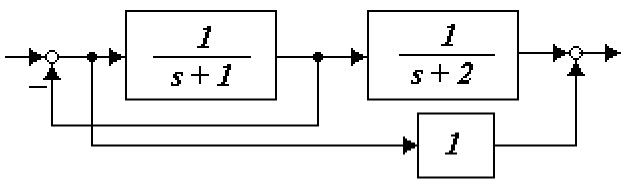


Рисунок 1.63

1.5.2.4 Найти время регулирования системы (рисунок 1.64)

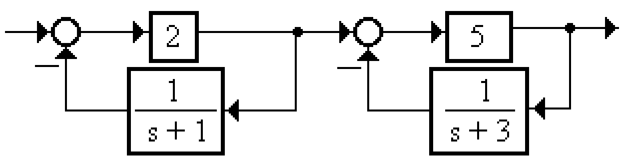


Рисунок 1.64

1.5.2.5 Найти $t_{рег}$ и σ системы (рисунок 1.65), если $k = 3$

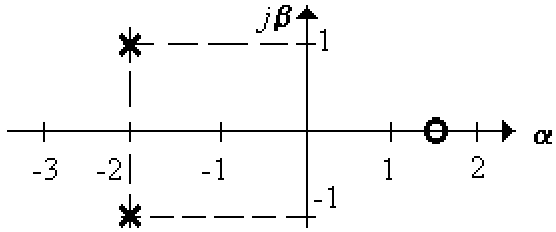


Рисунок 1.65

1.5.2.6 Рассчитать перерегулирование и время регулирования для системы (рисунок 1.66)

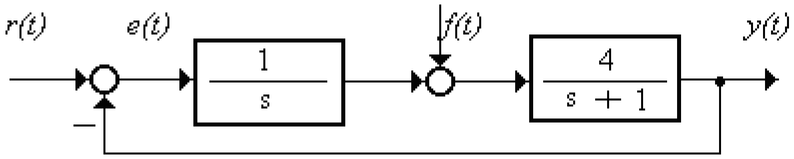


Рисунок 1.66

1.5.2.7 Оценить приблизительно $t_{рег}$ и σ системы (рисунок 1.67) для произвольного значения k

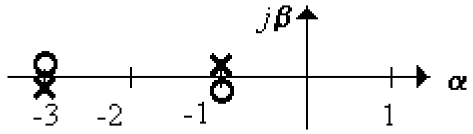


Рисунок 1.67

1.5.3 Частотные методы оценки качества регулирования

Особые частоты: ω_+ – граница интервала частот положительности ВЧХ, ω_0 – частота собственных колебаний, $\omega_{сущ}$ – граница интервала существенных частот, вне которого текущее значение функции уже не превышает $(0{,}05\ldots0{,}1)P(0)$.

Общие принципы оценки качества по вещественной частотной характеристике $P(\omega)$:

- $P(0) = h(\infty) = k_{уст}$ – конечное значение переходной характеристики численно равно начальному значению ВЧХ;
- $P(\infty) = h(0)$ – начальное значение переходной характеристики численно равно конечному значению ВЧХ;
- $a{\cdot}P(\omega) \div a{\cdot}h(t)$ – кратность изменения масштаба ВЧХ и переходной характеристики одинакова;
- $P(a{\cdot}\omega) \div h(t/a)$ – расширение полосы рабочих частот ведет к соразмерному повышению быстродействия системы;
- время регулирования $\pi/\omega_+ < t_{рег} < 4\pi/\omega_+$,

- перерегулирование σ определяется по форме ВЧХ:

а) если ВЧХ монотонно убывает, то перерегулирование $\sigma = 0$;

б) если ВЧХ является положительной невозрастающей функцией, то перерегулирование $\sigma < 18$ %;

в) если ВЧХ имеет подъем от $P(0)$, то $\sigma = \frac{1{,}18 \cdot P_{\max +} - P(0)}{P(0)} 100\%$;

г) если ВЧХ имеет отрицательный минимум со значением более 0,1 $P(0)$, то с его учетом $\sigma = \frac{1{,}18 \cdot P_{\max +} + 0{,}277\left|P_{\min -}\right| - P(0)}{P(0)} 100\%$;

д) если ВЧХ терпит разрыв при $\omega = \omega_0$, система совершает незатухающие колебания, $t_{\text{рег}} \to \infty$ и показатели качества не определяются.

При оценке качества регулирования по АЧХ обычно вычисляют значение частотного показателя колебательности, равное отношению максимума характеристики к ее начальному значению $M = A_{\text{м}}/A(0)$. При $M = 1$ переходная характеристика системы не колебательна, при $M \to \infty$ система находится на границе устойчивости, наблюдаются незатухающие колебания с частотой ω_0. Оптимальными считаются значения $M = 1{,}1..1{,}5$, которым соответствует перерегулирование 10-30 % и запас по фазе 30-50°.

Пример 1. Оценить значение частотного показателя колебательности системы по её АЧХ (рисунок 1.68).

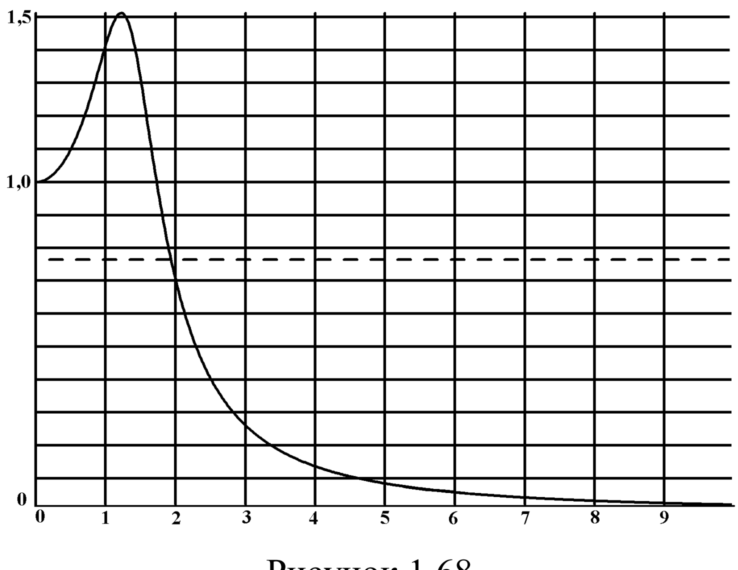


Рисунок 1.68

Максимальное значение АЧХ равно 1,51, следовательно, показатель колебательности $M = 1{,}51/1{,}0 = 1{,}51$, что ещё удовлетворяет минимальному запасу по фазе 30° и перерегулированию 30 %.

Пример 2. Найти значение перерегулирования и времени регулирования системы по заданной АФЧХ (рисунок 1.69)

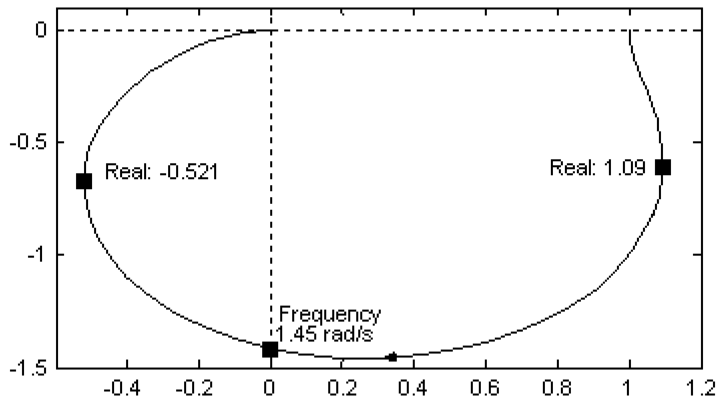


Рисунок 1.69

Частота ω_+ = 1,45 рад/с, положительный максимум ВЧХ равен 1,09 при начальном значении $P(0)$ = 1,0, отрицательный минимум 0,521. Отсюда получаем перерегулирование

$$\sigma = \frac{1,18 \cdot P_{\max +} + 0,277\left|P_{\min -}\right| - P(0)}{P(0)} 100\% =$$

= (1,18*1,09 + 0,277*0,521 – 1,0)*100 = 43,1 %

и время регулирования не более $4\pi/\omega_+$ = 4*3,1415926/1,45 = 8,67 с.

Задания для самостоятельного решения.

1.5.3.1 Оценить $t_{\text{рег}}$ и σ системы с ПФ $W(s) = 4/(s^2 + 6s + 8)$, используя частотный метод.

1.5.3.2 Найти оценки показателей качества по ВЧХ (рисунок 1.70), считая $\omega_+ = \omega_{\text{сущ}}$

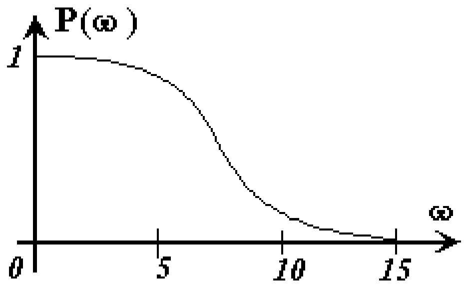


Рисунок 1.70

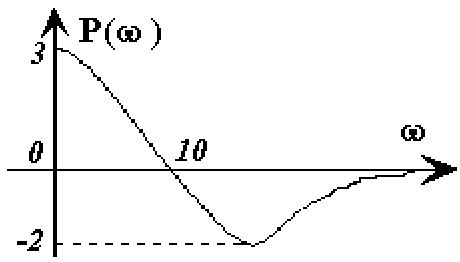


Рисунок 1.71

1.5.3.3 Найти по вещественной частотной характеристике $P(\omega)$ показатели качества переходного процесса σ, $t_{\text{рег}}$ (рисунок 1.71)

1.5.3.4 Найти частотным методом показатели качества σ и $t_{\text{рег}}$ после замыкания системы, если передаточная функция разомкнутой системы равна $W(s) = 9/(s^2 + 11s + 1)$.

1.5.3.5 Оценить частотным методом установившуюся ошибку системы с передаточной функцией $W(s) = 9/(s^3 + 2s^2 + 6s + 10)$.

1.5.4 Интегральные оценки качества переходных процессов

Интегральные показатели качества регулирования дают совокупную оценку быстродействия и колебательности без вычисления их значений. Они характеризуют отклонение реального переходного процесса от заданного идеального.

Интегральная линейная оценка (ИЛО) определяется площадью отклонения реального процесса от идеального ступенчатого. Для обеспечения требуемых динамических свойств САУ необходимо выразить величину J_1 через коэффициенты передаточной функции системы

$$J_1 = \lim_{s\to 0}\frac{W(0)-W(s)}{s},$$

где $W(0)$ – значение передаточной функции в установившемся режиме (при $s = 0$), а затем найти оптимальные значения варьируемых параметров, соответствующих минимуму J_1.

Пример 1. Для системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k(T_1 s+1)}{T_2 s+1}$$

линейная интегральная оценка

$$J_1 = \lim_{s\to 0}\frac{k-\dfrac{k(T_1 s+1)}{T_2 s+1}}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{k(T_2-T_1)}{T_2 s+1} = k(T_2-T_1)$$

зависит от соотношения постоянных времени T_1 и T_2. Минимум оценки достигается при их равенстве.

Задания для самостоятельного решения.

1.5.4.1 При каком значении k интегральная линейная оценка минимальна, если ПФ системы равна $W(s) = ks/(Ts + 1)$.

1.5.4.2 Оценить вид интегральной линейной оценки для системы с передаточной функцией $W(s) = (b_0 s + b_1)/(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)$.

1.5.4.3 Найти интегральную линейную оценку для системы с передаточной функцией $W(s) = (s + 1)/(s^2 +2s + 1)$.

1.5.4.4 Чему равна интегральная оценка J_1 для системы с передаточной функцией $W(s) = k/(Ts + 1)$.

1.5.4.5 Оценить влияние T на величину J_1, если передаточная функция системы равна $W(s) = 2s/(Ts^2 +2s + 2)$.

1.5.5 Точность в установившемся режиме

Установившаяся ошибка характеризует точность системы в статическом режиме и равна отклонению действительного значения регулируемой величины от заданного. Система с нулевой установившейся ошибкой $\varepsilon(\infty) = 0$ называется астатической, а при $\varepsilon(\infty) \neq 0$ и система и ошибка называются статическими.

Ошибка зависит от вида входного воздействия, места его приложения и степени астатизма ν (числа нулевых полюсов) разомкнутой системы. По умолчанию подразумевают вход задания *r(t)* и вид воздействия скачок $1(t)$ при нулевых начальных условиях, в ином случае условия получения ошибки должны оговариваться специально.

Передаточная функция ошибки воспроизведения задания определяется по ПФ разомкнутой системы как $W_\varepsilon(s) = 1/(1 + W_{раз}(s))$, по передаточной функции замкнутой системы как $W_\varepsilon(s) = 1 - W_{зам}(s)$.

Относительная величина установившейся ошибки называется коэффициентом статизма (статизмом) системы по соответствующему каналу:

$$S_r = \frac{\varepsilon_r(\infty)}{r} = \frac{1}{1+k_c}$$ – статизм от задания *r(t)*,

$$S_f = \frac{\varepsilon_f(\infty)}{f} = \frac{k_0}{1+k_c}$$ – статизм от возмущения *f(t)*.

Здесь k_0 – коэффициент усиления объекта регулирования. Ошибку регулирования и статизм можно уменьшить, увеличивая общий коэффициент усиления системы k_c, а по заданной величине статизма (относительной статической ошибки) системы можно выбрать требуемый коэффициент усиления.

Интеграторы с ПФ вида k/s, добавляемые вне цепи прямой связи сигнала ошибки, увеличивая порядок астатизма разомкнутой системы, позволяют полностью устранить ошибки статическую, по скорости, по ускорению.

Установившийся динамический режим имеет место при возмущенном движении системы с момента затухания свободной составляющей переходного процесса. Если входное воздействие аппроксимируется полиномом от t, т.е. разлагается в степенной ряд

$$r(t) = \left(A_0 + A_1 t + A_2 \frac{t^2}{2} + \ldots + A_m \frac{t^m}{m!} \right) \cdot 1(t),$$

для расчета вынужденной составляющей ошибки используют метод коэффициентов ошибок. По этому методу передаточную функцию ошибки представляют в виде аналогичного ряда

$$W_\varepsilon(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \ldots + C_m s^m,$$

где C_0 – коэффициент статической (позиционной) ошибки от $k\times 1(t)$;
C_1 – коэффициент ошибки по скорости от линейной функции kt,
C_2 – коэффициент ошибки по ускорению от функции kt^2.

Сравнивая две формы записи передаточной функции ошибки, находят значения коэффициентов ошибок (в обоих случаях полиномы нужно начать со свободного члена, а дробь пронормировать по свободному члену знаменателя)

$$W_\varepsilon(s) = \frac{b_m + b_{m-1}s + \ldots + b_0 s^m}{a_n + a_{n-1}s + \ldots + a_0 s^n} = C_0 + C_1 S + C_2 s^2 + \ldots + C_m s^m;$$

$$s^0 \to b_m = a_n C_0 \qquad \to C_0 = \frac{1}{a_n} b_m,$$

$$s^1 \to \qquad \to C_1 = \frac{1}{a_n}\left(b_{m-1} - a_{n-1}C_0\right),$$

$$s^2 \to \qquad \to C_2 = \frac{1}{a_n}\left(b_{m-2} - a_{n-2}C_0 - a_{n-1}C_1\right) \text{ и т.д.}$$

Обычно вычисляют не более трех первых коэффициентов ошибок. Коэффициенты передачи составляющих входного воздействия вычисляются по ПФ разомкнутой системы и называются:

$K_{cm} = \dfrac{b_m}{a_n}$ – позиционная добротность;

$a_n = 0,\ \ K_\Omega = \dfrac{b_m}{a_{n-1}}$ – добротность по скорости;

$a_n = 0,\ \ a_{n-1} = 0,\ \ K_\varepsilon = \dfrac{b_m}{a_{n-2}}$ – добротность по ускорению.

Пример 1. Пусть допустимая статическая ошибка воспроизведения скачка задания не должна превышать значения $\varepsilon(\infty) = 2$ % или $\varepsilon(\infty) = 0{,}02$. Для этого необходимо иметь полный коэффициент усиления системы не менее

$$0{,}02 = \frac{1}{1 + k_c} \Rightarrow k_c = \frac{1 - 0{,}02}{0{,}02} = 49.$$

Пример 2. Определить полную статическую ошибку для системы (рисунок 1.72), полагая, что $r(t) = 1(t)$, $f(t) = 2{,}2(t)$.

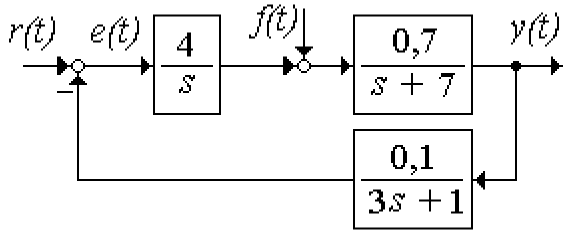


Рисунок 1.72

Выражение для суммарной ошибки в операторной форме

$$E(s) = \frac{s(s+7)(3s+1)}{s(s+7)(3s+1)+0,028}R(s) - \frac{0,07s}{s(s+7)(3s+1)+0,028}F(s).$$

Поскольку изображения входных сигналов равны $1/s$ и $2,2/s$, полная статическая ошибка будет равна $e(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = 0$. Благодаря интегратору $4/s$, значение ошибки от величины задания *r(t)* и возмущения *f(t)* не зависит. Система является астатической относительно обоих воздействий.

Пример 3. Определить три первых коэффициента ошибки, вынужденную составляющую ошибки от воздействия $r = r_0 + vt + at^2/2$ и добротность по скорости для системы, имеющей в разомкнутом состоянии ПФ $W(s) = \dfrac{k}{s + a_1 s^2 + a_0 s^3}$.

Находим передаточную функцию по каналу ошибки

$$W_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W_{раз}(s)} = \frac{s + a_1 s^2 + a_2 s^3}{k + s + a_1 s^2 + a_2 s^3} = \frac{\dfrac{1}{k}s + \dfrac{a_1}{k}s^2 + \dfrac{a_2}{k}s^3}{1 + \dfrac{1}{k}s + \dfrac{a_1}{k}s^2 + \dfrac{a_2}{k}s^3}.$$

Используя нормированную по k передаточную функцию, найдем три первых коэффициента ошибок

$$C_0 = 0, \qquad C_1 = \frac{1}{k} - 0 = \frac{1}{k}, \qquad C_2 = \frac{a_1}{k} - \frac{1}{k^2} - 0 = \frac{a_1 k - 1}{k^2}.$$

В общем виде вынужденная составляющая ошибки воспроизведения задающего воздействия равна $\varepsilon_r(t) = C_0 r(t) + C_1 r'(t) + C_2 r''(t)$. Для задающего воздействия $r = r_0 + vt + at^2/2$ находим производные $r' = v + at$, $r'' = a$ и установившуюся динамическую ошибку в любой момент времени $\varepsilon_r(t) = \frac{1}{k}(v + at) + \frac{a_1 k - 1}{k^2} a$. Добротность по скорости вычисляем по ПФ разомкнутой системы $K_\Omega = b_m / a_{n-1} = k/1 = k$.

Задания для самостоятельного решения.

1.5.5.1 Для системы (рисунок 1.73) определить относительную статическую и скоростную ошибки при *r(t)=5t×1(t)*

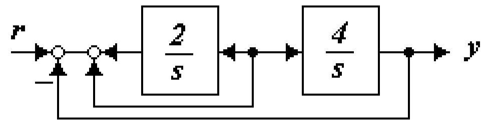


Рисунок 1.73

1.5.5.2 Оценить статизм системы (рисунок 1.74) после замыкания (k = 2)

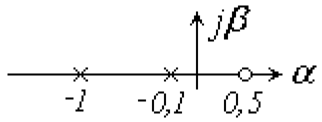


Рисунок 1.74

1.5.5.3 Рассчитать коэффициенты ошибок системы (рисунок 1.75) относительно задания

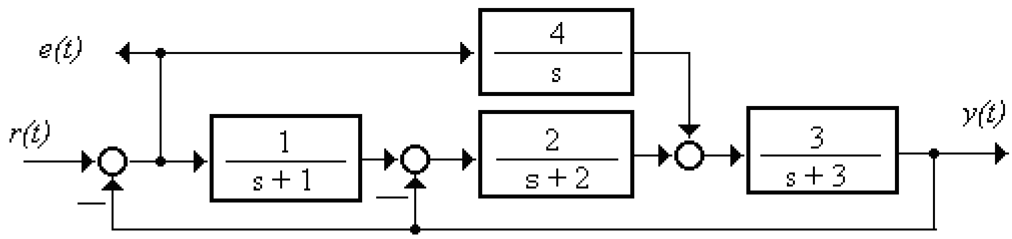


Рисунок 1.75

1.5.5.4 Найти коэффициенты ошибок по заданию C_0, C_1, C_2 системы (рисунок 1.76)

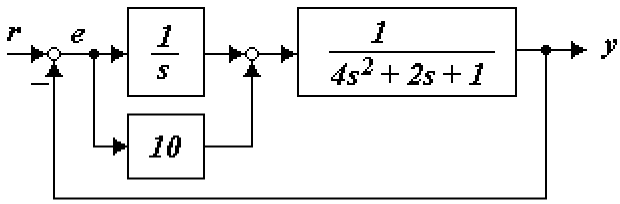


Рисунок 1.76

1.5.5.5 Определить величину установившейся ошибки в системе (рисунок 1.77)

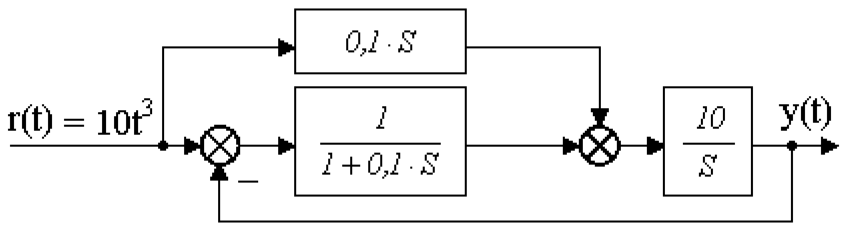


Рисунок 1.77

1.5.5.6 Для САУ с передаточной функцией разомкнутой системы $W(s)=(s+1)^2/s^3$ вычислить три первых коэффициента ошибок и оценить величину установившейся ошибки, если $r(t)=2t^2$.

1.5.5.7 Определить величину установившейся ошибки в системе (рисунок 1.78) при входном воздействии $r(t)=10t^2$.

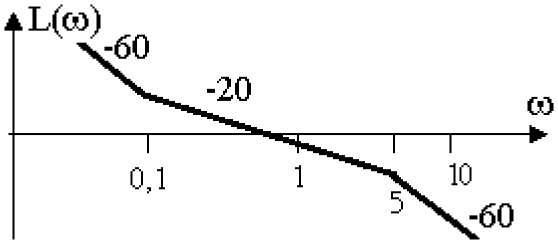


Рисунок 1.78

1.5.5.8 Определить величину установившейся ошибки в системе, если $r(t)=10t$ и передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(s)=\frac{12(0,5s+1)}{s^2(0,25s+1)}.$$

1.5.5.9 Написать общую формулу для определения при полиномиальном входном воздействии статической ошибки системы (рисунок 1.79). Определить статическую ошибку данной системы при $r(t)=1+2t$.

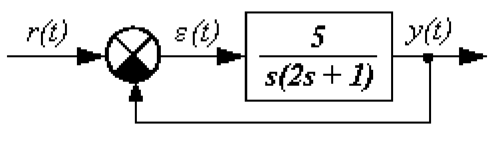


Рисунок 1.79

2 Многомерные системы регулирования

2.1 Переход к пространству состояний

При описании системы переменными состояния дифференциальному уравнению n-го порядка $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = b_0u$ соответствует система n дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши, разрешенных относительно производной.

Для перехода от ОДУ по методу фазовых переменных за первую переменную состояния принимают выходную величину, за остальные переменные состояния принимают n–1 производную выходной величины. Обязательно сначала нужно нормировать дифференциальное уравнение, т.е. делить обе части уравнения на коэффициент $a_0 \neq 1$ при старшей производной выходной функции (на старший коэффициент многочлена знаменателя передаточной функции).

Если порядок $m \neq 0$ многочлена числителя ПФ меньше порядка n многочлена знаменателя, общий коэффициент ПФ (коэффициент перед правой частью ОДУ) записывается в уравнение для старшей переменной состояния, а коэффициенты многочлена числителя – в обратном порядке в уравнение выхода.

По системе уравнений составляется матрица состояния **A** (из коэффициентов при x) и матрица входа **B** (из коэффициентов при входном воздействии u), по уравнению выхода составляется матрица выхода **C** (из коэффициентов при x)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Сопровождающая матрица **A** (матрица Фробениуса) может быть записана прямо по ОДУ (по характеристическому полиному системы)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & \ldots & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}.$$

По уравнениям состояния или матрицам **A**, **b**, **c** указанного вида легко восстановить ПФ или ОДУ, учитывая, что в последней строке сопровождающей матрицы **A** записаны с конца, с обратным знаком коэффициенты нормированного характеристического многочлена, а в матрице **c** – коэффициенты многочлена числителя передаточной функции в обратном порядке.

Пример 1. Дифференциальное уравнение объекта управления $\ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = 10u$. Выбираем переменные состояния $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$. В нормировании нет необходимости. Записываем для каждой из переменных состояния дифференциальное уравнение первого порядка, добавляем общее алгебраическое уравнение выхода

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - 5x_2 + 10u. \end{cases}$$
$$y = x_1$$

Пример 2. Пусть модель объекта управления имеет вид $2\ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = 10\dot{u} + 6u$, тогда после нормирования (деления на 2), считая общий коэффициент перед правой частью уравнения равным единице, получим описание системы в пространстве состояний матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3,5 & -2,5 \end{bmatrix}; \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения.

2.1.1 Записать передаточную функцию объекта регулирования, представленного в пространстве состояний моделью

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,5 & 1,5 \end{bmatrix}; \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3,2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Определить коэффициент усиления в установившемся режиме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$$

2.1.3 Записать матрицы коэффициентов **A**, **B**, **C** для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 + f \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 2x_3 + 0,2u \end{cases}$$
$$\begin{cases} e = -x_1 + 0,5u \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

2.1.4 Составить уравнения состояния и выхода по дифференциальному уравнению объекта регулирования $3\dddot{y}+6\dot{y}+9y=1{,}5\ddot{u}+6u$.

2.1.5 Определить матрицы **A**, **b**, **c** по дифференциальному уравнению объекта регулирования $0{,}5y^{(3)} + y^{(2)} + 2y^{(1)} + 4y = 3u^{(2)} + 5u$.

2.1.6 По модели объекта $2x''+3x'-4x=u$, $y=x-2x'$ записать уравнения состояния и наблюдения.

2.2 Канонические представления

Стандартные формы описания систем в пространстве состояний с сопровождающей матрицей **A** называются каноническими. Это каноническая управляемая форма (с упрощенной матрицей **b)** и каноническая наблюдаемая форма (с упрощенной матрицей **c**).

При $m = n$, т.е. одинаковых степенях полиномов числителя и знаменателя ПФ, появляется ненулевая матрица обхода **d**, которая содержит коэффициенты при входных воздействиях в уравнении выхода. Если матрица **d** нулевая, её можно не писать.

Пусть $W(s)=\dfrac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}+a_n}$, $m = n$, тогда вычисления для перехода к канонической управляемой форме имеют вид

$$d = b_0; \qquad c_1 = b_m - a_n \cdot d; \;\; c_2 = b_{m-1} - a_{n-1} \cdot d \ldots \text{ и т.п.}$$

При $d = b_0 = 0$ ($m<n$) в матрицу **c** просто записываются коэффициенты числителя передаточной функции, начиная со свободного члена.

Другой способ перехода к канонической управляемой форме: нужно разделить числитель ПФ на ее знаменатель, получившееся отдельно стоящее слагаемое (частное) поместить в матрицу **d**, а коэффициенты числителя полученной рациональной дроби (остатка) записать в матрицу **c** как обычно, начиная со свободного члена.

Порядок расчета элементов матриц **b** и **d** для перехода к канонической наблюдаемой форме (в этом случае элементы матрицы **b** необходимо вычислять даже при нулевой матрице **d**, т.е. при $m<n$).

Пусть $W(s)=\dfrac{k_0s^m+k_1s^{m-1}+\ldots+k_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n}$, $m = n$, тогда

$D = k_0 = b_0$,
$b_1 = k_1 - b_0a_1$,
$b_2 = k_2 - b_0a_2 - b_1a_1$,
$b_3 = k_3 - b_0a_3 - b_1a_2 - b_2a_1 \ldots$

К стандартным формам относится также описание с диагональной (модальной) матрицей **A**, когда по главной диагонали матрицы записывают её собственные значения (корни характеристического уравнения). К описанию с диагональной матрицей **A** переходят путем разложения исходного выражения на простые дроби.

Если матрица **A** не сопровождающая, а произвольного вида, ее характеристический многочлен нужно вычислять как определитель $D(s)=|s\mathbf{1}-\mathbf{A}|$, где s – комплексная переменная Лапласа, **1** – единичная матрица.

Корни характеристического уравнения $D(s)=|s\mathbf{1}-\mathbf{A}|=0$ являются собственными значениями матрицы А. Матрицы подобны, если имеют одинаковые собственные значения (характеристические многочлены и их корни).

Многомерная система устойчива, если все собственные значения матрицы состояний **A** имеют отрицательную действительную часть, иначе – все корни характеристического полинома являются левыми. Вычислив характеристическое уравнение системы $|s\mathbf{1}-\mathbf{A}|=0$, можно оценить ее устойчивость любым из известных способов.

Пример 1. Передаточная функция объекта $W(s)=\dfrac{3s^2+2s+1}{s^2+2s+3}$.

Каноническое управляемое представление (нормирование по a_0 не требуется, матрица **b** имеет стандартный вид, всегда одинаковый)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}-8 & -4\end{bmatrix};\quad \mathbf{d}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

где $d = b_0 = 3$,
$c_1 = b_2 - a_2d = 1 - 9 = -8$,
$c_2 = b_1 - a_1d = 2 - 6 = -4$.

Пример 2. По уравнению $y^{(3)} + 2y^{(2)} + 3y^{(1)} + 4y = 5u^{(1)} + 6u$ составим каноническую наблюдаемую форму. Нормирование по старшему коэффициенту знаменателя при s^n не требуется, так как он уже равен единице, многочлен числителя ПФ дополняем коэффициентами до той же степени, что и многочлен знаменателя

$$W(s)=\frac{0s^3+0s^2+5s+6}{s^3+2s^2+3s+4},$$

$$b_1=0-2\cdot 0=0$$
$$b_2=5-2\cdot 0-0\cdot 3=5$$
$$b_3=6-5\cdot 2-0\cdot 3-0\cdot 4=-4$$

матрица **d** нулевая, поскольку $m < n$, и окончательно (матрица **c** имеет стандартный вид, всегда одинаковый)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Перейти к переменным состояния разложением на простые дроби заданной передаточной функции

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{0{,}5}{s+1} + \frac{0{,}5}{s+3}.$$

Коэффициенты на главной диагонали матрицы **A** равны её собственным значениям (полюсам системы) $s_1 = -1$, $s_2 = -3$; структурная схема соответствует рисунку 2.1. Матрицы **b** и **c** включены последовательно, поэтому, если вычеты 0,5 и 0,5 вписаны в матрицу **b** (как показано), то в матрицу **c** записываются единицы, и наоборот.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 0{,}5u \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + 0{,}5u \end{cases} \quad \text{или} \quad [\dot{x}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot [x] + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = x_1 + x_2 \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [x]$$

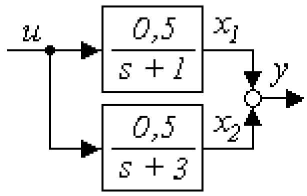


Рисунок 2.1

Пример 4. Оценить устойчивость системы, проверить подобие матрицы **A** и матрицы **AA**

Система $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, матрица $\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Характеристическая матрица

$$(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+6 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен (определитель характеристической матрицы) $det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = s(s+6) + 5 = s^2 + 6s + 5$. По критерию Гурвица система устойчива, т.к. все коэффициенты характеристического многочлена положительны.

Характеристический многочлен матрицы $\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ равен $|s\mathbf{1} - \mathbf{AA}| = \begin{vmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + 6s + 5$. Матрицы **A** и **AA** подобны, поскольку равны их характеристические многочлены.

Задания для самостоятельного решения.

2.2.1 Оценить устойчивость системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 1\end{bmatrix}*\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}*\mathbf{x}(t)$$

2.2.2 Описать в пространстве состояний каноническим наблюдаемым представлением, найдя передаточную функцию (рисунок 2.2)

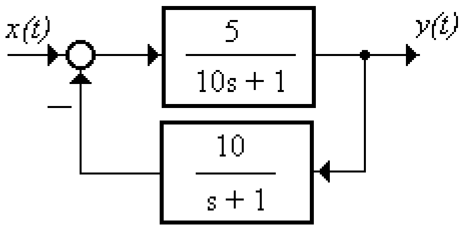


Рисунок 2.2

2.2.3 Описать каноническим управляемым представлением систему

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-2x_1-x_2+3u\end{cases}$$
$$y=x_1+4x_2$$

2.2.4 Описать в пространстве состояний с диагональной матрицей **A** объект, имеющий передаточную функцию

$$W(s)=\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}\,.$$

2.2.5 Представить канонической наблюдаемой формой систему $2y^{(4)}+3y^{(3)}+4y^{(2)}+6y^{(1)}+y=u^{(2)}+2u^{(1)}+3u$.

2.3 Описание по структурной схеме

На структурной схеме переменные состояния могут быть назначены разным образом, поэтому и описания системы в пространстве состояний будут отличаться. Все матрицы имеют нестандартный вид. Однако переменная всегда назначается на выходе блока с s в знаменателе, а ОДУ первого порядка для каждого такого блока записывают в зависимости от вида знаменателя:

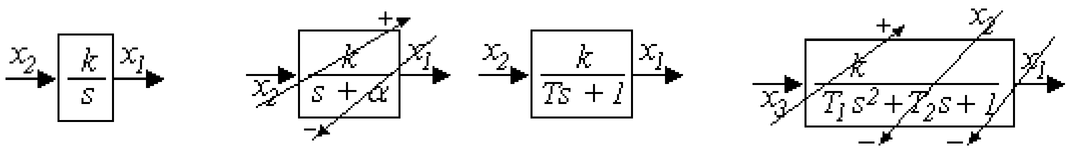
а) звено с нулевым корнем в знаменателе (рисунок 2.3, а)

$$dx_1/dt=kx_2 \text{ или } \dot{x}_1=kx_2;$$

б) звено с действительным корнем, две формы (рисунок 2.3, б)

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_2 - \alpha x_1 \text{ или } \dot{x}_1 = kx_2 - \alpha x_1; \qquad \dot{x}_1 = \frac{1}{T}\left(kx_2 - x_1\right).$$

Правая часть после нормирования равна произведению входа на числитель минус произведение выхода на коэффициент знаменателя.



а б в

Рисунок 2.3

Звено с комплексными сопряженными корнями (рисунок 2.3, в), не разлагается на два простых, поэтому вводят условно переменную состояния с промежуточным индексом и составляют два уравнения

$$\dot{x}_1 = x_2; \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{T_1}\left(kx_3 - T_2 x_2 - x_1\right).$$

Эта запись соответствует переходу от дифференциального уравнения к канонической форме наблюдаемости с нормированием по старшему коэффициенту знаменателя

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1} & -\frac{T_2}{T_1} \end{bmatrix}; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_1} \end{bmatrix}; \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Любой блок порядка $n>1$ может быть описан с использованием канонической наблюдаемой формы без его разложения на простые звенья. В особенности это важно, если блок имеет нули, т.е. порядок многочлена числителя его передаточной функции не ниже единицы.

$$W(s) = \frac{0s^2 + 0s + k/T_1}{s^2 + T_2/T_1 s + 1/T_1} \ \rightarrow \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/T_1 & -T_2/T_1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ k/T_1 \end{bmatrix}.$$

Умножая матрицу **A** на вектор $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ и вектор **b** на вход x_3, получаем систему уравнений, которую затем совмещаем с уравнениями оставшейся части структурной схемы.

Поскольку в пространстве состояний не могут быть отдельно описаны дифференцирующие и форсирующие звенья с $m > n$, то, получив в правой части уравнения дополнительную производную с индексом, меньшим текущего номера уравнения, ее пробуют выразить через значение, полученное ранее, в предыдущих дифференциальных уравнениях. Обычно это имеет место при обратных связях через s.

Пример 1. Описать систему (рисунок 2.4, а)

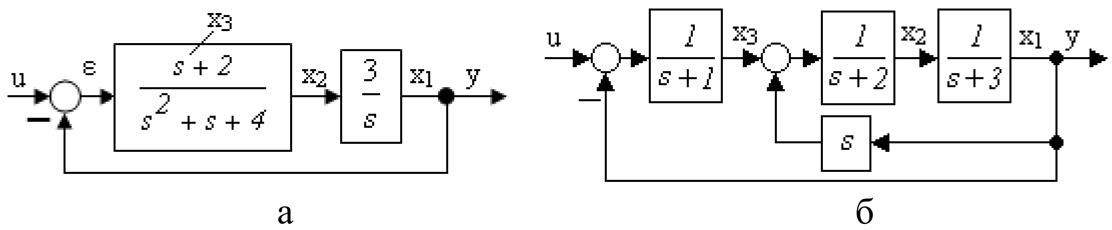


Рисунок 2.4

Сначала рассматриваем сложный блок с переменной s в числителе, учитывая, что вектор **c** для него составлен единственной единицей и в вычислениях не нуждается, а переменная состояния на выходе блока имеет индекс 2:

$$
\begin{aligned}
d &= k_0 = 0 \\
b_1 &= 1 - 0 = 1 \\
b_2 &= 2 - 1 - 0 = 1
\end{aligned}
\qquad \rightarrow \qquad
\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \varepsilon
$$

Затем описываем всю систему, включая в нее этот блок:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = 3x_2 \\
\begin{bmatrix} \dot{x}_2 = \ \ 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot \varepsilon \\ \dot{x}_3 = -4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 1 \cdot \varepsilon \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &= x_3 + u - x_1 \\ &= -4x_2 - 1 \cdot x_3 + u - x_1 \end{aligned}
\end{cases}
$$

$$y = x_1;$$

и окончательно

$$
[\dot{x}] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot [x] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u
$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [x]$$

Пример 2. Составляя уравнения состояния для случая, когда в цепи обратной связи есть звено дифференцирования с s (рисунок 2.4, б) учитываем, что умножение на s в операторной области соответствует взятию производной во временной области.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= -2x_2 + \dot{x}_1 + x_3 = -2x_2 - 3x_1 + x_2 + x_3 = -3x_1 - x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= -x_1 - x_3 + u
\end{aligned}
$$

Поскольку в правой части уравнений производных быть не должно, вместо производной подставляется ее значение, вычисленное ранее. Окончательно

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix};\ \ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\ \ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix};\ \ \mathbf{d}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения.

2.3.1 По структурной схеме (рисунок 2.5) составить полное описание системы в пространстве состояний матрицами **A**, **b**, **c** и **d**

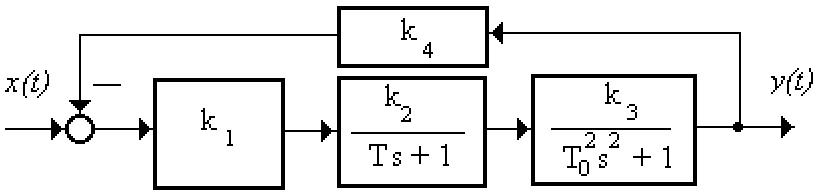


Рисунок 2.5

2.3.2 Найти, чему равна матрица **d** системы (рисунок 2.6)

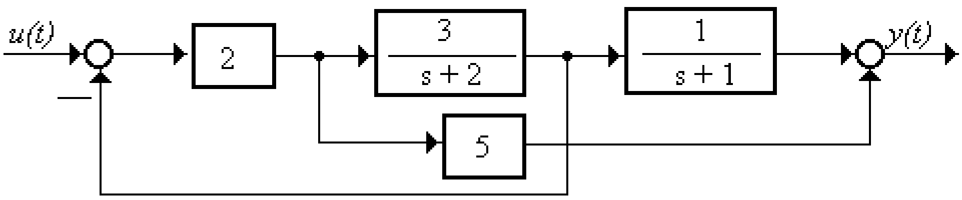


Рисунок 2.6

2.3.3 Описать переменными состояния систему (рисунок 2.7)

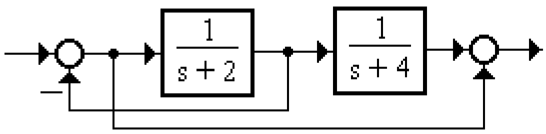


Рисунок 2.7

2.3.4 Описать переменными состояния систему (рисунок 2.8)

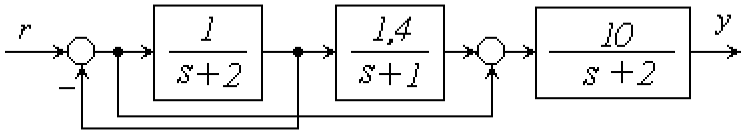


Рисунок 2.8

2.3.5 Описать переменными состояния систему (рисунок 2.9)

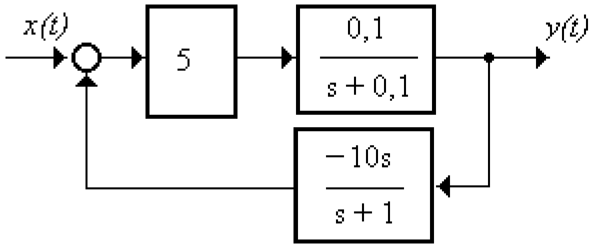


Рисунок 2.9

2.3.6 Описать переменными состояния систему (рисунок 2.10)

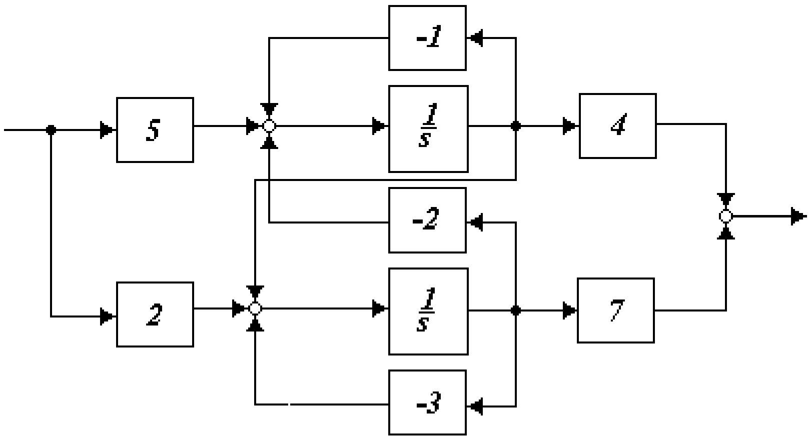


Рисунок 2.10

2.4 Синтез структурной схемы

Независимо от реальной конструкции, система в пространстве состояний может быть представлена набором интеграторов (звеньев $1/s$, осуществляющих операцию интегрирования входной величины по времени), сумматоров и блоков, воспроизводящих коэффициенты усиления в собственных и перекрестных связях.

Пример 1. Перейдем от матриц **A**, **b**, **c**, **d**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{d} = [0].$$

к структурной схеме (рисунок 2.11), для чего выбираем число звеньев (равно порядку матрицы **A**), определяем корни знаменателей ПФ по диагональным элементам матрицы **A** (s = -1 у блока с переменной x_1 на выходе и s = -3 у блока с переменной x_3), находим коэффициенты прямых связей – числители ПФ блоков между x_2 и x_1, между x_3 и x_2 (оба числителя равны 1). В схеме имеются две отрицательные обратные связи: единичная ООС от x_1 к x_3 и с коэффициентом 3 от x_2 к x_3. На входе системы находится блок с коэффициентом 2, выход y связан с системой через коэффициенты 1 матрицы **c**.

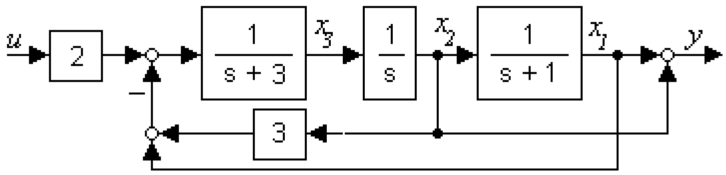


Рисунок 2.11

Пример 2. Построить структурную схему объекта, заданного системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -3x_1 - 5x_2 + 7u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Порядок объекта равен двум, используем два интегратора с сумматором на входе каждого. Назначаем переменные на выходах интеграторов, двигаясь от выхода схемы ко входу, значения всех производных формируются на входе интеграторов. Проводим связи на входы сумматоров в соответствии с видом уравнений. Например, производная x_1' образуется на входе последнего интегратора суммированием выходной переменной x_1 (с минусом) и переменной x_2, взятой с коэффициентом 2 (смотри первую строку системы дифференциальных уравнений). Сумматор на выходе необходим для образования выходной величины из переменных состояния, взятых с соответствующими коэффициентами $y = x_1 + x_2$ (рисунок 2.12).

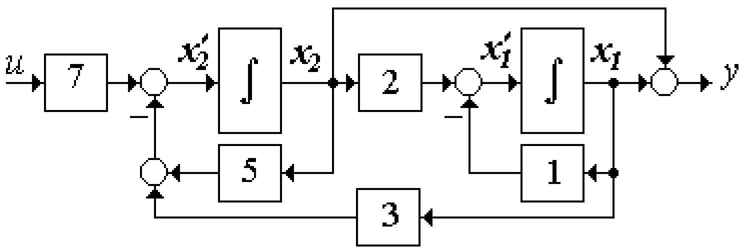


Рисунок 2.12

Пример 3. Построить структурную схему объекта по дифференциальному уравнению $y''' + 7y'' - 3y' + y = 2u$.

Поскольку порядок системы равен трем, используем три интегратора 1/s, включив их последовательно и установив сумматор на входе первого интегратора слева. К инвертирующему входу этого сумматора подключаем через согласующие сумматоры блоки с коэффициентами (по порядку): a_1 – с выхода первого интегратора, a_2 – с выхода второго интегратора, a_3 – с выхода третьего интегратора.

Если в правой части дифференциального уравнения нет производных, блок с коэффициентом b помещаем на входе главного сумматора (рисунок 2.13), в ином случае необходим еще один сумматор на выходе схемы, к которому через блоки с коэффициентами b_0-b_n подключают выходы интеграторов.

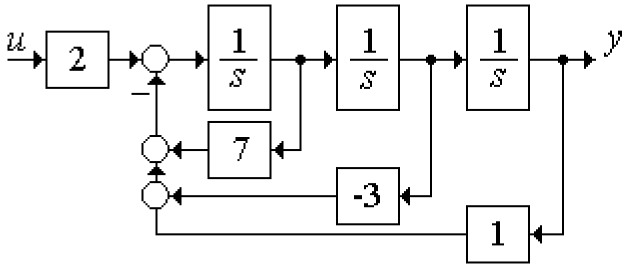


Рисунок 2.13

Задания для самостоятельного решения.

2.4.1 Перейти к структурной схеме от дифференциального уравнения объекта $2y''' + 6y'' + 8y' + 4y = 0,2u' + u$.

2.4.2 Изобразить структурную схему системы по уравнениям состояния

$$\begin{cases} x_1' = -6x_1 + x_2 + 2u, \\ x_2' = 2x_1 - 5x_2 - 3u, \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

2.4.3 Построить структурную схему на интеграторах

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 + 0.4u, \\ x'_2 = -2x_1 - 0.3x_2 + 5u, \\ y = 4x_1. \end{cases}$$

2.4.4 Составить структурную схему системы (рисунок 2.14), используя разложение ПФ на простые дроби

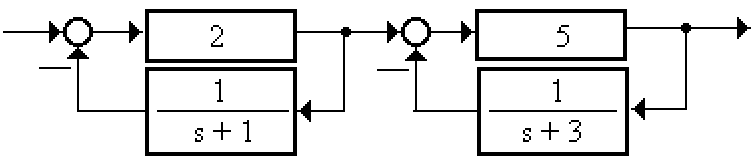


Рисунок 2.14

2.4.5 Составить структурную схему объекта по известной ПФ

$$W(s) = \frac{0,6s + 0,3}{0,1s^2 + 0,8s + 0,22}.$$

2.5 Основные матричные функции

($s\mathbf{1}$ – $\mathbf{A}$) – характеристическая матрица, аналог характеристического полинома одномерной системы $D(s)$.

$\mathbf{\Phi}(s)$ = $(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ – системная матрица (резольвента), называемая также передаточной матрицей или матрицей передаточных функций (МПФ) для переменных состояния, аналог системной функции $1/D(s)$.

$\mathbf{W}(s) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{\Phi}(s) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{D}$ – реальная МПФ для назначенных входов и выходов (передаточная матрица выходов), совпадает по виду с $\mathbf{\Phi}(s)$ только в частном случае.

Пример 1. Система задана в пространстве состояний матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица

$$(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином (определитель характеристической матрицы) $det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = s^2 + 2s + 1$.

Присоединенная матрица $adj(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}.$

Алгоритм вычисления присоединенной матрицы: каждый элемент исходной матрицы ($s\mathbf{1}$ – $\mathbf{A}$) заменяют его алгебраическим дополнением и полученная матрица транспонируется (приложение В).

Резольвента

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{adj(s\mathbf{1} - \mathbf{A})}{det(s\mathbf{1} - \mathbf{A})} =$$

$$= \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s^2+2s+1} & \dfrac{1}{s^2+2s+1} \\ \dfrac{-1}{s^2+2s+1} & \dfrac{s}{s^2+2s+1} \end{bmatrix},$$

матрица передаточных функций выходов

$$\mathbf{W}(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+2s+1}\begin{bmatrix}s+2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{3}{s^2+2s+1}$$

Задания для самостоятельного решения.

2.5.1 Найти индивидуальную передаточную функцию $W_{13}(s)$, переведя в пространство состояний систему

$$W(s)=\frac{12}{(0{,}5s+1)(0{,}1s+1)s}$$

2.5.2 От структурной схемы (рисунок 2.15) перейти классическим методом к описанию системы в пространстве состояний системной матрицей $\mathbf{\Phi}(s)$

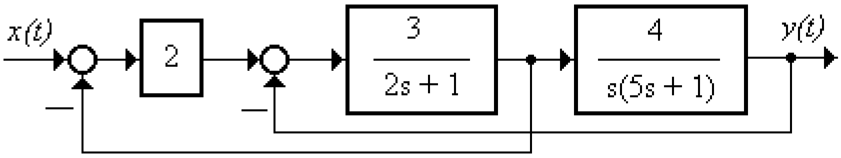


Рисунок 2.15

2.5.3 Вычислить присоединенную матрицу (k = 3,4) системы (рисунок 2.16)

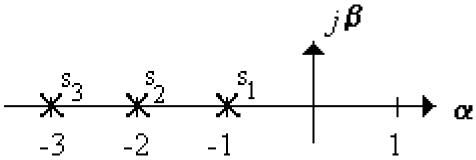


Рисунок 2.16

2.5.4 От структурной схемы (рисунок 2.17) перейти к описанию системы в переменных состояния, вычислить передаточную матрицу выходов

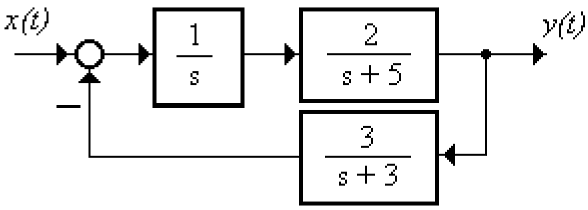


Рисунок 2.17

2.5.5 Определить матрицу $\mathbf{W}(s)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

2.5.6 Найти характеристическую матрицу системы (рисунок 2.18)

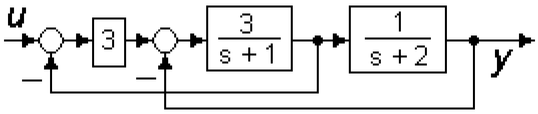


Рисунок 2.18

2.5.7 Определить реальную передаточную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2.5.8 Найти системную матрицу объекта (рисунок 2.19)

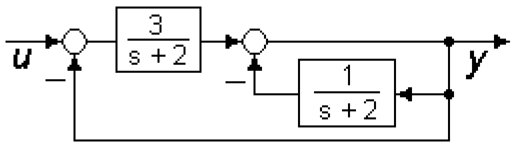


Рисунок 2.19

2.6 Решение уравнения движения

Решение дифференциального уравнения для переменных состояния $\mathbf{x}(t)$, т.е. изменение вектора состояния при известном векторе управления и начальных условиях (внутри системы), в общем виде

$$\mathbf{X}(s) = (s \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot U(s) + (s \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{x}(0).$$

Реакция на выходе системы вычисляется с учетом матрицы $\mathbf{c}$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{c} \cdot (s \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot U(s) + \mathbf{c} \cdot (s \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{x}(0).$$

$$\text{Свободная составляющая} \quad \begin{cases} \mathbf{\Phi}(s) \cdot \mathbf{x}(0) & \text{– внутри системы,} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{\Phi}(s) \cdot \mathbf{x}(0) & \text{– на ее выходах.} \end{cases}$$

Вынужденная составляющая $\begin{cases} \mathbf{\Phi}(s)\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{U}(s) & \text{– внутри системы,} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{\Phi}(s)\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{U}(s) & \text{– на ее выходах.} \end{cases}$

Если система задана в наблюдаемой форме с упрощенной матрицей **c**, вместо вектора начальных значений переменных состояния **x**(0) может непосредственно использоваться вектор **y**(0) начальных значений рассогласования, скорости, ускорения и т. п. на выходе системы. В ином случае необходимо преобразование **y**(0) в **x**(0) с учетом коэффициентов матрицы **c**.

Матрицы, элементами которых являются весовые $g_{ij}(t)$ или переходные $h_{ij}(t)$ функции объекта, называются соответственно весовой (импульсной) $\mathbf{g}(t)$ и переходной $\mathbf{h}(t)$ матрицами. Их изображения определяют обычным способом.

$$\mathbf{g}(t)\div\mathbf{G}(s)=\left[\mathbf{c\Phi}(s)\mathbf{b}+\mathbf{D}\right]\cdot\mathbf{1} \quad \text{– весовая матрица,}$$

$$\mathbf{h}(t)\div\mathbf{H}(s)=\left[\mathbf{c\Phi}(s)\mathbf{b}+\mathbf{D}\right]\cdot\mathbf{1}\frac{1}{s} \quad \text{– переходная матрица.}$$

Пример 1. Найти при $u(t) = \delta(t)$ и начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$ уравнения движения системы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix};\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система задана в наблюдаемой форме с матрицей **c** = [1 0], поэтому вектор начальных значений переменных формируем по выходу

$$\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица

$$(s\mathbf{1}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином (определитель характеристической матрицы) $det(s\mathbf{1}-\mathbf{A})=s^2+2s+1$.

Резольвента $(s\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1}=\dfrac{adj(s\mathbf{1}-\mathbf{A})}{det(s\mathbf{1}-\mathbf{A})}$, где присоединенная матрица

$$adj(s\mathbf{1}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{c}\cdot\mathbf{\Phi}(s)\cdot\mathbf{x}(0)+\mathbf{c}\cdot\mathbf{\Phi}(s)\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{U}(s)=$$

$$=\frac{1}{s^2+2s+1}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+2s+1}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{s^2+2s+1}\begin{bmatrix}s+2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+2s+1}\begin{bmatrix}s+2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^2+2s+1}(s+2-1)+\frac{1}{s^2+2s+1}\cdot 4=\frac{s+1}{(s+1)^2}+\frac{4}{(s+1)^2}$$

Заменяем по таблице соответствия изображения на оригиналы

$$y(t)=\underbrace{e^{-t}}_{y_{св}(t)}+\underbrace{4te^{-t}}_{y_{вын}(t)}$$

Пример 2. Найти изображение реакции на $f(t)$ = 3e^{-t} системы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Изображение входного воздействия $F(s) = 3/(s+1)$.

$$Y(s)=\frac{1}{|s\mathbf{1}-\mathbf{A}|}\cdot\mathbf{c}\cdot adj(s\mathbf{1}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{b}\cdot\begin{bmatrix}F(s)\\ U(s)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^2+6s+5}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/(s+1)\\ 0\end{bmatrix}=\frac{3(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Задания для самостоятельного решения.

2.6.1 Найти свободную составляющую переходного процесса системы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix};\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

при начальных условиях $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 0$ и собственных значениях $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$ матрицы **A**.

2.6.2 При воздействиях $u(t) = 1(t)$ и $f(t) = 3(t)$ найти реакцию $y(t)$ системы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix};\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

2.6.3 Найти переходную функцию для переменных состояния **x**(t) системы

$$\mathbf{\Phi}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1,5}{s+1}-\dfrac{0,5}{s+3} & \dfrac{0,5}{s+1}-\dfrac{0,5}{s+3}\\ \dfrac{-1,5}{s+1}+\dfrac{1,5}{s+3} & \dfrac{-0,5}{s+1}+\dfrac{1,5}{s+3}\end{bmatrix}$$

2.6.4 Рассчитать весовую матрицу системы (рисунок 2.20) при значениях параметров $k_1 = 1$, $k_2 = 12$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0,1$.

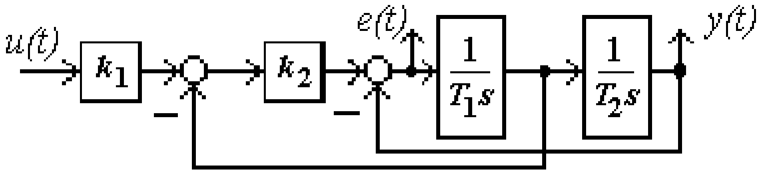


Рисунок 2.20

2.6.5 Оценить устойчивость системы, если

$$\mathbf{\Phi}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s-3}\end{bmatrix}.$$

2.7 Вычисление фундаментальной матрицы

Поскольку $(s\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1} \div e^{\mathbf{A}t}$, то фундаментальную матрицу $\mathbf{\Phi}(t)$ определяют как матричную экспоненту от $\mathbf{A}\cdot t$ тремя способами:

а) разложением в бесконечный $\sum \mathbf{A}^k \dfrac{t^k}{k!}$ или конечный ряд

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{1}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!}+\ldots+\mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!},$$

где n – порядок системы.

Точность расчета снижается из-за конечного числа членов ряда. Способ полезен в случаях, когда невозможно найти корни характеристического уравнения системы, либо производится расчет для конкретного момента времени t.

б) по формуле Сильвестра $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{\alpha_k t}\left[M_k\right]$, где α_k – собственные значения матрицы **A** (корни характеристического уравнения системы), или в развернутом виде

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = e^{\alpha_1 t}\left[M_1\right] + e^{\alpha_2 t}\left[M_2\right] + \ldots + e^{\alpha_n t}\left[M_n\right].$$

Здесь $\left[M_j\right] = \dfrac{\prod\limits_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}([A]-\alpha_i[1])}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}(\alpha_j - \alpha_i)}$ – все разности для других корней (числитель), – все разности этого корня с другими (знаменатель).

Особенности метода – коэффициенты сразу получаются в матричном виде, но обязательно нужно знать корни характеристического уравнения. Приведенная формула пригодна для простых действительных корней характеристического уравнения, для кратных корней используется более сложная формула.

в) Наконец, $\mathbf{\Phi}(t)$ вычисляется и как обратное преобразование Лапласа от системной матрицы $\mathbf{\Phi}(s)$, или $\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\{(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\}$.

Здесь также нужно обязательно знать корни, требуется многократное поэлементное преобразование, но зато способ пригоден для любых корней (комплексных, кратных, простых).

Пример 1. Определим матричную экспоненту для системы с $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Поскольку уже при $k = 2$ получена нулевая матрица

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

расчет далее можно не продолжать и результат записывается в виде

$$\mathbf{\Phi}(t) = 1 + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Определить $\mathbf{\Phi}(t)$ методом Сильвестра для системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

Вычисляем характеристический полином, находим его корни

$$\left|s\mathbf{1} - \mathbf{A}\right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{vmatrix} = s^2 + 4s + 3; \qquad s_1 = -1;\ s_2 = -3.$$

Вычисляем матрицы коэффициентов при собственных модах системы

$$\mathbf{M}_{-1}=\frac{\begin{bmatrix}0 & 1\\-3 & -4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}{-1-(-3)}=\begin{bmatrix}3 & 1\\-3 & -1\end{bmatrix}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}1,5 & 0,5\\-1,5 & -0,5\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{-3}=\frac{\begin{bmatrix}0 & 1\\-3 & -4\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}{-3-(-1)}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-3 & -3\end{bmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}-0,5 & -0,5\\1,5 & 1,5\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\Phi}(t)=\left[M_{-1}\right]e^{-t}+\left[M_{-3}\right]e^{-3t}=\begin{bmatrix}1,5 & 0,5\\-1,5 & -0,5\end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix}-0,5 & -0,5\\1,5 & 1,5\end{bmatrix}e^{-3t}.$$

Пример 3. Определить с помощью обратного преобразования Лапласа фундаментальную матрицу системы $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-3 & -4\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}$.

Находим корни характеристического полинома и адъюнкту

$$\left|s\mathbf{1}-\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}s & -1\\3 & s+4\end{vmatrix}=s^2+4s+3; \qquad s_1=-1;\ s_2=-3.$$

$$adj(s\mathbf{1}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix}s+4 & 1\\-3 & s\end{bmatrix};\ \mathbf{\Phi}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+4}{s^2+4s+3} & \dfrac{1}{s^2+4s+3}\\ \dfrac{-3}{s^2+4s+3} & \dfrac{s}{s^2+4s+3}\end{bmatrix}.$$

Общий вид разложения на простые дроби

$$\Phi_{ij}=\frac{N_{ij}(s)}{D(s)}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+3}=\frac{N(s)}{(s+1)(s+3)}.$$

Находим коэффициенты числителей простых дробей:

$\Phi_{11}(s)\rightarrow N_{11}(s)=s+4;$ $k_1=1,5;\ k_2=-0,5$

$\Phi_{12}(s)\rightarrow N_{12}(s)=1;$ $k_1=0,5;\ k_2=-0,5$

$\Phi_{21}(s)\rightarrow N_{21}(s)=-3;$ $k_1=-1,5;\ k_2=1,5$

$\Phi_{22}(s)\rightarrow N_{22}(s)=s;$ $k_1=-0,5;\ k_2=1,5,$

откуда получаем вид системной и фундаментальной матриц

$$\mathbf{\Phi}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1,5}{s+1}-\dfrac{0,5}{s+3} & \dfrac{0,5}{s+1}-\dfrac{0,5}{s+3}\\ \dfrac{-1,5}{s+1}+\dfrac{1,5}{s+3} & \dfrac{-0,5}{s+1}+\dfrac{1,5}{s+3}\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 1{,}5e^{-t}-0{,}5e^{-3t} & 0{,}5e^{-t}-0{,}5e^{-3t} \\ -1{,}5e^{-t}+1{,}5e^{-3t} & -0{,}5e^{-t}+1{,}5e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Найдем, например, реакцию на начальные условия $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$ данной системы по известной $\mathbf{\Phi}(t)$, если $\mathbf{c}$=[1 0].

$$y_{св}(t)=\mathbf{c}\cdot\mathbf{\Phi}(t)\cdot\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=3e^{-t}-e^{-3t}.$$

Задания для самостоятельного решения.

2.7.1 Вычислить функцию $e^{\mathbf{A}t}$, если матрица **A** системы равна

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix},$$

2.7.2 Вычислить фундаментальную матрицу системы

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\cdot u$$

2.7.3 Найти матрицу $\mathbf{\Phi}$(s) для системы с функцией

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

2.7.4 Найти реакцию на начальные условия $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, используя матричную экспоненту $\mathbf{\Phi}(t)$.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

2.7.5 Записать реакцию $\Phi_{12}(t)$ для системы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-10 & -7\end{bmatrix}$$

2.7.6 Рассчитать фундаментальную матрицу методом Сильвест-ра

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-3 & -4\end{bmatrix}$$

2.8 Управляемость и наблюдаемость систем

Для управляемости системы необходимо и достаточно, чтобы матрица управляемости вида $\mathbf{Q} = [\mathbf{B}|\ \mathbf{AB}|\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}|\ldots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ имела ранг, равный n. При управляемости системы говорят также, что пара ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) управляема.

Ранг матрицы (Rank) равен порядку её наибольшего ненулевого минора. Матрица $\mathbf{Q}$ составляется присоединением справа к матрице $\mathbf{B}$ произведения матриц $\mathbf{AB}$, затем произведения $\mathbf{A}(\mathbf{AB})$ и т.д. Размерность матрицы $\mathbf{Q}$ равна $(n \times nr)$, где r – число входов. Если ранг матрицы $\mathbf{B}$ (обозначим его R_B) не равен единице, то вычисление матрицы $\mathbf{Q}$ можно закончить досрочно по формуле $\mathbf{Q}=[\mathbf{B};\ \mathbf{AB};\ \ldots;\ \mathbf{A}^{n-Rb}\mathbf{B}]$.

Система полностью управляема при Rank$\mathbf{Q} = n$, полностью неуправляема при Rank$\mathbf{Q} = 0$, частично управляема при $0 <$ Rank$\mathbf{Q} < n$, порядок управляемости равен Rank$\mathbf{Q}$.

Для наблюдаемости системы необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости $\mathbf{N} = [\mathbf{c}^T;\ \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T;\ (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{c}^T;\ \ldots;\ (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c}^T]$ имела ранг, равный порядку системы n. Символ Т означает транспонирование или перевод вектора-строки в вектор-столбец. Говорят иначе, что пара ($\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$) наблюдаема.

Система полностью наблюдаема при Rank$\mathbf{N} = n$, полностью ненаблюдаема при Rank$\mathbf{N} = 0$, частично наблюдаема при $0 <$ Rank$\mathbf{N} < n$, порядок наблюдаемости равен Rank$\mathbf{N}$.

Если ранг матрицы $\mathbf{C}$ (обозначим его R_C) больше единицы, то число вычислений можно сократить, пользуясь формулой

$$\mathbf{N} = [\mathbf{c}^T;\ \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T;\ (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{c}^T;\ \ldots;\ (\mathbf{A}^T)^{n-Rc}\mathbf{c}^T].$$

Существует и иная форма составления матрицы наблюдаемости – по вертикали без транспонирования

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \ldots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Если сокращены одинаковые нули и полюса, передаточная функция $W(s)$ и матрица передаточных функций $\mathbf{W}(s) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{\Phi}(s) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{D}$ описывают только управляемую и наблюдаемую часть системы. Наличие сокращаемых пар нуль-полюс приводит к неуправляемости (ненаблюдаемости) системы. При диагональной матрице $\mathbf{A}$ уже можно говорить о неполной управляемости или наблюдаемости системы, если соответственно матрица $\mathbf{b}$ или $\mathbf{c}$ содержит нулевые элементы.

Пример 1. Оценить управляемость системы (достаточно иметь пару **A** и **b**).

Система: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + u \end{cases}$. Находим $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Определитель матрицы управляемости $|\mathbf{Q}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, следовательно, ранг матрицы равен двум, что равно порядку системы $n = 2$, система полностью управляема.

Задачу можно было не решать: числитель ПФ содержит только 1 (это видно из матрицы **b**), следовательно, сокращаемые пары нуль-полюс отсутствуют и система полностью управляема.

Пример 2. Оценить управляемость системы.

Система: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - u \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + u \end{cases}$

Матрица **A** диагональная (в каждой строке одна переменная с возрастающим индексом). Уже ясно, что система неуправляема по x_1 (по полюсу +1), поскольку в первом уравнении нет u. Проверим вывод.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix};\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \text{т.к. } \Delta_3 = 0\text{, а } \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то Rank**Q** $= 2 \neq n = 3$. Система частично управляема, порядок управляемости равен двум.

Пример 3. Оценить наблюдаемость системы

$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = u \end{cases}$, записываем $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5 \end{bmatrix}$

$y = x_2$

$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}^T\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & | & \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 \end{bmatrix};\ \text{либо иначе } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом того, что $\Delta_2 = 0$; $\Delta_1 = 1{,}5$, делаем вывод, что Rank**N** = 1 – система частично наблюдаема, порядок наблюдаемости равен 1.

Пример 4. Проверить управляемость системы $W(s) = \dfrac{s+1}{s^2+3s+2}$.

Передаточная функция W(s)=(s + 1)/(s + 1)/(s + 2) содержит сокращаемую пару (диполь) нуль -1/полюс -1, что ведет либо к неуправляемости, либо к ненаблюдаемости системы. От чего это будет зависеть? Составим описание системы в канонической управляемой форме и проверим управляемость

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix};\ |\mathbf{Q}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1;\ \text{RankQ} = 2.$$

Система в таком представлении полностью управляема (но не вполне наблюдаема). Составим описание системы в канонической наблюдаемой форме и снова проверим управляемость

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix};\ \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix};\ |\mathbf{Q}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0;\ \text{RankQ} = 1.$$

А теперь система управляема частично. Таким образом, если в ПФ системы обнаруживается сокращаемая пара, неуправляемость или ненаблюдаемость зависит от того, какое представление выбирается для перехода в пространство состояний. Если же в ПФ сокращаемые пары отсутствуют, система полностью управляема и наблюдаема.

Задания для самостоятельного решения.

2.8.1 Проверить управляемость объекта $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+5s+6}$.

2.8.2 Проверить управляемость объекта

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 0$$
$$y = x_2$$

2.8.3 Проверить управляемость объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = x_2 - 5x_3 - u \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_3 + u \end{cases}$$
$$y = x_1$$

2.8.4 Проверить наблюдаемость объекта $W(s)=\frac{2s+1}{s^2+5s+6}$.

2.8.5 Проверить наблюдаемость объекта (рисунок 2.21)

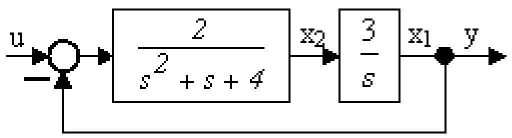


Рисунок 2.21

2.8.6 Проверить управляемость объекта

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

2.8.7 Оценить наблюдаемость системы

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\cdot u$$

2.8.8 Оценить наблюдаемость системы

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2;$$
$$\frac{dx_2}{dt}=u;$$
$$y=x_2$$

2.9 Наблюдатели состояния

Если не все переменные состояния объекта регулирования измеряются, либо имеют место существенные искажения (помехи), используют специальное оценивающее устройство – наблюдатель.

Наблюдатель в виде параллельного фильтра представляет собой модель объекта регулирования на интеграторах в каноническом управляемом представлении. Его вход подключается параллельно входу объекта регулирования, а с выходов интеграторов снимают идеальные значения переменных состояния объекта (оценки), которые обозначают значком «каре» ^ над символом переменной. Разница значений выходов объекта и наблюдателя называется невязкой (обозначается значком «тильда» ~ над символом сигнала), при совпадении модели с оригиналом невязка стремится к нулю.

Если объект управления неустойчив, либо требуется ускорить переходный процесс в наблюдателе, наблюдатель строят в виде фильтра Калмана. В нём сигнал невязки через компенсирующее звено или корректирующие обратные связи подается на вход наблюдателя вместе с обычным входным сигналом, и, если невязка не равна нулю, переходный процесс принудительно демпфируется.

Пример 1. Построить наблюдатель в виде параллельного фильтра к объекту с передаточной функцией $W(s) = 3s/(2s^2 + 4s + 1)$.

Модель объекта (описание наблюдателя) соответствует канонической форме управляемости

$$W(s) = \frac{1,5s}{s^2 + 2s + 0,5}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Этому описанию отвечает структурная схема (рисунок 2.22)

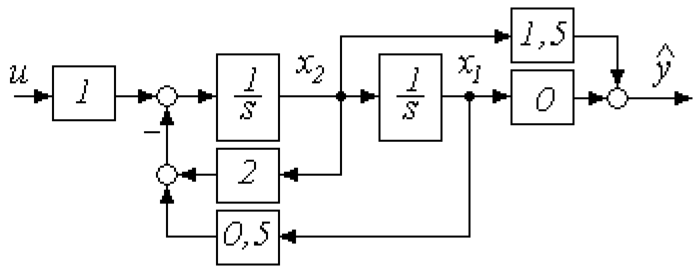


Рисунок 2.22

Пример 2. Построим наблюдатель в виде фильтра Калмана для объекта, заданного системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \\ y = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

обеспечив показатели качества переходного процесса ошибки наблюдателя $t_{\text{рег}} = 1$ с, $\sigma = 30$ %.

По матрицам коэффициентов объекта регулирования определяем его передаточную функцию (объект неустойчив)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_O(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{3s - 8}{s^2 - 2s + 4}.$$

В фильтре Калмана второго порядка с дифференциальным уравнением $p^2y + a_1py + a_2y = bu$ компенсирующая добавка образуется обратными связями с коэффициентами k_1, k_2 (рисунок 2.23).

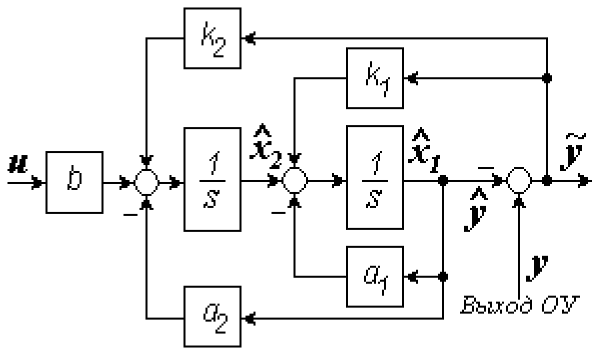


Рисунок 2.23

В соответствии с матрицей $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(a_1 + k_1) & 1 \\ -(a_2 + k_2) & 0 \end{bmatrix}$ характеристический полином наблюдателя имеет вид $D(s) = s^2 + (a_1 + k_1)s + (a_2 + k_2)$ или $D(s) = s^2 + (-2 + k_1)s + (4 + k_2)$.

Исходя из требований к качеству переходного процесса наблюдателя модуль действительной части α_{min} корней его характеристического уравнения при $\Delta = 5$ % должен быть не менее, чем $3/t_{рег} = 3$, тогда мнимая часть равна $\beta = -\pi\alpha_{min}/\ln(\sigma) = -3{,}1415926*3/\ln(0{,}3) = 7{,}83$. По двум выбранным корням $-3 \pm j7{,}83$ определяем вид желаемого устойчивого характеристического полинома $D_{ж}(s) = s^2 + 6s + 70{,}27$.

Из равенства $D(s) = D_{ж}(s)$ находим неизвестные коэффициенты корректирующих обратных связей $k_1 = 6 + 2 = 8$, $k_2 = 70{,}27 - 4 = 66{,}27$.

Пример 3. Рассчитать параметры наблюдателя в виде фильтра Калмана (рисунок 2.24) с компенсирующим звеном, имеющим передаточную функцию $L(s) = k(\tau_1 s + 1)/(\tau_2 s + 1)$, при тех же требованиях к качеству переходного процесса наблюдателя и параметрах ПФ модели объекта регулирования $W_о(s)$.

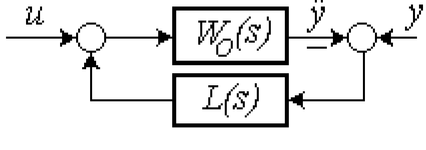


Рисунок 2.24

Передаточная функция модели объекта регулирования равна

$$W_O(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{3s-8}{s^2-2s+4} = \frac{B(s)}{A(s)},$$

а характеристическое уравнение наблюдателя имеет вид

$$D(s) = A(s) + B(s)L(s) = 0,$$

откуда, приравняв числитель нулю и нормируя, получаем

$$s^3 + \frac{1-2\tau_2+3k\tau_1}{\tau_2}s^2 + \frac{4\tau_2-2+3k-8k\tau_1}{\tau_2}s + \frac{4-8k}{\tau_2} = 0.$$

Желаемый характеристический полином третьего порядка формируем из корней с одинаковой действительной частью $-3 \pm j7{,}83$ и -3, он равен $D_ж(s) = s^3 + 9s^2 + 88s + 211$. Приравнивая $D(s) = D_ж(s)$, находим неизвестные коэффициенты k, τ_1 и τ_2.

Задания для самостоятельного решения.

2.9.1 Определить значение $L(s) = K$ из условия требуемой относительной статической ошибки наблюдателя $S_u = 0{,}02$ при значениях свободных членов передаточной функции модели $b_m = 10$; $a_n = 4$.

2.9.2 Определить значение $L(s) = K$ из условия устойчивости наблюдателя, если ПФ объекта равна $W_о(s) = 3/(s^2 - 2s + 2)$.

2.9.3 Рассчитать параметры и построить структурную схему наблюдателя состояния для объекта регулирования с передаточной функцией $W(s) = 2(s + 1)/(4s^2 + 8s + 1)$.

2.9.4 При требованиях к качеству переходного процесса ошибки наблюдения $t_{рег} = 6$ с; $\sigma = 15$ % разработать наблюдатель состояния для объекта регулирования, описываемого уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 5x_2 + u \end{cases}$$
$$y = 3x_1 + x_2$$

2.9.5 Разработать наблюдатель состояния с качеством переходного процесса ошибки наблюдения $t_{рег} = 5$ с; $\sigma = 30$ % для объекта регулирования, описываемого ПФ $W(s) = (2s + 1)/(s^2 + 1)$.

2.9.6 При качестве переходного процесса ошибки наблюдения $t_{рег} = 12$ с; $\sigma = 15$ % создать наблюдатель для объекта регулирования

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$
$$y = x_1$$

2.10 Проектирование модального регулятора

Модальным называется регулятор, параметры которого выбраны по желаемому характеристическому многочлену замкнутой системы управления. Полагаем, что все переменные состояния объекта управления доступны для измерения, и рассмотрим случай, когда используется П-регулятор. Модель объекта управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + bu \end{cases}$$
$$y = x_1$$

Закон управления для объекта второго порядка имеет вид

$$u = Kr - k_1 x_2 - k_2 x_1$$

где K – коэффициент усиления П-регулятора, r – задание, k_1, k_2 – коэффициенты обратных связей регулятора по переменным состояния.

Подставив значение u в уравнение состояния, получим систему уравнений, которая описывает замкнутую систему управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(a_2 + bk_2)x_1 - (a_1 + bk_1)x_2 + bKr \end{cases},$$
$$y = x_1$$

и характеристический полином замкнутой системы

$$D(s) = s^2 + (a_1 + bk_1)s + (a_2 + bk_2).$$

Неизвестные коэффициенты k_1 и k_2 обратных связей по переменным состояния объекта можно определить из равенства полиному желаемого вида $D_ж(s)$. Последний либо выбирают на основе заданных значений перерегулирования σ % и времени регулирования $t_п$. из типовых (приложение Г), либо рассчитывают самостоятельно. Например, параметры качества регулирования σ = 4,5 %, $t_р$ = 2,9 с при отсутствии нулей обеспечит нормированный полином Баттерворта второго порядка

$$D_ж(s) = s^2 + d_1 s + d_2 = s^2 + 1{,}14s + 1.$$

Приравняв коэффициенты полиномов при одинаковых степенях s, получим $k_1 = (d_1 - a_1)/b$, $k_2 = (d_2 - a_2)/b$. Расчет существенно упрощается, если объект представлен в канонической форме управляемости с $b = 1$.

Коэффициент усиления K обычно находят из условия нулевой статической ошибки: либо по коэффициентам передаточной функции $bK/(a_2 + k_2) = 1$, откуда $K = (a_2 + k_2)/b = d_n/b_m$, либо из инверсии матричной передаточной функции $K = (\mathbf{c}(-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b})^{-1}$ при $s = 0$.

Если для измерения доступна только одна величина на выходе $y(t)$, для создания обратных связей по переменным состояния устанавливают наблюдатель, либо в цепи главной обратной связи системы используют ПД-регулятор (форсирующее звено) с эквивалентной передаточной функцией $H_{eq}(s)$.

Пример 1. Рассчитать параметры модального регулятора для объекта

$$W_o(s) = \frac{k_o}{s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{5}{s^2 + 3s - 1}$$

при требованиях к качеству регулирования $t_n \le 3$ с; $\sigma = 0$ % , $e(\infty) = 0$. Регулятор состоит из двух частей: обеспечивающей статические характеристики системы $W_s(s)$ и обеспечивающей динамические характеристики $W_d(s)$ (рисунок 2.25), для измерения доступна только выходная переменная y объекта.

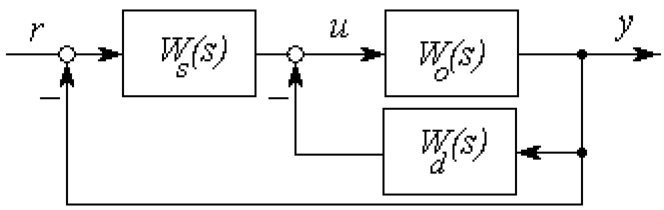


Рисунок 2.25

Выберем интегратор (И-регулятор) в качестве $W_s = k/s$, чтобы обеспечить нулевую статическую ошибку $e(\infty) = 0$; пусть составляющая регулятора, обеспечивающая заданные динамические свойства равна $W_d(s) = (d_1 s + d_2)/k_o$; здесь k, d_1, d_2 – неизвестные коэффициенты, k_o – коэффициент передачи объекта регулирования.

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы равно

$$D(s) = s(s^2 + 3s - 1 + d_1 s + d_2) + 5k = 0$$

или

$$D(s) = s^3 + (d_1 + 3)s^2 + (d_2 - 1)s + 5k = 0$$

Выберем распределение корней, обеспечивающее заданное качество процессов, например, $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -2{,}5$; $\lambda_3 = -3$ (все действительные полюса обеспечат нулевое перерегулирование и время регулирования не более 3/2 = 1,5 с). Сформируем желаемое характеристическое уравнение третьего порядка

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = s^3 + 7,5s^2 + 18,5s + 15 = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях s, получим расчетные соотношения $d_1 + 3 = 7,5$; $d_2 - 1 = 18,5$; $5k = 15$. Отсюда находим параметры регулятора $d_1 = 4,5$; $d_2 = 19,5$; $k = 3$.

Пример 2. ПФ объекта регулирования после нормирования имеет вид

$$W(s) = \frac{100}{s^3 + 20,5s^2 + 110s + 50},$$

заданные показатели качества: время регулирования 6 с, перерегулирование 0,02, выбрать параметры модального регулятора. Поскольку объект представлен передаточной функцией и не все переменные состояния измеряются, формируем наблюдатель состояния с параметрами $b = 100$, $a_{10} = 20,5$, $a_{20} = 110$, $a_{30} = 50$.

Исходя из требований к процессу регулирования замкнутой системы, выбираем корни $s_1, s_2 \ldots s_n$ и определяем эталонный (желаемый) характеристический полином с коэффициентами $a_1 \ldots a_n$. Характеристический полином третьей степени содержит один действительный корень и два комплексных сопряженных, по последним, полагая их доминирующими, и будем формировать показатели качества регулирования.

При заданном времени регулирования $t_{рег} = 6$ с степень устойчивости для ошибки $\Delta = 5$ % равна $\alpha_{min} = 3/6 = 0,5$, отсюда действительная часть комплексного корня будет равна -0,5. Действительный корень принимаем в 10 раз большим, т.е. -5, чтобы исключить его влияние на переходный процесс. По заданной величине перерегулирования $\sigma = 0,02$ вычисляем степень колебательности $\mu = -\pi/\ln(\sigma) =$ $= -3,1415926/\ln(0,02) = 0,803$, после чего можно вычислить мнимую часть комплексного корня $\beta = \mu \cdot \alpha_{min} = 0,803 \cdot 0,5 = 0,401$.

По значениям корней -5 и $-0,5 \pm j0,401$ находим вид желаемого характеристического полинома

$$D(s) = (s+5)[(s+0,5)^2 + 0,401^2] = s^3 + 6s^2 + 5,41s + 2,05.$$

Из условия нулевой ошибки регулирования значение коэффициента усиления регулятора $K = a_n/b = 2,05/100 = 0,0205$. Значения коэффициентов обратной связи по переменным состояния равны

$$k_{oc,1}=\frac{a_1-a_{10}}{Kb}=\frac{a_1-a_{10}}{a_3}=\frac{6-20{,}5}{2{,}05}=-7{,}0732,$$

$$k_{oc,2}=\frac{a_2-a_{20}}{Kb}=\frac{a_2-a_{20}}{a_3}=\frac{5{,}41-110}{2{,}05}=-51{,}0195,$$

$$k_{oc,3}=\frac{a_3-a_{30}}{Kb}=\frac{a_3-a_{30}}{a_3}=\frac{2{,}05-50}{2{,}05}=-23{,}3902.$$

Замкнутая система регулирования (рисунок 2.26) содержит объект управления на выходе *U(t)*, наблюдатель в форме, соответствующей каноническому управляемому представлению, П-регулятор с коэффициентом усиления *K* и обратными связями k_{oc} по переменным состояния, формируемым наблюдателем.

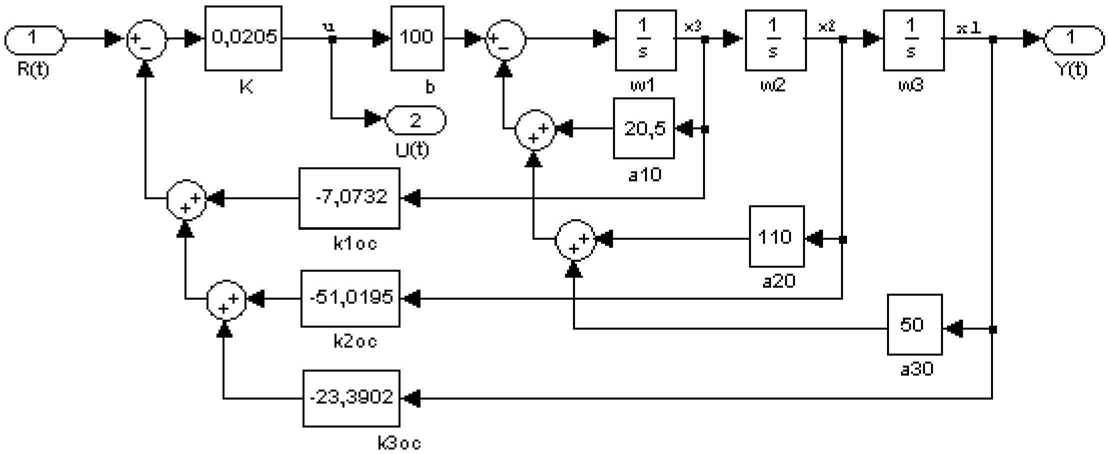


Рисунок 2.26

Передаточная функция замкнутой системы регулирования равна

$$W_{yr}(s)=\frac{0{,}0205\cdot 100\cdot\dfrac{1}{s^3}}{1+\dfrac{20{,}5}{s}+\dfrac{110}{s^2}+\dfrac{50}{s^3}+0{,}0205\cdot 100\cdot\left(\dfrac{-7{,}0732}{s}+\dfrac{-51{,}0195}{s^2}+\dfrac{-23{,}3902}{s^3}\right)}=$$

$$=\frac{2{,}05}{s^3+6s^2+5{,}41s+2{,}05}.$$

Расчет подтверждает, что установившаяся ошибка отсутствует, так как коэффициент передачи в установившемся режиме равен 2,05/2,05 = 1, а полученный характеристический полином системы регулирования равен желаемому. При единственной обратной связи

$$H_{eq}(s)=\frac{k_{oc,1}s^2+k_{oc,2}s+k_{oc,3}}{N(s)}=(-7{,}0732s^2-51{,}0195s-23{,}3902)/100\,.$$

Задания для самостоятельного решения.

2.10.1 Выбрать значения параметров регулятора для объекта с передаточной функцией $W(s)=10/(4s^2+0,4s+1)$ при следующих требованиях к качеству регулирования $\varepsilon(\infty)=0$; $\sigma \le 20$ %; $t_{\text{рег}} \approx 1$ с.

2.10.2 Выбрать регулятор при заданных показателях качества регулирования $\varepsilon(\infty)=0$; $\sigma \le 30$ %; $t_{\text{рег}} \approx 1$ с для объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 4u \end{cases}$$
$$y = x_1$$

2.10.3 Выбрать регулятор при заданных показателях качества регулирования $\varepsilon(\infty) = 2$ % от $r(t)$; $\sigma = 0$ %; $t_{\text{рег}} \le 3$ с для объекта с передаточной функцией $W(s)=5/\left[(0,4s^2+1)(4s+1)\right]$.

2.10.4 Выбрать регулятор при заданных показателях качества регулирования $\varepsilon(\infty) = 5$ % от $r(t)$; $\sigma = 0$ %; $t_{\text{рег}} \le 5$ с для объекта с передаточной функцией $W(s)=10/\left[(s^2+3s-1)(2s+1)\right]$.

2.10.5 Выбрать регулятор при заданных показателях качества регулирования $\varepsilon(\infty)=0$; $\sigma \le 20$ %; $t_{\text{рег}} \approx 3$ с для объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$
$$y = x_1$$

2.10.6 Записать желаемый характеристический полином третьего порядка по требованиям к качеству регулирования $t_{\text{рег}} \le 3$ с; $\mu \le 1,5$.

2.11 Преобразования подобия

При анализе и синтезе многомерных систем необходимо уметь переходить от одной формы к другой – поскольку все эти системы подобные, такой переход называется преобразованием подобия или базиса.

Один из путей перехода, приемлемый для одномерной системы – составить по матрицам **A**, **b**, **c** передаточную функцию системы, а по ней записать требуемое представление в пространстве состояний.

В общем же случае используют матрицу перехода или преобразования базиса **P** размера $n \times n$, тогда новая система уравнений состояния и наблюдения объекта имеет вид

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{h}(t) + \mathbf{PBu}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CP}^{-1}\mathbf{h}(t) + \mathbf{Du}(t)$$

откуда следует, что матрицы коэффициентов новой системы равны $\mathbf{A}_h$=$\mathbf{PAP}^{-1}$, $\mathbf{B}_h$=$\mathbf{PB}$, $\mathbf{C}_h$=$\mathbf{CP}^{-1}$ (матрица $\mathbf{D}$, при ее наличии, не претерпевает изменений, поскольку не связана с вектором состояний). Задаваясь произвольной матрицей $\mathbf{P}$ необходимого размера, можно получить бесконечное множество описаний одной и той же системы в пространстве состояний. Однако при любых преобразованиях должны выполняться два важных условия:

- исходная и преобразованная система должны иметь одинаковые собственные значения (характеристические многочлены и их корни);
- преобразование базиса не меняет передаточную функцию системы.

Приведение к канонической управляемой форме: матрица преобразования в этом случае равна отношению матрицы управляемости новой системы к матрице управляемости исходной, т.е. $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_c\mathbf{Q}^{-1}$. Необходимо найти характеристический полином системы, записать матрицы $\mathbf{A}_c$ и $\mathbf{b}_c$ системы в канонической управляемой форме, вычислить матрицы управляемости обеих систем и по ним матрицу преобразования $\mathbf{P}$, с помощью которой осуществляется переход.

Переход к канонической наблюдаемой форме отличается лишь тем, что используются матрицы наблюдаемости, причем матрица преобразования базиса вычисляется по отношению матрицы наблюдаемости исходной системы к матрице наблюдаемости новой $\mathbf{P} = \mathbf{N}\mathbf{N}_o^{-1}$ (обе матрицы составляются в виде столбца).

Для перехода к управляемой форме должна быть полностью наблюдаема пара ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$), для перехода к наблюдаемой форме должна быть полностью наблюдаема пара ($\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$).

Обратный переход, т.е. возвращение к исходной системе, например, после выбора параметров модального регулятора, во всех случаях осуществляется применением матрицы $\mathbf{P}$ в обратном порядке, т.е. $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_h\mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_h$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_h\mathbf{P}$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_h\mathbf{P}$, где $\mathbf{k}_h$ – матрица обратных связей замкнутой системы по переменным состояния.

К диагональной форме $\mathbf{A}_h = \mathbf{\Lambda}$ приводятся системы с некратными вещественными полюсами, при этом матрицы исходной и преобразованной систем связаны соотношением $\mathbf{A} = \mathbf{T\Lambda T}^{-1}$ и матрица преобразования базиса равна $\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1}$.

Пример 1. Пусть преобразуемый к канонической управляемой форме объект третьего порядка описывается системой уравнений

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Характеристический полином объекта равен $D(s)= s^3+s^2+3s+3$, матрица управляемости

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Используя вычисленный характеристический многочлен, записываем сопровождающую матрицу $\mathbf{A_c}$, затем для пары ($\mathbf{A_c}$, $\mathbf{b_c}$) найдем матрицу управляемости $\mathbf{Q_c}$ новой системы и матрицу преобразования $\mathbf{P=Q_cQ^{-1}}$

$$\mathbf{A}_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -3 & 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{Q}_C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix};\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Применяя формулы $\mathbf{A}_c=\mathbf{PAP}^{-1}$, $\mathbf{b}_c=\mathbf{Pb}$, $\mathbf{c}_c=\mathbf{cP}^{-1}$, найдем описание системы в канонической форме управляемости (учитывая, что две матрицы были нам уже известны, оставалось вычислить лишь $\mathbf{c}_c$)

$$\mathbf{A}_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -3 & -1\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}_C=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\quad \mathbf{c}_C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения.

2.11.1 Восстановить исходное описание системы, если известны использованная матрица преобразования $\mathbf{P}$ и новое описание

$$\mathbf{A}_C=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}_C=\begin{bmatrix}-15,52\\ -19,60\\ 5,745\end{bmatrix};\quad \mathbf{c}_C=\begin{bmatrix}-0,193 & 0,153 & 0,174\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-7,7621 & -5,8216 & -3,8810\\ -9,7980 & -9,7980 & -7,3485\\ 2,8723 & 3,5904 & 4,3084\end{bmatrix}$$

2.11.2 Перейти к канонической управляемой форме от системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 5x_2 + u \end{cases}$$

$$y = 3x_1 + x_2$$

2.11.3 Перейти к канонической наблюдаемой форме от системы

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_c = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.11.4 Перевести наблюдаемое представление в управляемое

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$y = x_1$$

2.11.5 Перейти к канонической управляемой форме от системы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Ответы

1.1.1.2 $W_{yx}=\dfrac{W_1W_2W_3W_4+W_1W_4W_5}{1-W_1W_2W_3W_4W_6-W_1W_4W_5W_6}$.

1.1.1.6 $W_{uf}(s)=\dfrac{2s^2+10s}{s^3+8s^2+63s+80}$.

1.1.2.2 $W(s)=\dfrac{1,2s-1,8}{s^2+4s+5}$.

1.1.2.5 $W_{yr}(s)=\dfrac{3}{s^2+2s+2}$.

1.1.3.1 $k(\infty)=\infty$.

1.1.3.5 $y'''+3y''+7y'+5y=1,25u'+6,25u$.

1.2.1.1 $y(t)=20-2,222e^{-t}+10e^{-0,5t}-27,778e^{-0,1t}$.

1.2.1.5 $y(t)=2t-2,4+2,5e^{-t}-0,1e^{-5t}$.

1.2.2.2 $h(t)=3-4,5e^{-t}+1,5e^{-3t}$.

1.2.2.4 $G(s)=W(s)=\dfrac{12s^2+42s+24}{s^4+6s^3+29s^2+54s+24}$.

1.2.3.2 $y_{вын}(t)=2-3,33e^{-2t}+1,33e^{-5t}$; $y_{св}(t)=e^{-2t}$.

1.2.3.6 $y(0)=3$; $y'(0)=-6$.

1.3.1.2 $A(\omega)=\dfrac{\sqrt{100+2500\omega^2}}{\sqrt{(11-\omega^2)^2+49\omega^2}}$; $\varphi(\omega)=arctg\left(5\omega\right)-arctg\left(\dfrac{7\omega}{1-\omega^2}\right)$.

1.3.1.4 $T_2T_3y'''+(T_2+T_3)y''+y'=kT_1u'+ku$.

1.3.2.1 $\omega_{ср,1}$ = 0,01 рад/с, $\omega_{ср,2}$ = 100 рад/с.

1.3.2.4 –20 дБ/дек.

1.4.1.2 При остальных левых полюсах система имеет один полюс s = 0 и находится на апериодической границе устойчивости.

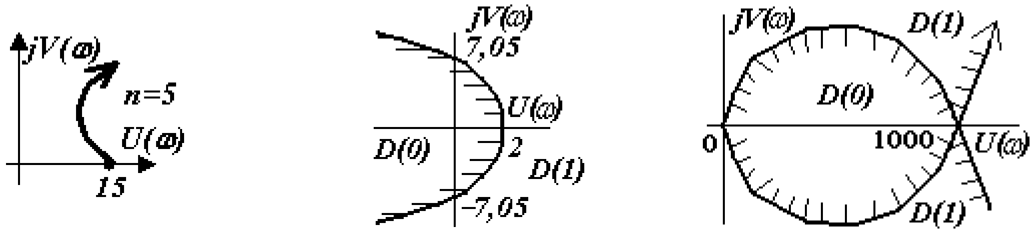
1.4.1.4 Частота незатухающих колебаний $\omega_{гран}$ = 1,41 рад/с.

1.4.2.3 Система устойчива.

1.4.2.10 Система на колебательной границе устойчивости.

1.4.3.2 Предельное значение $k_c = k_1 k_2 k_3 = 12{,}6$.

1.4.3.5 Система неустойчива, имеет два правых корня (рисунок 3.1, а).



а б в

Рисунок 3.1

1.4.4.1 Система устойчива при $k < 2$ (риснок 3.1, б).

1.4.4.3 Система устойчива при $0 < k < 1000$ (рисунок 3.1, в).

1.4.5.2 Запас по амплитуде $A_М = 1$, запас по фазе $\varphi_М = 180°$.

1.4.5.9 Запас по амплитуде $А_М = 1$.

1.5.1.3 Перерегулирование $\sigma = 0$.

1.5.1.6 Перерегулирование $\sigma = 0{,}7/1{,}05 = 0{,}667$; коэффициент демпфирования $\psi = (1{,}05 - 0{,}5)/(1{,}05 - 0) = 0{,}524$; время регулирования на уровне $\Delta = 0{,}05 \times 1{,}05 = 0{,}052$ равно примерно 22 с.

1.5.2.6 Время регулирования $t_{рег} = 3/0{,}5 = 6$ с; перерегулирование $\sigma = \exp(-\pi/3{,}88) = 0{,}445$ или 44,5 %.

1.5.2.7 $t_{рег} = 0$ с, $\sigma = 0$.

1.5.3.3 Время регулирования $0{,}314 < t_{рег} < 1{,}256$ с; перерегулирование $\sigma = (1{,}18*3 + 0{,}277*2 - 3)/3 = 0{,}365$ или 36,5 %.

1.5.3.5 $P(0) = 0{,}9 = h(\infty)$, следовательно $\varepsilon(\infty) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

1.5.4.1 $J_1 = k$.

1.5.4.3 $J_1 = 1$.

1.5.5.2 $\varepsilon(\infty) = 1 - 0{,}909 = 0{,}091$ или 9,1 %.

1.5.5.4 $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = -9$.

2.1.2 $k(\infty) = \infty$.

2.1.6 $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 1{,}5x_2 + 0{,}5u \end{cases}.$$
$$y = x_1 - 2x_2$$

2.2.3 $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + u \end{cases}.$$
$$y = 3x_1 + 12x_2$$

2.2.4 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1,5\\ -2\\ 0,5\end{bmatrix}$; $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

2.3.2 **d** = [10].

2.3.5 После подготовки схемы (рисунок 3.2) получаем систему уравнений

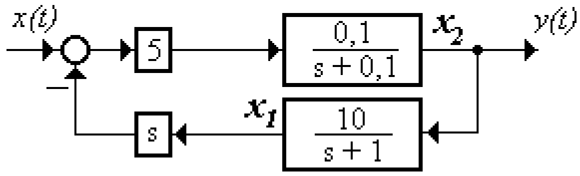


Рисунок 3.2

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 10x_2\\ \dot{x}_2 = 0,5x_1 - 5,1x_2 + 0,5u\end{cases}$$
$$y = x_2$$

2.4.1 Схема на интеграторах (рисунок 3.3)

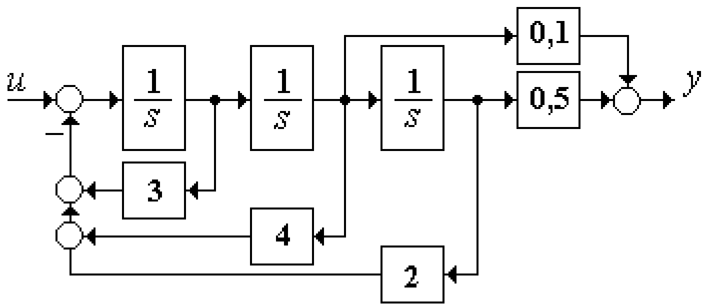


Рисунок 3.3

2.4.2 Построенная схема (рисунок 3.4)

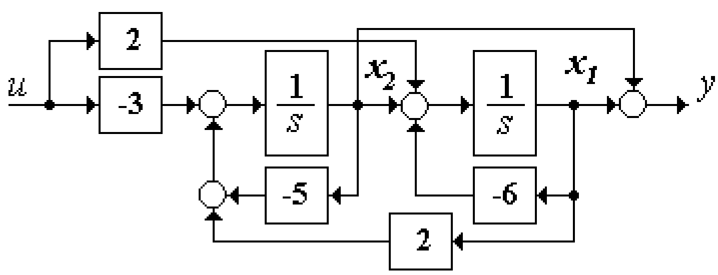


Рисунок 3.4

2.5.3 Присоединенную матрицу проще вычислить для системы с диагональной матрицей A

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix};$$

$$adj(s\mathbf{1}-\mathbf{A})=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix}s^2+5s+6 & 0 & 0\\ 0 & s^2+4s+3 & 0\\ 0 & 0 & s^2+3s+2\end{bmatrix}.$$

2.5.5 $\mathbf{W}(s)=\dfrac{3s^2-3s+10}{s^2-s}$.

2.6.1 Реакция на начальные условия равна

$$Y_{св}(s)=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2+6s+11 & s+6 & 1\\ -6 & s^2+6s & s\\ -6s & -11s-6 & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{s^2+8s+19}{(s+1)(s+2)(s+3)};$$

$$y_{св}(t)=6e^{-t}-7e^{-2t}+2e^{-3t}.$$

2.6.5 Система неустойчива, так как имеет правый полюс +3.

2.7.1 $\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}1+2t+2t^2 & t+2t^2\\ 0 & 1+2t+2t^2\end{bmatrix}$.

2.7.5 $\Phi_{12}(s)=0,333e^{-2t}-0,333e^{-5t}$.

2.8.3 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}2 & -7 & 34\\ -1 & -6 & -1\\ 1 & -1 & 6\end{bmatrix}$.

Система полностью управляема, так как ранг матрицы управляемости **Q** равен порядку системы n = 3.

2.8.7 Матрица наблюдаемости системы $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, ранг матрицы **N** равен 1, поэтому система наблюдаема частично, порядок наблюдаемости равен 1.

2.9.2 При заданных передаточной функции объекта и схеме наблюдателя величина K на значение отрицательного коэффициента 2 при s^1 не влияет.

2.9.3 Схема наблюдателя приведена на рисунке 3.5.

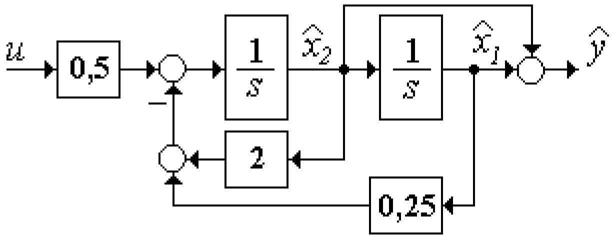


Рисунок 3.5

2.10.3 Исходя из показателей регулирования выбираем три действительных одинаковых корня – типовой полином Ньютона третьего порядка (Приложение Г) с величиной $\omega = t_{таб}/t_{зад} = 6{,}3/3 = 2{,}1$. Тогда желаемый вид полинома $s^3 + 6{,}3s^2 + 13{,}23s + 9{,}26$ обеспечит время регулирования 3 с и перерегулирование $\sigma = 0$. Приведенная передаточная функция объекта $3{,}125/(s^3 + 0{,}25s^2 + 2{,}5s + 0{,}625)$. По величине статизма выбираем коэффициент усиления регулятора, размещаемого вне контура обратных связей $K = 0{,}98 \times 9{,}26/3{,}125 = 2{,}9039$.

Сравнивая общий вид желаемого характеристического полинома $D(s) = s^3 + (k_1 + 0{,}25)s^2 + (k_2 + 2{,}5)s + (k_3 + 0{,}625)$ и его расчетный вид, находим значения коэффициентов обратных связей по переменным состояния $k_1 = 6{,}3 - 0{,}25 = 6{,}05$; $k_2 = 13{,}23 - 2{,}5 = 10{,}73$; $k_3 = 9{,}26 - 0{,}625 = 8{,}635$ и общий вид структурной схемы замкнутой системы регулирования (рисунок 3.6).

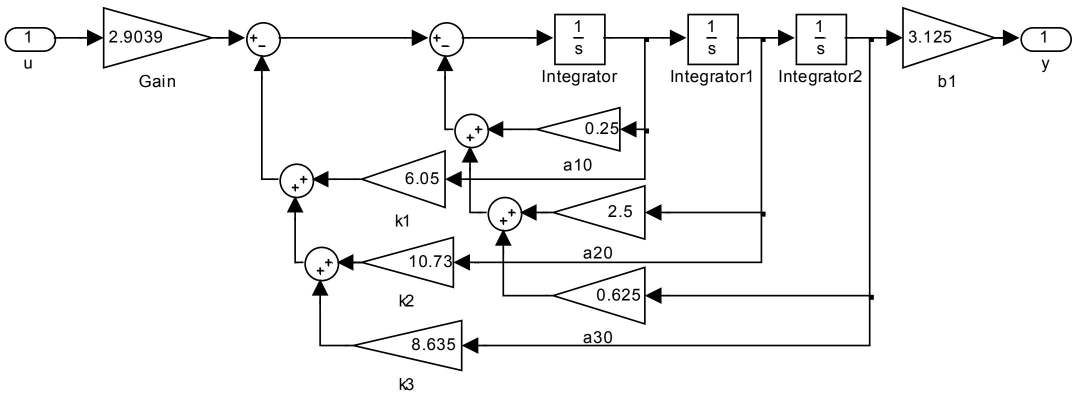


Рисунок 3.6

2.11.2 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 21 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0{,}1429 & -0{,}1429 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Литература

1 Бороденко В.А. Практический курс теории линейных систем автоматического регулирования : учеб. пособие. – Павлодар : Кереку, 2006. – 260 с.

2 Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В.А. Бесекерского. – 5-е изд., перераб. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

3 Топчеев Ю.И. Задачник по теории автоматического регулирования : учеб. пособие для вузов / Ю.И. Топчеев, А.П. Цыпляков. – М. : Машиностроение, 1977. – 592 с.

4 Задачник по теории автоматического управления / под общей ред. А.С. Шаталова. – М. : Энергия, 1971. – 496 с.

5 Французова Г.А. Сборник задач по теории автоматического управления : учебное пособие. Ч. 2. / Г.А. Французова, О.Я. Шпилевая, В.Д. Юркевич. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – 51 с.

6 Клавдиев А.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах. Часть 1. Анализ линейных непрерывных систем автоматики : учебное пособие. – СПб. : СЗТУ, 2005. – 74 с.

7 Ким Д.П. Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М. : Физматлит, 2008. – 328 с.

8 Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб. : Питер, 2005. – 336 с.

Приложение А
(справочное)

Таблица соответствия оригиналов и изображений

Таблица А.1

Изображение *X(s)*	Оригинал *x(t)*
$ke^{-\tau s}$	$k\cdot\mathbf{1}(t-\tau)$ запаздывание на $\tau > 0$
$k \cdot 1$	импульсная функция $k\cdot\delta(t)$
k/s – простой нулевой корень	скачок $k\cdot\mathbf{1}(t)$ или просто k
$k\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ – кратный нулевой корень	$k\cdot t^n$ – степенной ряд от t
$k\dfrac{1}{s\pm\alpha}$ – простой действительный корень	$k \cdot e^{\mp\alpha t}$ – экспонента
$\dfrac{k}{(s\pm\alpha)^n}$ – кратный действительный корень	$k\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\mp\alpha t}$, при $n > 1$
$\dfrac{k\beta}{s^2+\beta^2}$ – сопряженные мнимые корни	$k\cdot\sin\beta t$ – гармоническая функция
$\dfrac{ks}{s^2+\beta^2}$ – сопряженные мнимые корни	$k\cdot\cos\beta t$ – гармоническая функция
$\dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$ - затухающая гармоническая функция
$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$ - затухающая гармоническая функция
сопряженные комплексные корни $-\alpha \pm j\beta$, объединенные в одну дробь $\dfrac{Cs+D}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$, с вычислением $E=\dfrac{D+C(-\alpha)}{\lvert\beta\rvert}$	а) предпочтительная форма $e^{-\alpha t}\left(C\cdot\cos\lvert\beta\rvert t+E\cdot\sin\lvert\beta\rvert t\right)$ б) через синус (угол в радианах) $e^{-\alpha t}\sqrt{C^2+E^2}\sin\left(\lvert\beta\rvert t+arctg\dfrac{C}{E}\right)$ в) через косинус (угол в радианах) $e^{-\alpha t}\sqrt{C^2+E^2}\cos\left(\lvert\beta\rvert t-arctg\dfrac{E}{C}\right)$
сопряженные комплексные корни (раздельное представление) $\dfrac{c+jd}{s+\alpha+j\beta}+\dfrac{c-jd}{s+\alpha-j\beta}$	$2\cdot e^{-\alpha t}\left(c\cdot\cos\lvert\beta\rvert t+d\cdot\sin\lvert\beta\rvert t\right)$ перед d ставят плюс, если знаки мнимых частей изображения в числителе и знаменателе совпадают (как показано), а иначе минус

Примечание – Даже если скачок $1(t)$ в формуле для входной функции не пишется, то всегда подразумевается, т.к. по Лапласу при $t = 0_-$ любая функция $f(t)$ равна нулю, а затем она появляется скачком. Однако сомножитель $1/s$ вводят в изображение входной функции лишь в том случае, если она представляет собой чисто ступенчатое воздействие, даже если в функциях-оригиналах другого вида скачок и был указан.

Приложение Б
(справочное)

Расчет числителей простых дробей

Метод неопределенных коэффициентов (системы уравнений). Универсальный, хотя и громоздкий, метод, пригодный для любых корней характеристического полинома.

Левую и правую часть разложения на простые дроби приводят к общему знаменателю, который отбрасывается. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s левой и правой частей равенства, составляют систему линейных алгебраических уравнений и решают ее любым известным методом.

Пример. Изображение $Y(s) = 1/(s^2 + s)$ разлагается на две дроби

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{s+1}$$

в соответствии с полюсами $s_1 = 0$; $s_2 = -1$. Приводим левую и правую части к общему знаменателю, отбрасывая его, группируем коэффициенты, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях s слева и справа

$$1 = k_0 s + k_0 + k_1 s = (k_0 + k_1)s + k_0$$

$$\begin{array}{l} \text{при } s^0 \rightarrow \\ \text{при } s^1 \rightarrow \end{array} \quad \begin{cases} 1 = k_0 \\ 0 = k_0 + k_1 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{array}{l} k_0 = 1 \\ k_1 = -1 \end{array}$$

Подставляем значения коэффициентов числителей

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}$$

и переходим по таблице соответствия от изображений к оригиналам

$$y(t) = 1 - e^{-t}.$$

Метод подстановки полюсов (пригоден только для простых полюсов или дроби с полюсом максимальной кратности).

Формула: $k_{-p} = (s + p) \cdot Y(s)\big|_{s=-p}$

Пример: возьмем ту же функцию $Y(s) = \dfrac{1}{s(s+1)} = \dfrac{k_0}{s} + \dfrac{k_1}{s+1}$.

$$k_0 = \left.\frac{(s+0)\cdot 1}{s(s+1)}\right|_{s=0} = 1; \qquad k_1 = \left.\frac{(s+1)\cdot 1}{s(s+1)}\right|_{s=-1} = -1,$$

получили аналогичный результат. Действия сводятся к тому, что в знаменателе левой части равенства исключают полином с соответствующим полюсом, а в оставшуюся часть подставляют его значение.

Метод вычисления производной (для простых полюсов).

Формула: $k_{-p} = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=-p}$.

Пример: возьмем ту же функцию $Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{s+1}$.

От знаменателя изображения $D(s) = s^2 + s$ вычисляем производную $D'(s) = 2s + 1$ и находим коэффициенты

$$k_0 = \left.\frac{1}{2s+1}\right|_{s=0} = 1; \; k_1 = \left.\frac{1}{2s+1}\right|_{s=-1} = -1.$$

Метод вычисления производной (для кратных полюсов). Исходное изображение необходимо разделить на две части – часть, содержащую кратные корни, и оставшуюся часть $F(s)$. Кратные корни в правой части выражения записывают по убыванию кратности (степени s). Пусть разложение функции имеет вид, где $F(s) = (s+p)^j \cdot Y(s)$

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s+p)^j} + \frac{A_2}{(s+p)^{j-1}} + \ldots + \frac{A_j}{(s+p)} + F(s),$$

тогда формула для вычисления коэффициента числителя A_r $(1 < r \le j)$ дроби с кратным корнем

$$A_r = \left.\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}F(s)}{ds^{r-1}}\right|_{s=-p}.$$

Пример: дана функция с простым корнем $s = -1$ и корнем $s = 0$ с кратностью 3

$$Y(s) = \frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{A_1}{s^3} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s} + \frac{k}{s+1}.$$

Остаток после удаления кратных корней равен $F(s) = 1/(s+1) = (s+1)^{-1}$. Коэффициенты A_1 и k определяем другим способом, например, подстановкой полюсов

$$k_1 = \left.\frac{1}{s^3}\right|_{s=-1} = -1; \quad A_1 = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=0} = 1.$$

Остальные коэффициенты

$$r = 2\ A_2 = \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{ds}(s+1)^{-1}\right]_{s=0} = 1\left[-1(s+1)^{-2}\right]_{s=0} = -1,$$

$$r = 3\ A_3 = \frac{1}{(3-1)!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s+1)^{-1}\right]_{s=0} = \frac{1}{2}\left[2(s+1)^{-3}\right]_{s=0} = 1$$

и реакция в целом

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \qquad \text{(изображение)},$$

$$y(t) = 0{,}5t^2 - t + 1 - e^{-t} \qquad \text{(оригинал)}.$$

Метод вычитания найденной дроби (для кратных полюсов). Пример: дана функция с простым корнем $s = -1$ и корнем $s = 0$ с кратностью 3

$$Y(s) = \frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{A_1}{s^3} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s} + \frac{k}{s+1}.$$

Находим сразу $A_1 = 1$ любым методом, например, подстановкой полюсов. Вычитаем найденную дробь из левой части

$$\frac{1}{s^3(s+1)} - \frac{1}{s^3} = \frac{-s}{s^3(s+1)} = \frac{-1}{s^2(s+1)} = \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s} + \frac{k}{s+1}$$

и определяем A_2 каким-либо методом, например, подстановкой полюсов

$$A_2 = \left.\frac{s^2(-1)}{s^2(s+1)}\right|_{s=0} = -1.$$

Снова вычитаем найденную дробь

$$\frac{-1}{s^2(s+1)} - \frac{-1}{s^2} = \frac{s}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A_3}{s} + \frac{1}{s+1}.$$

Осталось найти методом подстановки полюсов $A_3 = 1$ и $k = -1$, т.е. получены те же результаты, что и в предыдущем примере.

Приложение В
(справочное)

Основы алгебры матриц

Матрицей называется упорядоченный двумерный массив элементов. Матрица обозначается в тексте полужирным шрифтом прописным символом (вектор – строчным), ограничивается скобками вида ( ), [ ], || || и ни в коем случае не одинарными вертикальными линиями | |, т.к. это обозначение соответствует числу (определителю).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right], \text{ где}$$

$i = \overline{1,n}$ – индекс строки,
$j = \overline{1,m}$ – индекс столбца,
$(n \times m)$ – размер матрицы,
n – число строк,
m – число столбцов.

Индексы, представляющие собой число более девяти или выражение, записываются через запятую, например $a_{i,\ k+1}$. Элементы $a_{ij}|_{i=j}$ образуют главную диагональ матрицы. Множество элементов, принадлежащее отрезку, соединяющему правый верхний угол с левым нижним, называется побочной диагональю.

Матрица называется:

- противоположной **A**, если она равна –**A**;

- транспонированной относительно **A**, если ее столбцы равны строкам, а строки – столбцам исходной матрицы **A** (если $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, то $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$). Свойства операции транспонирования:

$$(\mathbf{A}k)^T = k\mathbf{A}^T;\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T;\ (\mathbf{BA})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T;\ (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A};$$

- квадратной, если $n = m$, тогда n – порядок матрицы; вектором-столбцом, если $m = 1$; вектором-строкой, если $n = 1$; скаляром, если $m = n = 1$.

Квадратная матрица называется:

- нулевой, если $a_{ij} = 0$, например $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

- верхней треугольной, если $a_{ij} = 0\big|_{i>j}$, например $\mathbf{U} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

- нижней треугольной, если $a_{ij} = 0\big|_{i<j}$, например $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$;

- симметричной, если $a_{ij} = a_{ji}\Big|_{i \neq j}$;

- диагональной, если $a_{ij} = 0\Big|_{i \neq j}$, обозначается $diag[a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}]$;

- единичной, если $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j \\ 1 \text{ при } i = j \end{cases}$, обозначается **E**, **I**, **1**, пример $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Размер единичной и нулевой матриц всегда может быть выбран в соответствии с выполняемой операцией.

Матрице можно поставить в соответствие специальные числа: определитель, след, ранг, норму, собственное значение и т.п.

След матрицы равен сумме ее диагональных элементов. Обозначение Sp**A** или Tr**A**, пример: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $Sp\mathbf{A} = 1 + 4 = 5$.

Правильным называется произведение n элементов квадратной матрицы с последовательно возрастающими индексами строк и столбцов. При нарушении последовательности индексов строк или столбцов произведение берется с минусом.

Определителем матрицы называется алгебраическая сумма всех ее правильных произведений с учетом знака. Определитель (детерминант) обозначается D, Δ, det**A**, |**A**|. Пример: $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

Определитель существует только для квадратной матрицы, он не изменяется при транспонировании матрицы. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей. Матрица, определитель которой равен нулю, называется особой (вырожденной, сингулярной), матрица с ненулевым определителем соответственно регулярной (неособой, невырожденной).

Вычеркнем в матрице **A** i-строку и j-столбец. Определитель полученной матрицы (n-1)-го порядка называют минором элемента a_{ij} в определителе матрицы **A** и обозначают через M_{ij}. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} равно $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Порядок наибольшей подматрицы, минор которой не равен нулю, называется рангом матрицы **A** (обозначается Rang**A** или Rank**A**). Матрица является неособой, если имеет полный ранг, равный ее порядку. Ранг матрицы не изменяется при транспонировании. Пример: определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ равен $\Delta_2 = 0$, однако есть минор первого порядка $\Delta_1 = 2 \neq 0$, поэтому ранг матрицы Rank**A** = 1.

Если матрица приведена к трапецеидальному виду, ранг матрицы равен числу ее диагональных элементов. Пример:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ненулевых диагональных элементов триангулированной матрицы два (1 и 7), поэтому Rank**A** = 2.

Матрицы равны при равенстве их размерностей и соответственных элементов. Складывать можно лишь матрицы с одинаковым числом строк и столбцов. Суммой двух матриц является матрица, каждый элемент которой равен сумме их соответственных элементов. Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый ее элемент умножить на это число. Произведение двух матриц определено, если число столбцов левой матрицы равно числу строк правой матрицы. Число строк результирующей матрицы равно числу строк левой матрицы, а число столбцов – числу столбцов правой матрицы. Матрицы называются сцепленными, если их произведение существует, и перестановочными, если результат их перемножения как слева, так и справа одинаков. Результат умножения как слева, так и справа любой матрицы на единичную всегда равен исходной матрице, на нулевую – нулевой. Операция деления соответствует умножению на обратную матрицу.

Квадратная матрица **A** называется обратимой, если существует такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, для которой $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратной к **A**. Матрица обратима только тогда, когда не является особой (когда ее определитель не равен нулю). Свойства обратной матрицы: $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$.

Поскольку $\mathbf{A}^{-1} = adj\mathbf{A}/\det\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}/|\mathbf{A}|$, где в числителе дроби находится присоединенная матрица, один из методов определения обратной матрицы связан с вычислением присоединенной матрицы (матрицы алгебраических дополнений). Присоединенной к матрице А называется матрица, полученная путем замены каждого элемента исходной матрицы его алгебраическим дополнением и транспонирования полученной матрицы.

Пример: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A}| = 4-6=-2$,

$$adj\mathbf{A}=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 4 & (-1)^{1+2}\cdot 3 \\ (-1)^{2+1}\cdot 2 & (-1)^{2+2}\cdot 1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Существует простое мнемоническое правило учета знака алгебраических дополнений (шахматка): после вычисления миноров знаки элементов матрицы изменяются в шахматном порядке, начиная с (+) у левого диагонального элемента. Кроме того, для вычисления присоединенной матрицы второго порядка достаточно в исходной матрице элементы главной диагонали поменять местами, а у элементов побочной диагонали поменять знаки.

Число λ называется собственным значением (характеристическим числом) квадратной матрицы **A** порядка n, если можно подобрать такой n-мерный ненулевой вектор **x**, что **Ax** = λ**x**. Если раскрыть определитель матрицы [λ·**1** - **A**], то получится многочлен n-ой степени относительно λ

$$|\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A}| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = a(\lambda),$$

называемый характеристическим многочленом матрицы **A**, у которого $a_0 = 1$, а $a_n = |\mathbf{A}|$. Уравнение $|\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A}| = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы **A**. Иногда для него используется запись $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}| = (-1)^n(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$.

Пример: матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

характеристическая матрица

$$[\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{bmatrix},$$

характеристический полином $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2$,

собственные значения $\lambda_1 = 5{,}415$; $\lambda_2 = -0{,}415$.

Матрицы **A** и $\mathbf{A}^*$ подобны, если равны их характеристические полиномы $a(\lambda)$ и собственные значения s_i

$$\det(\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A}^*) = a(\lambda);$$

$$\lambda_i\,\{\mathbf{A}\} = \lambda_i\,\{\mathbf{A}^*\} = s_i.$$

Приложение Г
(справочное)

Типовые полиномы

В процессе синтеза систем управления используют характеристические полиномы, образуемые по известному закону, для которых заранее определены показатели качества (время регулирования, перерегулирование). Не следует лишь забывать, что нули передаточной функции при этом должны отсутствовать, в противном случае все показатели изменяются.

Полином Баттерворта определяется формулой

$$P_B(s) = s^n + a_1\omega\, s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1}s + \omega^n = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i),$$

где p_i – корни полинома, расположенные слева от мнимой оси комплексной плоскости в вершинах правильного $2n$-угольника, ω – положительное число, задаёт радиус распределения корней. Полиномы первого-шестого порядка приведены в таблице Г.1.

Таблица Г.1

n	Вид полинома Баттерворта	$t_{\text{рег}}$, с	σ, %
1	$s+\omega$	3,0	0,0
2	$s^2+1.41\omega\, s+\omega^2$	2,9	4,5
3	$s^3+2\omega\, s^2+2\omega^2 s+\omega^3$	6,0	8,0
4	$s^4+2.61\omega\, s^3+3.41\omega^2 s^2+2.61\omega^3 s+\omega^4$	6,8	11,0
5	$s^5+3.24\omega\, s^4+5.24\omega^2 s^3+5.24\omega^3 s^2+3.24\omega^4 s+\omega^5$	7,7	13,5
6	$s^6+3.86\omega s^5+7.46\omega^2 s^4+9.13\omega^3 s^3+7.46\omega^4 s^2+3.86\omega^5 s+\omega^6$	10,8	14,3

Нормированные полиномы Баттерворта получаются при ω = 1, для них основные показатели качества даны в таблице. Для ненормированных полиномов перерегулирование не изменяется, а время регулирования нужно разделить на ω.

Полином Ньютона определяется формулой биномиального разложения

$$P_N(s) = s^n + a_1\omega\, s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1}s + \omega^n = (s+\omega)^n,$$

где ω – положительное число, a_i – биномиальные коэффициенты. Полиномы первого-шестого порядка на основе бинома Ньютона приведены в таблице Г.2. Полиномы имеют кратные вещественные отрицательные корни, равные –ω, поэтому перерегулирование для них равно нулю. Нормированные полиномы Ньютона получаются при ω = 1, время регулирования для них указано в таблице. Для ненормированных полиномов время регулирования нужно разделить на ω.

Таблица Г.2

n	Вид полинома Ньютона	$t_{рег}$, с
1	$s+\omega$	3,0
2	$s^2+2\omega\, s+\omega^2$	4,8
3	$s^3+3\omega\, s^2+3\omega^2 s+\omega^3$	6,3
4	$s^4+4\omega\, s^3+6\omega^2 s^2+4\omega^3 s+\omega^4$	7,8
5	$s^5+5\omega\, s^4+10\omega^2 s^3+10\omega^3 s^2+5\omega^4 s+\omega^5$	9,2
6	$s^6+6\omega s^5+15\omega^2 s^4+20\omega^3 s^3+15\omega^4 s^2+6\omega^5 s+\omega^6$	10,5

Выбор числа ω для полиномов Баттерворта или Ньютона соответствующей степени производится по формуле $\omega = t_{таб}/t_{зад}$, где $t_{таб}$ – время регулирования нормированного полинома, взятое из таблицы, $t_{зад}$ – заданное время регулирования.

Содержание

	Введение	3
1	Одномерные линейные непрерывные системы	4
1.1	Передаточная функция	4
1.2	Временные характеристики	14
1.3	Частотные характеристики	22
1.4	Устойчивость непрерывных стационарных систем	30
1.5	Качество непрерывных стационарных систем	45
2	Многомерные системы регулирования	60
2.1	Переход к пространству состояний	60
2.2	Канонические представления	62
2.3	Описание по структурной схеме	65
2.4	Синтез структурной схемы	69
2.5	Основные матричные функции	72
2.6	Решение уравнения движения	74
2.7	Вычисление фундаментальной матрицы	77
2.8	Управляемость и наблюдаемость систем	81
2.9	Наблюдатели состояния	84
2.10	Проектирование модального регулятора	88
2.11	Преобразования подобия	92
3	Ответы	96
	Литература	102
	Приложение А Таблица соответствия оригиналов и изображений	103
	Приложение Б Расчет числителей простых дробей	104
	Приложение В Основы алгебры матриц	107
	Приложение Г Типовые полиномы	111